Глава первая. Теоретические основы комплекснозначной экономики

1.1. Комплекснозначная экономика как новый раздел экономико-математического моделирования

Задачи принятия решений, которые непрерывно возникают в процессе управления экономикой на любом уровне иерархии управления – от рабочего места и производственного участка до мировой экономики, требуют обработки значительных массивов информации для информационного обеспечения процесса принятия решений. И если на нижнем уровне иерархии принятия решений – рабочем месте, - чаще всего можно обойтись интуитивными экспертными оценками, поскольку задача принятия решений тривиальна, а количество и состав обрабатываемой информации касающейся ситуации представляются элементарными, то с увеличением уровня иерархии задача становится всё более и более сложной. Здесь уже невозможно обойтись без использования математических методов, разнообразие и сложность которых возрастает с ростом сложности самой задачи, изменяющейся при переходе ко всё более высокому уровню управления экономикой.

Сегодня арсенал математических методов и моделей, используемых в экономике, весьма обширен. Но это разнообразие отнюдь не гарантирует успешного решения задач управления, напротив, можно привести, по крайней мере, десятки направлений экономико-математического моделирования, когда модели действительных переменных, упираясь в естественные рамки своих возможностей, описывают экономику весьма посредственно. В этих условиях экономисты либо полностью отказываются от применения математических методов, либо переводят экономико-математические модели из области решения практических задач в область теории условных объектов, имеющих мало общего с реальной экономикой. В этом случае учёные вынуждены вводить ограничения и предположения, которые преобразуют эти модели из множества абстрагированных образов в множество образов идеализированных, обладающих свойствами, которые ни один реальный экономический объект не имеет. Взять хотя бы модель «вечно живущего индивида», являющейся одной из множества ей подобных в анналах различных теоретических разделов экономики. Свойство «вечно» жить, как известно, не присуще ни одному из реально существующих индивидов, более того – оно абсолютно противоречит реальности. Построение подобных моделей и их серьёзное обсуждение в научных кругах является выражением беспомощности современной науки продвинуться дальше в решении практических задач моделирования экономики.

Ограниченность экономико-математических моделей действительных переменных очевидна. Попытки развить их за счёт включения в модели новых переменных или усложнения вычислительного аппарата посредством всё более производительной вычислительной техники, - важное направление совершенствования экономико-математического моделирования, отрицать которое ни в коем случае не стоит. Но сегодня уже ощутима потребность в использовании иных принципов экономико-математического моделирования, и такие принципы представляются теорией функций комплексного переменного (ТФКП).

Следует отметить, что экономисты давно сталкивались с ситуациями, когда в ходе построения и реализации некоторых моделей им приходилось вычислять мнимые корни. Наиболее смелые из них исследовали поведение таких моделей комплексной переменной, как одно из интересных явлений в моделировании экономики, но и только. Практических рекомендаций и предложений по широкому использованию комплексной переменной из таких построений не следовало. Вот, например, В.А.Колемаев при рассмотрении однономенклатурной системы управления запасами как колебательным звеном предлагает решать дифференциальные уравнения[1], корни которых являются комплексными и сопряжёнными, модель в результате этого становится колебательной, но и только. Комплексные числа в этом примере скорее выступают как демонстрация возможностей математических методов, но не как инструмент моделирования экономики.

В экономической литературе известны попытки использования в моделировании экономики преобразования Лапласа, когда для моделирования сложных процессов, описываемых моделями действительных переменных, прибегают к их трансформации в модели комплексной переменной, работать с которыми оказалось проще. Решив задачу в области комплексных переменных, осуществляется обратное преобразование в область действительных переменных. И.З. Мустаев, например, применяет преобразование Лапласа к моделированию чистой приведённой стоимости денежного потока. В итоге получается комплексная переменная, действительная часть которой, по мнению автора, имеет экономический смысл среднерыночной доходности в пересчёте на один год[2], а мнимая – смысл частоты экономических процессов[3].

Z-преобразования Лорана применительно к задаче прогнозирования социально-экономической динамики как модификацию дискретного преобразования Лапласа, предлагает В.К.Семёнычев[4]. В этом случае модель нелинейного тренда преобразуется с помощью *z*-преобразования в модель ком-

[1] Колемаев В.А. Экономико-математическое моделирование. Моделирование макроэкономических процессов и систем. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. – С. 27-29.
[2] Мустаев И.З., Гизатуллин Х.Н. Экономико-математические основы управления конкурентоспособностью регионов. – М.: ЗАО «Издательство «Экономика», 2007. – С. 91.
[3] Там же, с. 93.
[4] Семёнычев В.К., Семёнычев Е.В. Информационные системы в экономике. Эконометрическое моделирование инноваций. Часть 1. – Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2006. - С. 101.

плексной переменной, с помощью чего достигается перепараметризация исходной модели, что облегчает задачу оценки коэффициентов исходного нелинейного тренда. Здесь аппарат ТФКП используется как инструмент, поддержки использования в экономике моделей действительных переменных.

Встречаются и иные отдельные примеры использования комплексных переменных для моделирования частных экономических задач. Но представление экономики как объекта для моделирования с помощью методов ТФКП ни в одной из этих работ не осуществляется.

Здесь следует отметить, что в естественно-научных и инженерно-технических науках без комплексных переменных сегодня вообще немыслимо что-либо рассчитать. Задачи гидродинамики и газовой динамики, теория упругости, расчёт электрических контуров и электрических переходных процессов, физика микро- и макромира, авиастроение, самолётостроение и многие, многие другие разделы современной науки используют комплексные переменные как основной математический инструмент моделирования. А в экономике его нет.

Примерно сотню лет назад учёные начали использовать теорию функций комплексных переменных для описания неравномерных полей, для моделирования сложных потоков, для описания вращающихся полей и стали получать модели комплексных переменных, которые значительно проще описывают сложные объекты и явления, нежели модели действительных переменных. Теория функций комплексного переменного дала учёным удобный инструмент моделирования сложных объектов, но экономисты до сих пор игнорируют мощь и богатство инструментария этой теории.

Думаю, что вызвано это, в первую очередь, привычкой использования ряда общенаучных методов и принципов исследования, таких как метода аналогии и принципа простоты.

Принцип простоты учит использовать простые модели, если нет необходимости использовать более сложные; а метод аналогии упорно ведёт учёных, задумывающихся над самой возможностью использования теории функции комплексного переменного (ТФКП) в экономике, к поиску вращающихся полей и экономическому смыслу действительной и мнимой составляющих комплексной переменной. Поскольку исследовать модель вечно живущего индивида удобно - никакие результаты этой модели не повлекут за собой никаких последствий для экономической практики, но с такими моделями можно проводить многочисленные модельные эксперименты, получать самые разные траектории вычисляемых переменных, и давать им самые разные названия из области экономических понятий, то некоторые учёные считают, что ситуация с инструментарием моделирования экономики является удовлетворительной, и нет оснований «умножать сущности сверх надобности» - достаточно использовать тот математический аппарат, который есть в их распоряжении.

А если попытаться методом аналогий найти ситуации в экономике, когда модели комплексных переменных будут описывать экономические процессы подобно, например, переходным процессам, протекающим в электрических цепях переменного тока с вращающимися электромагнитными полями, то таких ситуаций в экономике не найти.

Учёные, занимающиеся экономико-математическим моделированием, проходят мимо очевидного факта – комплексная переменная сама по себе может рассматриваться как модель, модель, которая характеризует свойства объекта более комплексно, поскольку состоит из двух действительных переменных, а не из одной, как это характерно для моделей действительных переменных.

Когда мы в экономике рассматриваем такой экономический показатель, как, например, валовая прибыль *G*, то мы понимаем, что он представляет возможность оценить только одну сторону сложного экономического явления – результаты производственного процесса. Не случайно, когда возникает ситуация принятия решений, никто не довольствуется только критерием максимума валовой прибыли, для осмысления ситуации и принятия правильного решения изучают дополнительные показатели результатов производства. Это только в современной экономической теории объясняют поведение фирмы, ориентируясь на критерий максимума валовой прибыли. В реальной экономике в качестве не менее важного экономического показателя рассматривают показатели затрат на производство продукции, или, как чаще выражались в прежние годы – издержки производства *C*. А потом, соотнеся валовую прибыль с издержками производства, вычисляют, например, рентабельность. Поскольку именно рентабельность является тем экономическим показателем, который отражает и затраты, и результаты, то есть, является показателем экономической эффективности производства, его используют как ещё один дополнительный показатель для принятия экономического решения.

В реальной экономической практике, описывая с помощью моделей действительных переменных некоторый производственный процесс, для принятия решения учёные вынуждены моделировать и валовую прибыль, и издержки производства. Поскольку построение двух моделей не очень удобно и более затратно, строят одну модель, складывая валовую прибыль с издержками, в результате чего получают валовой выпуск. Именно валовой выпуск и рассматривается в экономико-математическом моделировании как основной производственный результат.

