Глава вторая. Свойства комплексных функций действительного аргумента и действительных функций комплексного аргумента

2.1. Общая задача конформного отображения в комплекснозначной экономике

Прежде чем использовать инструмент теории функций комплексной переменной в экономике, необходимо изучить свойства этого инструмента. Одним из способов понимания этих свойств в теории функций комплексного переменного является раздел конформного отображения точек с одной комплексной плоскости на другую комплексную плоскость. Применительно к разнообразным случаям теории функций комплексного переменного конформное отображение представляет собой задачу разной степени сложности. В нашем случае будут рассмотрены самые простые случаи, поскольку знание характера конформных отображений элементарных комплекснозначных функций позволяет учёному правильно выбрать комплекснозначную функцию для моделирования.

Не умаляя общности рассуждений, можно говорить, что конформное отображение представляет собой удобный графический способ понимания того, как с помощью заданной функции одна комплексная переменная, изменяющаяся на комплексной плоскости аргумента, отображается на другую комплексную плоскость, моделируя значение переменной комплексного результата.

Поскольку мы работаем в области комплексных чисел, любое действительное число можно представить как комплексное число с нулевой мнимой частью. Тогда возможны три вида функций, каждый из которых может найти использование в моделировании экономики.

Первый вид функций – зависимость комплексной переменной от действительного аргумента:

$$y_r + iy_i = F(x_r + i0) = f(x_r) + if(x_r)\,. \qquad (2.1.1)$$

Это – комплексная функция действительного аргумента.

Второй вид функций, когда комплексному аргументу соответствует действительный результат:

$$y_r + i0 = F(x_r + ix_i) = f_r(x_r, x_i) + if_i(x_r, x_i) \Leftrightarrow \begin{cases} y_r = f_r(x_r, x_i), \\ f_i(x_r, x_i) = 0. \end{cases} \qquad (2.1.2)$$

Это – функция комплексного аргумента.

Третий вид функции – зависимость комплексной переменной от комплексного результата:

$$y_r + iy_i = F(x_r + ix_i) = f_r(x_r, x_i) + if_i(x_r, x_i)\,.. \qquad (2.1.3)$$

Это – комплекснозначная функция.

В теории функций комплексного переменного рассматривают в основном конформное отображение третьего вида функций – комплекснозначных функций. Но в экономике можно использовать все три вида функций как модели комплекснозначной экономики. Поэтому следует изучить суть и свойства каждого из трёх приведённых выше видов функций.

В этой главе будут рассмотрены свойства первых двух видов функций.

2.2. Комплексные функции действительного аргумента

Комплексная функция действительного аргумента представляет собой своеобразное «отображение» некоторого ряда действительных чисел, лежащих на числовой оси, на плоскость комплексных переменных:

$$y_r + iy_i = F(x + i0) = f(x) + if(x). \qquad (2.2.1)$$

Эта функция преобразует действительные переменные и их функции в комплексные переменные и соответствующие функции.

В экономике ситуации, когда одна переменная оказывает влияние на две другие переменные, встречаются нередко. Например, в маркетинге потребители выделяются в отдельные группы – сегменты, свойством которых является одинаковая реакция всех потребителей данного сегмента на товар и его маркетинговое сопровождение. Это значит, что потребители с одинаковым доходом (при сегментировании по доходам) одним и тем же образом реагируют на цену и покупают при этой цене одно и то же количество данного товара. То есть цена товара y_r и объём его приобретения y_i зависят от величины дохода x. Зная это, можно рассматривать реакцию потребителей разных сегментов на товар в порядке возрастания дохода каждого сегмента, и моделировать эту реакцию функцией действительного аргумента (2.2.1).

Множество возможных функций действительного аргумента, которые могут быть предложены для моделирования вышеуказанных экономических процессов, ограничивается только фантазией исследователя, формирующего очередную модель. Поэтому в данном параграфе мы рассмотрим свойства только самых простых функций.