Желание одновременного моделирования двух экономических переменных – валовой прибыли и издержек производства легко удовлетворяется, если рассматривать производственный результат как комплексное число. Это комплексное число в таком случае само по себе выступает как модель, отражающая результаты производства. Для рассматриваемого случая она может быть представлена в таком виде:

$$Z = G + iC. \qquad (1.1.1)$$

Здесь i – мнимая единица, относительно которой известно, что она обладает свойством $i^2=-1$.

Рассматривая и моделируя новое число *Z*, мы тем самым одновременно учитываем и валовую прибыль *G*, и издержки производства *C*, поскольку они являются неотъемлемыми характеристиками комплексного числа. То есть, выполняя действия с какой-либо одной комплексной переменной, исследователь выполняет тем самым действие с двумя действительными переменными. Следовательно, использование комплексной переменной типа (1.1.1) как некоторой модели, связывающей воедино две экономические переменные, позволяет получить значительно более компактную запись, с одной стороны, и включить в экономико-математическую модель более подробную информацию о моделируемом объекте, с другой стороны, и рассматривать их во взаимосвязи - с третьей стороны.

Но если бы только на этом заканчивались новшества, вводимые в экономико-математическое моделирование применением комплексных переменных, то, может быть, этого делать и не стоило. Моделируемые с помощью комплексных переменных экономические показатели и процессы значительно более обширны, чем это кажется на первый взгляд. Действительно, если просто просуммировать вещественную и мнимую части переменной (1.1.1), то можно получить известный показатель - валовую выручку:

$$Q = G + C, \qquad (1.1.2)$$

а если найти отношение действительной части к мнимой, то получим арктангенс полярного угла комплексного числа (1.1.1) и… рентабельность по себестоимости:

$$r = \frac{G}{C}. \qquad (1.1.3)$$

То есть, моделируя поведение только одной комплексной переменной, исследователь тем самым получает возможность изучать характер изменения не только двух исходных переменных, но и ряда дополнительных показателей, являющихся производными от них. В рассматриваемом случае – получается моделирование сразу четырёх важных экономических показателей.

Но и это ещё не всё! Комплексное число может быть представимо не только в арифметической форме, но и в экспоненциальной и тригонометрической. А для этого, рассматривая комплексное число на комплексной плоскости, его представляют в полярных координатах. Оно характеризуется модулем и полярным углом. Модуль комплексного числа (1.1.1), определяемый как

$$R = \sqrt{G^2 + C^2}, \qquad (1.1.4)$$

не имеет аналогов в системе технико-экономического анализа, и переставляет собой новый экономический показатель, отражающий масштаб производства. Его использование на практике может расширить диагностический аппарат, например, такого раздела экономики, как анализ хозяйственной деятельности. Отношение валовой выручки Q к масштабу R также может дать дополнительную характеристику производства, свойства которой могут быть полезны при осуществлении экономического анализа. Такие примеры можно продолжать и продолжать. В каждом случае применения моделей комплексный переменных возникают всё новые и новые возможности для более подробного, более детального моделирования экономики.

Таким образом, даже простое представление экономических показателей и факторов в форме комплексного числа (1.1.1) уже даёт много новых возможностей для исследователя и экономико-математического моделирования. Но математические действия с комплексными числами дают результат, нетривиальный для действий с вещественными числами. Именно поэтому в математике существует раздел под названием «Теория функций комплексного переменного». Используя этот новый для экономики математический аппарат, тем самым расширяется инструментальная база моделирования экономики, поскольку модели комплексных переменных иначе описываются взаимосвязь между переменными, нежели модели действительных переменных. Зачастую происходит так, что очень сложные взаимосвязи между действительными переменными проще описать с помощью моделей и методов ТФКП, нежели с помощью моделей действительных переменных.

Конечно, как следует из разделов теории функций комплексного переменного, любая комплекснозначная функция в итоге может быть представлена как система двух функций действительных переменных, но эти функции действительных переменных чаще всего оказываются столь сложными, что их на практике и не применяют - простые модели комплексных переменных имеют очень сложные аналоги в области действительных переменных. В соответствующих разделах этой монографии такие примеры будут приводиться.

Почему же модели комплексных переменных при моделировании сложных процессов зачастую являются более предпочтительными, нежели модели действительных переменных? В чём «сакральный» смысл этого свойства?

Для ответа на этот вопрос обратимся к геометрической интерпретации каждого из чисел. Действительное число представляет собой точку на число-

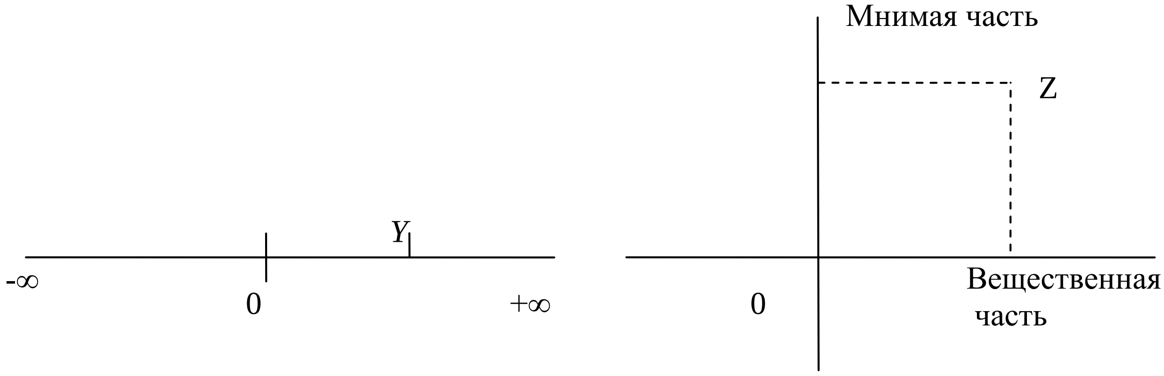


Рис. 1.1. Геометрическая интерпретация действительного (Y) и комплексного (Z) чисел

вой оси, имеющей нулевую точку и устремляющуюся в плюс бесконечность или минус бесконечность (рис. 1.1, точка Y). Это действительное число характеризуется расстоянием от нулевой точки до этого числа. Если число находится на числовой оси левее нулевой точки, оно будет отрицательным, а если оно находится на числовой оси правее нулевой точки, то оно будет положительным.

Комплексное число, как следует из его математической записи (1.1.1), представляет собой точку не на оси, а на комплексной плоскости. Поэтому для того, чтобы однозначно определить данную точку на комплексной плоскости одной характеристики не достаточно. Для этого необходимо использовать уже две координаты – отрезок на оси вещественной части и отрезок на оси мнимой части (рис. 1.1, точка Z).

Выполняя какие-либо математические действия с двумя действительными переменными, выполняются математические операции только с этими двумя переменными, а, выполняя аналогичные действия с двумя комплексными числами, например, умножая одно комплексное число на другое комплексное число, тем самым одновременно выполняется математическая операция сразу с четырьмя действительными числами.

Сразу следует оговориться, что вышесказанное вовсе не означает, что математические действия с комплексными переменными лучше, чем такие же действия с действительными переменными, а модели комплексных переменных лучше, чем модели действительных переменных. Нет! Всё вышесказанное следует трактовать только так – математические действия с комплексными экономическими переменными дают *другие* результаты, а математические модели комплексных экономических переменных моделируют *другие* экономические процессы. В некоторых случаях модели комплексных переменных будут лучше описывать экономические процессы, чем модели действительных переменных, а в некоторых – хуже.

Но именно представление пары экономических показателей в форме комплексного числа, как это сделано в случае производственного результата (1.1.1), открывает перед экономистами возможность использования в целях моделирования экономики теорию функций комплексного переменного. В этой теории функции, переменными которых выступают комплексные числа, получили названия «комплекснозначных». Поскольку разработанный и предложенный в этой монографии материал как раз и представляет собой применение теории функций комплексного переменного в экономико-математическом моделировании, то для общего определения этого нового раздела экономико-математического моделирования предлагается использовать краткое и ёмкое название – «комплекснозначная экономика».

Итак, *комплекснозначная экономика – это раздел экономико-математического моделирования, переменными которого выступают комплексные значения экономических показателей*.

1.2. Основные понятия теории функций комплексного переменного

Поскольку в экономико-математическом моделировании комплексные переменные не использовались как самостоятельные переменные, действия с которыми позволяют формировать оригинальные экономико-математические модели, то мало кто из экономистов знаком со свойствами этих переменных и основными правилами действий с ними. Поэтому в данном параграфе излагаются основные понятия теории функций комплексных переменных, без знания которых неподготовленному читателю комплекснозначная экономика будет не понятна. Читателям, знакомым с теорией функций комплексного переменного, этот параграф можно пропустить.

В математике довольно часто приходится сталкиваться с необходимостью решения задач, не имеющих корней в области действительных (вещественных) чисел, например, необходимо найти корень уравнения:

$$x^2 + 4 = 0 .$$

Решая это уравнение, получим такие корни

$$x_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{-16}}{2} = \pm 2\sqrt{-1}.$$

Очевидно, что в области действительных чисел это уравнение не имеет решения, поскольку квадратного корня из минус единицы в этой области не существует. Но, так как невозможность решения подобных задач приводит к существенному ограничению вычислительных возможностей, в математике было принято решение ввести так называемую «мнимую единицу», то есть число $i = \sqrt{-1}$. Квадрат этого числа, очевидно, будет равен минус единице: $i^2=-1$.

Тогда, уравнение, приведённое выше, имеет следующее решение, которое является мнимым:

$$x_{1,2} = \pm 2i.$$

С полученным мнимым числом уже можно работать дальше, как с решением приведённого выше квадратичного уравнения. Но корни квадратичного уравнения могут быть не только действительными или мнимыми. Они могут содержать в себе и действительную, и мнимую части. Например, если решить уравнение:

$$x^2 + x + 2,5 = 0,$$

то его корнями с учётом введённого понятия "мнимое число" являются два числа:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times 2,5}}{2}.$$

Первым корнем рассматриваемого уравнения является число $x_1 = 0,5 + 1,5i$, а вторым корнем этого уравнения является число $x_2 == 0,5 - 1,5i$.

Так как корни уравнения представляют собой число, состоящее из двух частей, в котором есть как действительная (вещественная), так и мнимая части, это число получило название "комплексного числа".

Таким образом, комплексное число представляет собой числовую пару, состоящую из двух частей – вещественной и мнимой:

$$Z = x + iy, \qquad (1.2.1)$$

где x – вещественная часть комплексного числа, iy- мнимая часть комплексного числа, x и y – вещественные (действительные) числа, i – мнимая единица, которая, как показано выше, удовлетворяет равенству:

$$i = \sqrt{-1} \text{ или } i^2 = -1. \qquad (1.2.2)$$

С комплексными числами можно выполнять все те же действия, что и с вещественными, но с учётом специфики свойств мнимой единицы, эти действия имеют оригинальный характер, часто не присущий операциям в области действительных чисел.

Основная проблема, с которой сталкивается экономист при представлении некоторого экономического показателя в виде комплексного числа, это - сложность экономической интерпретации мнимой части. Главный вопрос при этом можно сформулировать примерно так: а где в реальной экономической жизни встречаются мнимые числа вообще, и мнимая единица, в частности? И какой смысл имеет мнимая единица? Да никакого смысла она не имеет - ни экономического, ни физического. Мнимая единица – это математическое правило, только и всего.

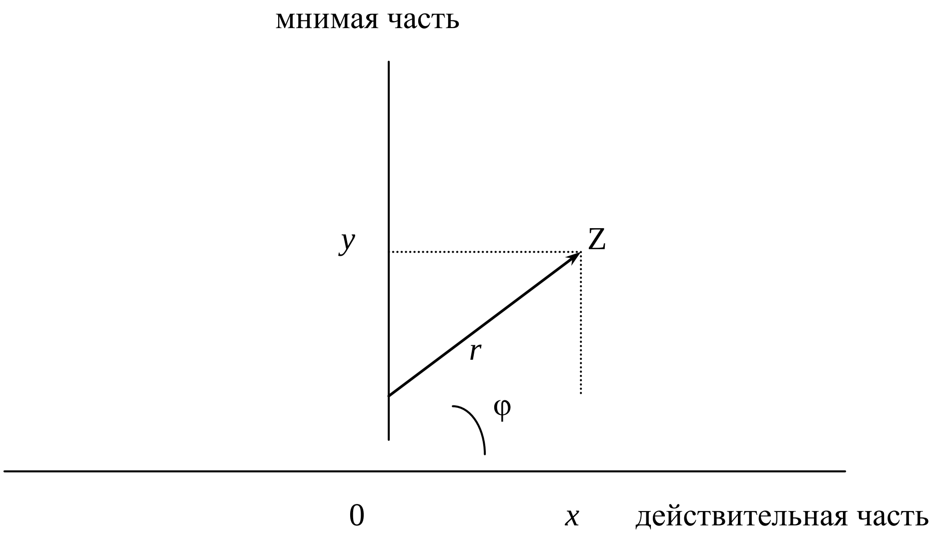
Где в реальной экономической жизни экономист встречается мнимыми числами и мнимой единицей? Нигде! Нигде он с ними не встречается. Ну а где в реальной экономической жизни экономист встречается, например с десятичным логарифмом? Также – нигде! Нет в окружающем нас мире ни десятичного логарифма, ни других логарифмов. Десятичный (или иной) логарифм – это математическое правило, с помощью которого оказалось очень удобно решать прикладные задачи, в том числе и в экономике. Точно также и с помощью мнимой единицы, которую как уже сказано, можно рассматривать как математическое правило, оказалось очень удобно решать целый класс прикладных задач в разных областях человеческой деятельности.

С помощью заданных условиями (1.2.1) и (1.2.2) правил, и появляется возможность использовать новые математические действия, получать новые математические результаты, и формировать новые математические модели. Сразу же следует указать, что ни в одной из областей естественнонаучного знания нет процессов, в которых появляются мнимые числа или мнимая единица. Комплексные числа – это математическая модель, которая может описывать некоторые реально существующие явления, а может их и не описывать. Если учёные решаются использовать комплексные переменные для моделирования реальных процессов, то они заранее устанавливают правила, в соответствии с которыми всегда одну составляющую сложного процесса относят к действительной части, а другую составляющую - к мнимой частям комплексной переменной.

Точно также и в экономике нет явлений, которые бы следовало отнести к действительной или мнимой частям комплексной переменной, как нет и явлений, в которых явно выделяются действительная и мнимая части. Мы, как и учёные в других областях науки, будем задавать правила, в соответствии с которыми появляется возможность представления экономических явлений в форме комплексных чисел и комплексных переменных. И в том случае, когда такое представление сложного социально-экономического объекта позволит более точно описать его свойства, будем использовать вместо моделей действительных переменных модели комплексной переменной или нескольких комплексных переменных.

Комплексное число можно представить графически так, как это было сделано на рис. 1.1. Представление числа на плоскости, а не на числовой оси, даёт ряд новых и весьма важных для дальнейшего использования в теории и на практике свойств комплексного числа, поэтому вновь обратимся к его графической интерпретации.

Поскольку в отличие от действительной переменной комплексная состоит из двух частей, то именно эти две части определяют комплексную плоскость. На графике рис. 1.2 нанесены эти две оси, которые по определению являются ортогональными – ось действительной части комплексного числа и ось мнимой части комплексного числа. Сразу же оговоримся, что перед нами плоскость декартовой системы координат, на осях которой откладываются вещественные числа *x* и *y*. Просто по горизонтальной оси будет откладываться действительная часть комплексной переменной, а по вертикальной – её мнимая часть.



Любая точка, лежащая на комплексной плоскости, определяемой указанными осями, представляет собой комплексное число, даже если эта точка лежит на оси вещественных чисел. Она в данном случае представляет собой комплексное число с нулевой мнимой частью.

Комплексное число (1.2.1) можно на плоскости декартовой системы координат рассматривать как вектор (рис. 1.2), который выходит из начала координат и заканчивается в точке (*x, y*). Тогда любое комплексное число можно представить в полярных координатах с помощью модуля вектора и полярного угла:

$$Z = x + iy = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right). \qquad (1.2.3)$$

Здесь φ – полярный угол (рис. 1.2), r – полярный радиус, который в данном случае получил название модуля комплексного числа (длина вектора). Модуль комплексного числа очевидно равен:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (1.2.4)$$

Полярный угол может быть найден как

$$\varphi = arctg\frac{y}{x} + 2\pi k, \qquad (1.2.5)$$

где *k*-целое число. Иногда полярный угол называют аргументом комплексного числа.

Два комплексных числа равны друг другу тогда и только тогда, когда равны друг другу их действительные и мнимые части. А это значит, что, например, такое равенство:

$$y_r + iy_i = f_r(x_r) + if_i(x_i)$$

можно рассматривать как более компактную форму записи системы уравнений:

$$\begin{cases} y_r = f_r(x_r), \\ y_i = f_i(x_i). \end{cases}$$

Тригонометрическая форма записи комплексного переменного особенно удобна для умножения комплексных чисел друг на друга. Пусть, например, помимо комплексного числа (1.2.3) имеется другое комплексное число:

$$w = \rho\left(\cos\psi + i\sin\psi\right).$$

Вычислим произведение одного комплексного числа *z* на другое комплексное число *w*, используя для этого их тригонометрическую форму. Опуская элементарный вывод, приведём итоговый результат:

$$zw = r\rho\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)\left(\cos\psi + i\sin\psi\right) = r\rho\left(\cos\left(\varphi+\psi\right) + i\sin\left(\varphi+\psi\right)\right).$$

Эта формула известна как формула Муавра, согласно которой модуль произведения комплексных чисел равен произведению модулей, а его аргумент – сумме аргументов сомножителей. Формула Муавра существенно облегчает такие операции с комплексными числами, как возведение в степень и извлечение корня из комплексного числа. Действительно, для того, чтобы найти, например, квадрат комплексного числа, необходимо возвести в квадрат его модуль, а полярный угол умножить на два.

В 1748 году Л.Эйлер в своей книге «Введение в анализ бесконечно малых» обосновал формулу, носящую его имя, а именно[1]:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \qquad (1.2.6)$$

С помощью формулы Эйлера любое комплексное число *Z* с модулем *r* и аргументом φ можно записать в следующей показательной форме (экспоненциальной форме):

$$z = re^{i\varphi}, \qquad (1.2.7)$$

Эта форма записи оказывается также очень удобной для перемножения двух комплексных чисел z_1 и z_2 и выполнения других операций. Действительно, воспользовавшись (1.2.7), вновь перемножим комплексное число *z* на другое комплексное число *w*:

$$z_1 \times z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \qquad (1.2.8)$$

Поскольку модуль комплексного числа может быть представлен в экспоненциальной форме:

$$r = e^{\ln r},$$

то комплексное число (1.2.7) может быть представлено в другом виде, а именно:

$$z = e^{\ln r + i\varphi},$$

что позволяет вычислять логарифмы комплексного числа.

[1] Эйлер Л. Введение в анализ бесконечно малых. Т.1. – М: Госиздат физико-математической литературы, 1961. - С. 118-119.

С учётом того, что аргумент комплексного числа (1.2.5) определяется с точностью до слагаемого, кратного 2π, логарифм комплексного числа z можно легко вычислить так:

$$\ln z = \ln(e^{\ln r + i\varphi}) = \ln r + i\varphi + 2\pi k \qquad (1.2.9)$$

То есть, логарифм комплексного числа - функция периодическая. Обычно на практике используют главное значение логарифма, принимая k=0.

Полярный угол комплексного числа φ для краткости называют аргументом комплексного числа и обозначают его так:

$$\varphi = \operatorname{Arg} z \qquad (1.2.10)$$

Аргумент комплексного числа определяется не однозначно, а с точностью до слагаемого, кратного 2π:

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k \qquad (1.2.11)$$

где k – целое число, а argz есть главное значение аргумента, определяемое условием:

$$-\pi < \arg z \le \pi\,. \qquad (1.2.12)$$

Для краткости и формализации формулировки математических задач сокращают название и действительной части комплексного числа z, обозначая её как Re(z). Мнимую часть комплексного числа z обозначают как Im(z). С учётом этих обозначений может быть, например, легко задана некоторая область на комплексной плоскости z, множество точек которой удовлетворяет условию:

$$\operatorname{Im} z^3 > 4{,}5\,.$$

Для нахождения этой области надо найти мнимую часть комплексной переменной (z^3), а затем подставить найденное значение в указанное неравенство. Кстати говоря, описать множество точек на плоскости, определённое вышеуказанным неравенством, с использованием, например, декартовой системы координат с применением действительных чисел представляет собой значительно более трудоёмкую задачу и будет представлять собой систему нескольких нелинейных неравенств. Компактность представления этой задачи с помощью комплексных переменных очевидна.

Комплексная плоскость состоит из различных областей, на которых может быть определена функция комплексного переменного. Говорят, что задана функция комплексного переменного

$$w = f(z), \qquad (1.2.13)$$

если указан закон, по которому каждой точке z из множества допустимых значений ставится в соответствие определённая точка или совокупность точек w. В первом случае, когда имеется соответствие одной точке, функция (1.2.13) называется однозначной, во втором, когда каждой точке из z соответствует множество точек из w, функция называется многозначной[1].

[1] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1965. - С. 19

Если положить $z = x + iy$ и $w = u + iv$, то задание функции комплексного переменного $w = f(z)$ будет равносильно заданию двух функций двух действительных переменных:

$u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$. (1.2.14)

Воспользовавшись теорией комплексных чисел, можно связать функциональной зависимостью любую пару действительных чисел. Ситуации, когда в экономике можно поставить в функциональное соответствие друг другу пару значений, встречаются достаточно часто.

Так например, результатами любой производственной деятельности могут выступать такие показатели, как суммарные затраты на производство (издержки) *C* и валовая прибыль *G*. Тогда комплексную переменную производственных результатов можно представить в таком виде:

G+iC.

Производственные ресурсы, используемые на реальных хозяйствующих субъектах, многообразны. Однако всё их многообразие в теории производственных функций сводится к двум ресурсам: капитальным *K* и трудовым *L*, которые также можно представить в качестве одной комплексной переменной:

K+iL.

Мы пока не обсуждаем вопрос о том, какие переменные отнести к действительным или мнимым частям комплексных переменных. Это будет сделано позже. Важно, что с помощью мнимой единицы мы имеем возможность связать в одно комплексное число два экономических показателя. Именно такое представление экономических показателей производства позволяет говорить о том, что модель, связывающая производственные ресурсы с производственными результатами, может иметь вид функции комплексных переменных:

G+iC=f(K+iL). (1.2.15)

Любая модель, которая генерируется зависимостью (1.2.15), будет описывать с той или иной степенью точности реальный производственный процесс. Причём будет делать это иначе, чем это делают модели действительных переменных.

Помимо этих пар значений в экономике можно выделить и иные пары экономических показателей, связывая которые воедино мнимой единицей, мы получим комплексные экономические переменные, математические действия с которыми нам дадут иные результаты, чем те, которые имеют экономисты сегодня, используя модели действительных переменных.

Чаще всего в экономике несколько показателей (более двух) зависят от нескольких факторов (более двух). Поэтому очень хотелось бы промоделировать эту зависимость, то есть связать некоторым математическим уравнением совокупность экономических показателей с совокупностью факторов, оказывающих воздействие на них - использовать гиперкомплексные числа. Но попытка ввести систему чисел, содержащую три единицы, не дала положительных результатов[1]. Удалось построение системы чисел с четырьмя мнимыми единицами. В этом случае получается так называемая система кватернионов, то есть чисел вида:

$$A = a + ib + jc + kd, \quad (1.2.16)$$

где a,b,c,d – вещественные числа, i, j, k - мнимые единицы.

Действия с кватернионами имеют сложный характер, который не позволяет их использовать в каких-либо практических целях, и до сих пор остаётся областью идеализированных исследований. В поле кватернионов не выполняется, например, свойство коммутативности умножения, что приводит к многочисленным курьёзам. Так, для уравнения:

$$x^2 + 1 = 0$$

имеется бесконечное множество корней:

$$X = ip + jq + kr, \text{ где } p^2 + q^2 + r^2 = 1.$$

Поэтому вполне очевидное желание описать зависимость некоторого комплексного показателя, представленного в виде кватерниона (1.2.16), от другого экономического показателя, представленного в виде другого кватерниона, пока что не осуществимо.

В данной работе мы будем использовать только комплексные числа типа (1.2.1) или рассматривать функции комплексного переменного (1.2.13). При необходимости будем использовать выводы и предложения теории функции комплексного переменного.

Последнее важное свойство комплексных переменных, о котором здесь следует упомянуть, это понятие бесконечности. Для действительных переменных оно очевидно (рис. 1.1). Когда числовая ось устремляется неограниченно вправо в области положительных чисел, это означает плюс бесконечность. Если же числовая ось устремляется влево от нулевой точки в область отрицательных чисел, то это означает стремление к минус бесконечности. Если попытаться таким же образом определить бесконечность для комплексной переменной, то мы потерпим фиаско, поскольку комплексное число представляется не на числовой оси, а на комплексной плоскости и в бесконечность уходит каждая из осей, определяющих комплексную плоскость. Причём ось действительных чисел имеет как плюс бесконечность, так и минус бесконечность, точно также как и ось мнимых чисел. Как же тогда определить бесконечное комплексное число?

Ответ на этот вопрос дал Б.Римман. Рассмотрим сферу S, касающуюся комплексной плоскости в нулевой точке2. Обозначим через P точку сферы S, противоположную нулевой точке. Каждой точке z комплексной плоскости поставим в соответствие точку M, которая является точкой пересечения сферы S с отрезком, соединяющим точки z и P. При этом последовательности $\{z_n\}$, сходящейся к бесконечности, соответствует последовательность точек

[1] Малая математическая энциклопедия. – Издательство Академии наук Венгрии, Будапешт, 1976. - С. 60.
[2] Шабунин М.И. Теория функций комплексного переменного. – М.: ЮНИМЕДИАСТАЙЛ? 2002. - С. 19

сферы S, сходящаяся к точке P. Поэтому точке $z=\infty$ ставится в соответствие точка P на сфере Римана.

1.3. Аксиоматическое ядро теории комплекснозначной экономики

Любая теория базируется на некоторых исходных положениях, принимаемых без доказательства. Первая группа таких исходных положений является аксиомами, которые, как известно, принимаются без доказательства в силу их очевидности. Вторая группа представляет собой постулаты, которые являются выводами, полученными в других разделах науки и поэтому принимаемые без доказательства, поскольку это уже сделано ранее другими исследователями.

В теории комплекснозначной экономики будем постулировать положения теории функций комплексной переменной, приводя её основные рекомендации и выводы без доказательства, поскольку каждый сомневающийся в них всегда может обратиться к имеющимся в изобилии учебным и научным работам по этому разделу математики.

Постулироваться также будут основные выводы теоретической экономики или прикладных разделов экономики. Нам незачем доказывать, например, наличие взаимосвязи между сдельным заработком рабочего и производительностью его труда – это сделано в разделе экономической науки, который относится к сфере управления трудом.

Приведём те положения, которые сегодня кажутся очевидными и не требуют в силу этого доказательства, то есть, являются аксиоматичными, и без опоры на которые комплекснозначная экономика, как теоретическое построение существовать не может.

Первое аксиоматическое положение заключается в том, что практически все экономические показатели, по которым экономист судит об экономике, представляют собой некоторые обобщённые или агрегированные величины, которые могут быть легко представимы в виде суммы двух слагаемых, которые с определённой степенью уверенности можно назвать как «активная часть» и «пассивная часть». В основе такого представления лежат многочисленные классификации, принятые в экономике.

Например, трудовые ресурсы любого предприятия можно, в соответствии с приведённым признаком классификации, разделить на активную часть (промышленно-производственный персонал) и пассивную часть (не производственный персонал). Или расходы любой семьи можно разделить на активную часть, связанную с непосредственным удовлетворением имеющихся потребностей, и пассивную часть, связанную с удовлетворением будущих потребностей. То же самое можно сказать и про разделение конечного продукта любой страны, который можно представить в виде двух составляющих – потребления (активная часть) и накопления (пассивная часть).

А поскольку активная и пассивная части некоторого показателя или фактора оказывают различное влияние на другие экономические показатели, то их общее влияние вполне логично представить в виде комплексной переменной, к действительной части которой мы договоримся относить активную составляющую, а пассивную отнесём к мнимой части комплексной переменной.

Как уже упоминалось ранее, в электроэнергетике, например, при моделировании переменного тока, к действительной части комплексной переменной относят активную часть, а к мнимой – реактивную. Переменные токи возникают в ситуации вращающегося электромагнитного поля, которое наводит в проводнике переменные - электрический ток, напряжение, мощность и энергию. Передача электроэнергии по некоторым цепям встречает активное и реактивное сопротивление. Казалось бы – вот оно смысловое содержание действительной и мнимой частей комплексной переменной. Но на самом деле отнесение активной части электроэнергетических показателей к действительной части комплексной переменной, также как отнесение реактивных составляющих к мнимой части условно – с таким же успехом их можно поменять местами, а именно – активную мощность отнести к мнимой части, а реактивную – к действительной. Да и сами понятия «активная часть» и «реактивная часть» являются некоторым правилом, предварительной договорённостью между учёными. Если, например, активный ток отнести к мнимой части комплексной переменной, а его реактивную составляющую – к действительной части, то есть сделать всё наоборот, нежели это принято в электроэнергетике в настоящее время, то вид применяемых математических моделей несколько изменится, а процесс вычислений и, самое главное, их результаты – нисколько не изменятся. Просто при первом использовании теории функций комплексных переменных в электроэнергетике учёные договорились о том - что и к какой части они отнесут, и с этим *ПРАВИЛОМ* все согласились и сегодня уже такая интерпретация ни у кого не вызывает сомнений до такой степени, что некоторый учёные всерьёз считают, что реактивная часть электромагнитной мощности, например, по своим физическим свойствам в точности соответствует мнимой части комплексной переменной. Конечно, это не так.

Вот и мы в теории комплекснозначной экономики сразу же договоримся о том, что в комплекснозначной экономике будет действовать *ПРАВИЛО*, в соответствии с которым активную часть экономического показателя будем относить к действительной части комплексной переменной, а пассивную часть – к мнимой.

Теперь следует сказать о нескольких важных условиях, ограничивающих область применения комплексных чисел в экономике. Для того чтобы использовать аппарат теории функций комплексных переменных в экономике, при объединении двух экономических показателей в одну комплексную переменную, должны выполняться следующие очевидные условия, определяемые особенностями комплексных чисел:

1. Эти показатели должны быть двумя характеристиками одного и того же процесса или явления, то есть – отражать разные стороны этого явления;

2. Они при этом должны ещё иметь и одинаковую размерность или быть безразмерными. К тому же, у них должен быть одинаковый масштаб.

Почему необходимо учитывать первое условие, ведь по правилам, действительная и мнимая части являются независимыми (ортогональными) друг от друга? Необходимо ли их рассматривать как «две стороны одной медали»? Да необходимо. И необходимо это потому, что в итоге формирования комплексной переменной из двух действительных переменных, она в дальнейшем рассматривается как самостоятельная единая переменная. Она, образно выражаясь, несёт в себе информацию о двух составляющих её величинах и отражает влияние каждой из своих составляющих на некоторый результат. Эти величины должны отражать разные стороны одного и того же явления, иначе их объединение в одну переменную теряет всякий смысл. Эти переменные могут находиться в тесной функциональной зависимости друг от друга, а могут быть и вовсе независимыми, но главное условие – они должны нести в себе информацию о некотором общем для них процессе. Такие характеристики комплексного числа как его модуль и аргумент имеют смысл только тогда, когда составляющие комплексного числа отражают общее содержание.

Второе условие, требующее одинаковой размерности составляющих комплексной переменной, определяется особенностью свойств комплексного числа. Действительно, как например, можно рассчитать модуль комплексного числа (1.2.4), если действительная и мнимая части имеют разные размерности, например, рубли и штуки? Возвести в квадрат каждую из них и сложить не представляется никакой возможности – руб^2 нельзя сложить со шт^2. Точно также и при вычислении полярного угла необходимо найти отношение мнимой части к действительной, а потом найти арктангенс полученного числа. Если действительная и мнимая части разноразмерные, то ничего поделать нельзя, ведь тангенс угла – величина безразмерная, она не может измеряться в *руб/шт*.

В экономике существенная часть показателей может быть приведена к денежным единицам измерения, например, затраты труда можно определить не в «человеко-часах», а в стоимости оплаты труда – величиной фонда оплаты труда на предприятии или подразделении предприятия. Поэтому это условие в большей части реальных экономических задач вполне выполнимо. Но в том случае, когда это сделать невозможно, каждый из показателей следует привести к относительным безразмерным величинам способом, который окажется наилучшим для выбранной формы модели.

1.4. Базовая модель комплекснозначной экономики

Экономико-математические модели, оперирующие действительными переменными, основаны на том, что некоторый экономический показатель y представляется зависимым от другого показателя x. Эта зависимость может быть описана с помощью функции, когда показателю x ставится в соответствие один и только один показатель y:

$$y = f(x). \qquad (1.4.1)$$

Поскольку каждая из переменных функции (1.4.1) является совокупностью действительных чисел, графически изображаемых множеством точек на числовой оси, проходящей через нулевую точку от минус бесконечности до плюс бесконечности, а расстояние от нуля до данной точки количественно в избранном масштабе и отражает само число, то модель (1.4.1) выражает то обстоятельство, что каждой точке на оси действительной переменной x соответствует одна и только одна точка на другой оси действительной переменной y. Графически эти две оси можно расположить на одной плоскости в любом порядке, например, параллельно друг другу. Но наибольшую информативность представляет такое расположение этих числовых осей, когда они пересекаются друг с другом под прямым углом (перпендикулярны друг другу), а точкой их пересечения является общая на каждой из осей нулевая точка. В этом случае можно рассматривать модель (1.4.1) в декартовой системе координат.

Модель (1.4.1) можно усложнять как это заблагорассудится, добавлять в неё новые переменные и делать её многофакторной. Тогда показатель y будет зависеть от нескольких переменных, а график такой зависимости будет уже трёх-, четырёх- и вообще – многомерным, в зависимости от количества переменных.

Функция (1.4.1) является базовой для построения моделей в области действительных переменных, а её графическая интерпретация на плоскости декартовой системы координат выступает дополнительной характеристикой функции.

Точно так же в комплекснозначной экономике рассматривается базовая модель зависимости одной комплексной переменной от другой. Зная свойства этой зависимости, можно определить, какие именно процессы могут быть описаны с помощью неё, а также переходить к многофакторным комплекснозначным моделям и к системам комплекснозначных моделей. Правда, многофакторные комплекснозначные модели и системы комплекснозначных уравнений пока ещё не столь распространены, как их аналоги в области действительных переменных.

Сама базовая модель представляет собой функциональную зависимость одной комплексной переменной y_r+iy_i от другой комплексной переменной x_r+ix_i:

$$y_r + iy_i = f(x_r + ix_i). \qquad (1.4.2)$$

В теории функций комплексных переменных такая функция называется комплекснозначной.

Поскольку любая комплексная переменная представляется графически точкой на плоскости декартовой системы координат, то равенство (1.4.2) означает, что одной точке на комплексной плоскости переменных x ставится в соответствие точка (а в некоторых случаях – несколько точек) на комплексной плоскости переменных y. Это соответствие изображено на рис. 1.3.

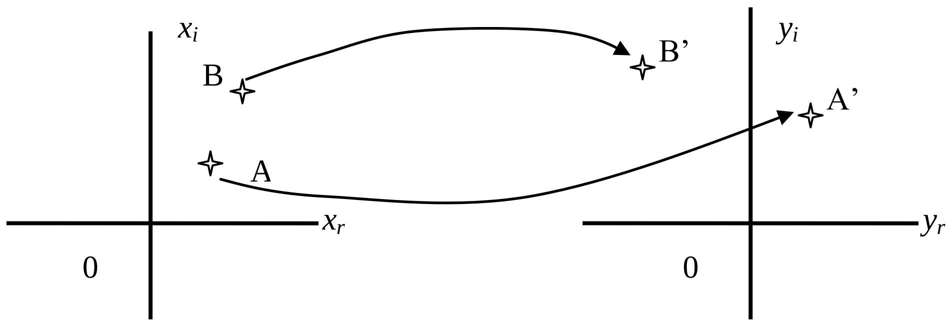


Рис. 1.3. Конформное отображение точек комплексной плоскости x на комплексную плоскость y

Слева на этом рисунке изображена комплексная плоскость переменных x, на которую нанесены две точки, обозначенные буквами A и B. Каждой из этих точек соответствует по правилу (1.4.2) некоторая точка на плоскости комплексных переменных y. Точке A соответствует точка A', а точке B соответствует точка B'. Таким образом, любое множество точек на комплексной плоскости x с помощью комплекснозначной функции (1.4.2) отображается на комплексную плоскость y. Поэтому графическое изображение комплекснозначной функции принято называть конформным отображением. Такое понятие вполне устраивает нас для целей данного научного исследования, хотя, если использовать чёткое математическое определение конформного отображения, то тогда надо использовать, например, такое определение: *отображение окрестности точки x_0 на окрестность точки y_0, осуществляемое функцией (1.4.2), называют конформным, если в точке x_0 оно (отображение) обладает свойством сохранения углов между линиями и постоянством растяжений*[1]. Это означает, что не всякое отображение точек одной комплексной плоскости на другую плоскость с помощью функции (1.4.2) будет конформным, а только такое, при котором кривые на первой плоскости переходят в кривые другой плоскости так, чтобы угол между касательными к этим кривым на первой плоскости соответствовал некоторому углу к касательным на второй плоскости, а бесконечно малому кругу с центром в точке x_0 первой плоскости соответствовал бесконечно малый круг второй комплексной плоскости с центром в точке y_0. Комплекснозначные функции, ко-

[1] Краснов М.Л., Киселёв А.И., Макаренко Г.И. Функция комплексного переменного: Задачи и примеры с подробными решениями. – М.: Едиториал УРСС, 2003. - С. 123.

торые будут использованы в данной работе, этим свойством обладают, поэтому и будем рассматривать конформное отображение, как графическую интерпретацию функциональной зависимости между двумя комплексными переменными.

Если каждой точке на комплексной плоскости x с помощью комплекснозначной функции (1.4.2) ставится в соответствие одна и только одна точка на комплексной плоскости y, то такое конформное отображение называется однолистным. Но в теории функций комплексного переменного часто встречаются случаи, когда каждой точке комплексной плоскости x с помощью комплекснозначной функции (1.4.2) ставится в соответствие несколько точек на комплексной плоскости y. Функция такая, как уже говорилось, называется многозначной, а графическое изображение конформного отображения называется многолистным. Более подробно явление многолистности будет рассмотрено ниже в разделе, где многолистность проявляется как свойство комплекснозначной функции.

Из рис. 1.3 легко убедиться в том, что графическая наглядность функций комплексных переменных уступает наглядности функциям действительных переменных. Там, где экономист, изучая эмпирические данные, использует графический анализ соответствия действительных переменных друг другу, он получает представление о типе и направлении этой взаимосвязи, точно зная, какой вид имеет линейная зависимость, квадратичная, экспоненциальная и т.п.

Если же он попытается изучать конформное отображение одной реальной изменяющейся комплексной переменной с помощью некоторой функции на плоскость другой комплексной переменной и будет это делать графически, то чаще всего он никакого представления о взаимосвязи между комплексными переменными он не получит.

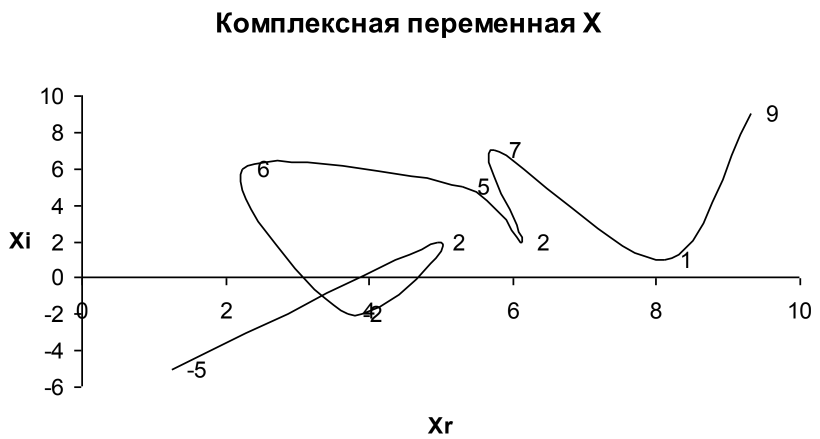


Рис. 1.4. Некоторое изменение комплексной переменной x.

Так, например, на графике рис. 1.4 представлено некоторое изменение комплексной переменной $x=x_r+ix_i$. А на рис. 1.5 представлено изменение другой комплексной переменной $y=y_r+iy_i$.

Исследователю известно, что между этими двумя комплексными переменными существует некоторая взаимосвязь, характер которой ему не известен. Перед ним стоит задача - определить: какой вид комплекснозначной функции следует применить для моделирования этой взаимосвязи?

Визуальное сравнение графиков рис. 1.4 и 1.5 создаёт устойчивое впечатление о том, что если и имеется зависимость между этими двумя комплексными переменными, то эта зависимость носит сложный нелинейный характер.

Рис. 1.5. Изменение комплексного показателя *y*, соответствующее изменению комплексного показателя *x* рис. 1.4.

Но на самом деле, перед нами простая линейная комплекснозначная функция вида:

$$y_r + iy_i = (1+i)(x_r + ix_i).$$

Этот пример наглядно показывает сложность использования функций комплексной переменной на практике, по крайней мере в той её части, когда требуется графическая интерпретация происходящих процессов.

Но, с другой стороны, в экономике чаще всего при моделировании приходится иметь дело с гладкими тенденциями изменения показателей, поэтому, например, плавная тенденция изменения одного комплексного показателя *x* будет трансформироваться в плавную тенденцию другого комплексного показателя *y*, если между ними есть та же самая линейная зависимость, которая на графиках рисунков 1.4 и 1.5 никак не выявлялась визуально.

Базовую модель (1.4.1), в соответствии со свойствами комплексных чисел, можно представить как систему двух равенств действительных переменных:

$$\begin{cases} y_r = f_r(x_r; x_i) \\ y_i = f_i(x_r; x_i) \end{cases} . \qquad (1.4.3)$$

Например, простейшая линейная комплекснозначная функция

$$y_r + iy_i = (a_0 + ia_1)(x_r + ix_i) \qquad (1.4.4)$$

может быть представлена в виде системы двух равенств:

$$\begin{cases} y_r = a_0 x_r - a_1 x_i \\ y_i = a_0 x_i + a_1 x_r \end{cases} . \qquad (1.4.5)$$

Откуда следует вывод о том, что изменение одного из показателей комплексной переменной *x* ведёт к изменению как действительной, так и мнимой частей комплексной переменной *y*. То есть, комплекснозначные функции по определению являются многофакторными.

В области действительных переменных мы также встречаем многофакторные модели, например:

$$y = 5 + 3x_1 + 2x_2 . \qquad (1.4.6)$$

Но если в области действительных переменных для модели (1.4.6) поставить задачу: для заданного значения y^* найти пару значений влияющих переменных (x_1,x_2), то эта задача не имеет единственного решения, поскольку из равенства (1.4.6) при известном значении y^* можно получить уравнение с двумя неизвестными:

$$3x_1 + 2x_2 = y^* - 5 . \qquad (1.4.7)$$

Для комплекснозначной функции (1.4.2) такая задача (при отсутствии многолистности) легко решается, например, для линейной функции (1.4.4) при известных значениях y_r^* и y_i^* можно легко найти одну единственную пару значений комплексной переменной х:

$$x_r + ix_i = \frac{y_r^* + iy_i^*}{a_0 + ia_1} \qquad (1.4.8)$$

Например, если предприятие собирается найти наилучшее сочетание производственных ресурсов для получения заданного значения прибыли, в области действительных переменных необходимо решать оптимизационную задачу, а в комплекснозначной экономике – построить обратную функцию так, как это сделано в (1.4.8).

Частным случаем базовой модели (1.4.2) выступает модель комплексного аргумента:

$$y_r = f(x_r + ix_i) . \qquad (1.4.9)$$

Эту модель в общем виде можно представить как комплекснозначную функцию, у которой мнимая часть равна нулю:

$$y_r + i0 = f(x_r + ix_i) . \qquad (1.4.10)$$

То есть – это функция действительных переменных, но представленная в комплекснозначной форме. Для целого ряда экономически задач интерес представляет обратная функция:

$$x_r + ix_i = f(y). \qquad (1.4.11)$$

Это – функция комплексных переменных с действительным аргументом. Простым примером такой функции может служить функция вида:

$$x_r + ix_i = y^{a_0 + ia_1}. \qquad (1.4.12)$$

Здесь изменение одной переменной определяет одновременное изменение двух переменных. Если моделировать такую ситуацию с помощью моделей действительных переменных, необходимо использовать систему двух уравнений. Компактность моделирования сложных процессов – очевидное преимущество комплекснозначной экономики, но не единственное.

1.5. Некоторые сведения о геометрии Минковского

Комплексные переменные «открывают дверь» в удивительный мир возможных представлений об окружающем мире и его моделей. Вся сила этого математического аппарата проявляется в теоретической физике, особенно в той ей части, которая посвящена теории относительности. Графическую интерпретацию искривления пространства и «замедления» или «ускорения» времени даёт физику именно применение теории функций комплексного переменного. И связана эта интерпретация с именем Минковского – выдающегося математика из Кёнигсберга.

Поскольку этот инструмент может быть использован и в экономике, то в первой главе монографии, которая содержит в себе методологические основы комплекснозначной экономики, следует рассмотреть и геометрию Минковского[1]. Первый удачный опыт применения свойств геометрии Минковского для решения экономических задач был осуществлён И.С.Светуньковым для целей проверки адекватности моделей реальному объекту. Основные результаты этого подхода изложены в параграфе 3.7.

Прежде всего, следует заметить, что до сих пор комплексное число $y_r + iy_i$ мы рассматривали на евклидовой плоскости, то есть на плоскости, по осям абсцисс и ординат которой откладываются действительные числа. Не случайно на вертикальной оси евклидовой плоскости мы писали «мнимая часть» или «iy_i», как это сделано на рис. 1.6. Мнимое число мы изображали с помощью действительного числа.

[1] Сазанов А.А. Четырёхмерный мир Минковского. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988.

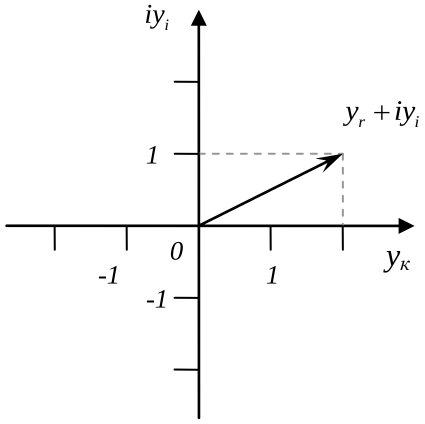


Рис. 1.6. Комплексное число на евклидовой плоскости

То есть, комплексное число, состоящее из действительной и мнимой частей, мы представляли как действительное число в векторной форме. Тогда в чём разница между комплексным числом и двумерным вектором? И имеет ли смысл использовать теорию функций комплексного переменного, когда можно использовать, например, векторную алгебру? В такой геометрической интерпретации подобные вопросы очевидны, а простых однозначных ответов на них нет.

Для того чтобы понять всю мощь аппарата теории функций комплексной переменной, следует перейти от евклидовой к псевдоевклидовой комплексной плоскости. Для этого по горизонтальной оси этой плоскости будем откладывать действительное число (вещественную часть комплексной переменной), а по вертикальной – мнимое число (мнимую часть комплексной переменной). Тогда перед нами будет действительно комплексная плоскость (рис. 1.7) и точки на ней будут иметь совсем иную интерпретацию, нежели точки евклидового пространства. Существенное отличие этой плоскости от евклидовой плоскости (рис.1.6) заключается в следующем. В евклидовой плоскости масштаб каждой из её осей (абсцисс и ординат) определяется единичным отрезком. По горизонтальной оси вправо от нулевой точки откладывается отрезок «*+1*», влево – «*-1*». Точно также и по вертикальной оси: вверх от нуля откладывается «*+1*», вниз – «*-1*». Тогда координаты единичной точки будут (*1;1*).

Но ведь комплексное число состоит из действительной и мнимой частей и комплексная единица должна иметь координаты (*1;i*), поэтому по горизонтальной оси надо откладывать действительные числа, а по вертикальной – не «*+1*» или «*-1*», а мнимые числа. Тогда на комплексной плоскости на горизонтальную ось откладываем вправо от нуля единичный отрезок «*+1*», а влево от нуля в отрицательную область – «*-1*», а вот на вертикальной оси плоскости наносится вверх «*+i*», а вниз от нуля – «*-i*». Тогда любая мнимая составляющая комплексного числа будет откладываться по этой оси так: надо *i* умножить на *y* ровно *y* раз. Принципиальное отличие в геометрической интерпретации заключается в том, что расстояния на этой псевдоевклидовой комплексной плоскости будут изображаться совсем не так, как на евклидовой, а, значит и кривые будут изображаться иначе.

Зададим простой вопрос: какое расстояние имеет вектор, проведённый от нулевой точки до точки, соответствующей комплексному числу $y_r + iy_i$?

Или, иначе говоря: какую длину он имеет? Вполне очевидный ответ окажется не верным. Длина вектора, проведённого из нулевой точки к данной точке не характеризует расстояние, как это есть на евклидовой плоскости. Правильный ответ на поставленный вопрос следует из его математического решения. Поскольку это расстояние по определению равно квадратному корню из суммы квадратов координат точки, то для комплексной псевдоевклидовой плоскости получим следующее выражение:

$$|z_t| = \sqrt{y_r^2 + (iy_i)^2} = \sqrt{y_r^2 - y_i^2}\,. \tag{1.7.1}$$

Таким образом, расстояния и длины на комплексной псевдоевклидовой

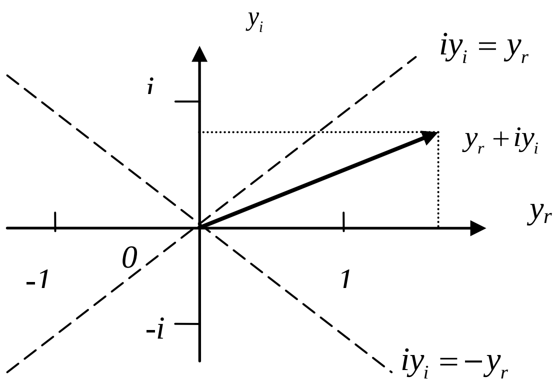


Рис.1.7. Комплексное число на псевдоевклидовой плоскости

плоскости имеют совсем другую интерпретацию, нежели те же характеристики евклидовых плоскостей. Из формулы (1.7.1) следуют удивительные для области действительных переменных свойства. Так, в том случае, когда модуль действительной части комплексной переменной больше модуля мнимой части, длина вектора является действительным числом. Когда же модуль действительной части комплексной переменной меньше модуля мнимой части, подкоренное выражение (1.7.1) становится отрицательным и расстояние поэтому становится мнимым числом! А в том случае, когда модуль действительной части комплексной переменной равен модулю мнимой части, то из (1.7.1) со всей очевидностью следует, что расстояние от точки до начала координат равно нулю!

Как известно, на евклидовой плоскости нулевую длину может иметь только нулевой вектор (с координатами (0;0)), а на псевдоевклидовой плоскости (рис.1.7), ненулевые векторы могут иметь нулевую длину. Таких векторов, длина которых равна нулю, на плоскости будет множество, и все они, как легко следует из (1.7.1), будут удовлетворять условию:

$$|y_r| = |y_i|. \tag{1.7.2}$$

Или, как следствие этого, одному из двух условий:

$$y_r = y_i, \tag{1.7.3}$$

$$y_r = -y_i. \tag{1.7.4}$$

Векторы, координаты которых удовлетворяют условию (1.7.3) или (1.7.4), лежат на соответствующих прямых в псевдоевклидовой плоскости и имеют нулевые длины. Эти прямые называются изотропными. На рис. 1.7 изотропные прямые показаны пунктирными линиями. Они делят плоскость на 4 сектора. На этой комплексной псевдоевклидовой плоскости все векторы с действительными длинами будут лежать либо в правом, либо в левом секторе, в то время как векторы с мнимыми длинами будут лежать либо в верхнем, либо в нижнем секторе. В некоторых экономических задачах это свойство может оказаться весьма полезным для идентификации различных объектов.

Теперь экономисту понятно, как физики представляют себе искривление пространства и времени, а также - что явилось основанием для фантастических гипотез о мгновенном переходе точки на гигантские расстояния в пространстве – ведь есть множество точек в псевдоевклидовом пространстве, расстояния между которыми равны нулю! Не призывая распространять геометрию Минковского на экономическое пространство, следует всё же отметить саму возможность использования этого нового математического аппарата для моделирования экономики.

1.8. Преобразование Лапласа

Как говорилось в самом начале монографии использование комплексных переменных для моделирования экономики ничтожно мало. В этой самой ничтожно малой части экономико-математических методов и моделей наибольшее распространение получил раздел, поименованный как «преобразование Лапласа». Преобразования Лапласа активно используются для решения систем дифференциальных и интегральных уравнений, расчёта передаточных функций динамических систем, вычисления переходных электромагнитных процессов в электрических контурах и др. Это преобразование лежит в основе так называемого «операционного исчисления», инструменты которого могут быть применимы и в некоторых экономических задачах. Покажем суть этого самого преобразования с тем, чтобы определить область его применения в экономике.

Очевидно, что умножая комплексное число на действительное число, можно получить новое комплексное число. Точно также, умножая любую функцию действительного переменного *f(x)* на некоторое комплексное число, можно получить комплексную функцию вещественного переменного:

$$(p_r + ip_i) f(x) = p_r f(x) + ip_i f(x). \qquad (1.8.1)$$

Вообще – существует множество способов перевести действительную переменную или её функцию в область комплексных чисел. Можно преобразовать функцию действительного переменного *f(x)* в комплексную функцию вещественного переменного и более сложным способом, чем умножением, например, так:

$$e^{(p_r+ip_i)f(x)} = Re^{i\varphi}, \;\; R = e^{p_r f(x)}, \varphi = p_i f(x). \qquad (1.8.2)$$

Но любое такое преобразование, перенос действий из области действительных чисел в область комплексных чисел, должно иметь смысл – оно должно либо приводить к некоторым новым результатам, либо помогать решению каких-либо задач. Поэтому из всего многообразия таких возможных преобразований наиболее часто используют преобразование, получившее название «преобразование Лапласа». Суть этого преобразования такова.

Пусть в области действительных переменных имеется функция *f(t)* о которой известно, что она удовлетворяет следующим условиям:

1) она интегрируема на любом конечном интервале оси времени *t*,
2) функция равна нулю при отрицательном *t*, *f(t)=0* при *t <0,*
3) при возрастании *t* модуль функции может также возрастать, но не быстрее некоторой показательной функции, $|f(t)| < Me^{at}$.

Такую функцию принято называть «*функция-оригинал*».

Пусть также имеется некоторое комплексное число *p*. Преобразованием Лапласа функции действительного переменного *f(t)* называется функция комплексного переменного *F(p)*, определяемая формулой:

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt. \qquad (1.8.3)$$

Эта полученная преобразованием (1.8.3) функция, называется «*функция-изображение*». Взаимосвязь между функцией-оригиналом и функцией-изображением записывают с помощью различных математических символов. Мы будем использовать такую запись:

$$f(t) \doteqdot F(t). \qquad (1.8.4)$$

Следует отметить, что для любой функции-оригинала изображение *F(p)* определено в полуплоскости

$$\operatorname{Re} p > M. \qquad (1.8.5)$$

Преобразование Лапласа оказалось очень эффективным инструментом решения множества сложных математических задач с дифференциальными и интегральными уравнениями, поскольку основным действиям с функциями-оригиналами соответствуют математические действия с функциями-изображениями, более простые, чем с оригиналами.

Поскольку излагать более подробно суть преобразования Лапласа, правила и свойства взаимосвязей функций-оригиналов и функций-изображений в данной монографии не имеет смысла – существует обширная специальная литература по операционному исчислению, остановимся здесь только на демонстрации использования преобразования Лапласа к решению задач.

Пусть, например, необходимо решить дифференциальное уравнение

$$x' - x = 1 \qquad (1.8.6)$$

при начальных условиях *x(0)=1* (задача Коши).

Воспользуемся для решения этой задачи преобразованием Лапласа. Известно, что единичной функции-оригиналу

$$f(t) = \begin{cases} 0, \text{ для } t < 0 \\ 1, \text{ для } t \ge 0 \end{cases} \qquad (1.8.7)$$

соответствует функция-изображение

$$F(t) = \frac{1}{p}. \qquad (1.8.8)$$

Опять-таки с помощью преобразования Лапласа для любого постоянного $\omega > 0$ выполняется такое преобразование:

$$f(\omega t) \doteq \frac{1}{\omega} F\left(\frac{p}{\omega}\right), \qquad (1.8.9)$$

а производная любой функции-изображения имеет такое отображение на комплексной плоскости:

$$f'(t) \doteq pF(p) - f(0). \qquad (1.8.10)$$

С учётом всего этого, отображение задачи решения дифференциального уравнения действительных переменных (1.8.6) в область комплексных переменных с помощью преобразований (1.8.8), (1.8.9) и (1.8.10) будет иметь вид:

$$pX(p) - f(0) - X(p) = \frac{1}{p}. \qquad (1.8.11)$$

То есть – получено элементарное алгебраическое уравнение относительно *X(p)* вместо дифференциального уравнения (1.8.6). Подставляя в это алгебраическое уравнение начальные условия *x(0)=1*, получим простое решение:

$$(p-1)X(p) - 1 = \frac{1}{p} \rightarrow X(p) = \frac{p+1}{p(p-1)} = \frac{2p-(p-1)}{p(p-1)} = \frac{2}{p-1} - \frac{1}{p}. \qquad (1.8.12)$$

Из полученного изображения легко перейти к оригиналам, поскольку известно, что экспоненциальная функция имеет такое отображение:

$$e^{\lambda t} \doteq \frac{1}{p-\lambda}, \qquad (1.8.13)$$

а как раз первое слагаемое правой части (1.8.11) имеет этот вид.

Тогда оригинал первого слагаемого будет записан так: $2e^t$.

Второе слагаемое правой части решения (1.8.12) представляет собой ни что иное как изображение единичной функции (1.8.7).

Тогда решением исходного дифференциального уравнения (1.8.6) является следующее:

$$x(t) = 2e^t - 1. \qquad (1.8.13)$$

На этом примере легко убедиться в том, что математические действия с изображениями различных функций действительных переменных, удовлетворяющих вышеуказанным требованиям, значительно проще действий с оригиналами. А поскольку преобразования Лапласа для самых различных функций действительных переменных, которые могут выступать как функции-оригиналы, давно рассчитаны и сведены в соответствующие таблицы, решение самых разнообразных и сложных задач операционного исчисления существенно упрощаются.

В экономике случаи использования дифференциальных уравнений, а уж тем более систем дифференциальных и интегральных уравнений встречаются очень редко, в основном в построениях математических идеализированных моделей, но когда это происходит, учёные с успехом используют преобразования Лапласа.