Линейная модель действительного аргумента:

$$y_r + iy_i = (a_0 + ia_1) + (b_0 + ib_1)(x + i0) = (a_0 + b_0x) + i(a_1 + b_1x) \qquad (2.2.2)$$

не представляет особого интереса, поскольку любому изменению аргумента соответствует одновременное прямо пропорциональное изменение действительной и мнимой части комплексного результата. Это означает, что при любом изменении действительного аргумента – линейном или нелинейном, - на комплексной плоскости будет отображаться прямая линия, наклон которой и положение на комплексной плоскости полностью определяются значениями комплексного коэффициента пропорциональности.

Практический интерес представляют нелинейные преобразования действительной переменной на комплексную плоскость. Первым из таких способов является возведение действительного аргумента в комплексную степень:

$$y_r + iy_i = (a_0 + ia_1)x^{(b_0+ib_1)}. \qquad (2.2.3)$$

Коэффициент пропорциональности, который может стоять перед аргументом, возводимым в комплексную степень, может быть не только комплексным, но и действительным, и мнимым. Представим комплексную функцию действительного аргумента в экспоненциальной форме, тогда (2.2.3) запишется так:

$$y_r + iy_i = \sqrt{a_0^2 + a_1^2}\, x^{b_0} e^{i(arctg\frac{a_1}{a_0} + b_1 \ln x)}. \qquad (2.2.4)$$

Для простоты записи комплексного коэффициента пропорциональности будем обозначает его модуль как $A = \sqrt{a_0^2 + a_1^2}$, а полярный угол - $\alpha = arctg\frac{a_1}{a_0}$.

Равенство действительной и мнимой частей этого уравнения может быть представлено в виде системы:

$$\begin{cases} y_r = Ax^{b_0}\cos(\alpha + b_1 \ln x), \\ y_i = Ax^{b_0}\sin(\alpha + b_1 \ln x). \end{cases} \qquad (2.2.5)$$

Как видно и действительная, и мнимая части этой комплексной функции действительного переменного при росте аргумента меняются по косинусоиде (действительная часть) и синусоиде (мнимая часть). Правда с учётом того, что действительный аргумент в этих тригонометрических функциях представлен не напрямую, а через логарифм, то это означает, что при равномерном возрастании действительного аргумента периоды колебаний и действительной, и мнимой частей рассматриваемой функции будут увеличиваться. Наличие логарифма накладывает ограничения на область определения функции – поскольку логарифм нуля не существует, нулевая точка не входит в область определения функции.

Если рассматривать результат (2.2.4) на комплексной плоскости, то точки этой функции будут располагаться так. Модуль этой комплексной функции

$$r = Ax^{b_0} \qquad (2.2.6)$$

будет с ростом аргумента $x>0$ увеличиваться при $b_0>0$ и уменьшаться при $b_0<0$, а полярный угол – возрастать:

$$\varphi = \alpha + b_1 \ln x, \qquad (2.2.7)$$

если $b_1>0$ и уменьшаться (двигаться по часовой стрелке), если $b_1<0$.

Отсюда легко понять, что на комплексной плоскости функция (2.2.3) отображается в зависимости от значений комплексного показателя степени в виде сходящейся или расходящейся спирали.

Рассмотрим частный случай функции (2.2.3) – когда аргументом выступает время *t*:

$$y_r + iy_i = (a_0 + ia_1)t^{(b_0+ib_1)}. \qquad (2.2.8)$$

Такая функция представляет собой комплексный тренд и он может быть использован на практике в некоторых экономических ситуациях.

Как следует из вышеизложенных свойств рассматриваемой функции, характер комплексного тренда будет полностью определяться его коэффициентами. Для примера приведём несколько интересных типов подобных трендов.

Так, если использовать тренд:

$$y_{rt} + iy_{it} = t^{(-0,5+i10)}, \qquad (2.2.9)$$

то каждая из составляющих комплекснозначного тренда будет иметь вид, изображённый на рис. 2.1 и рис. 2.2.

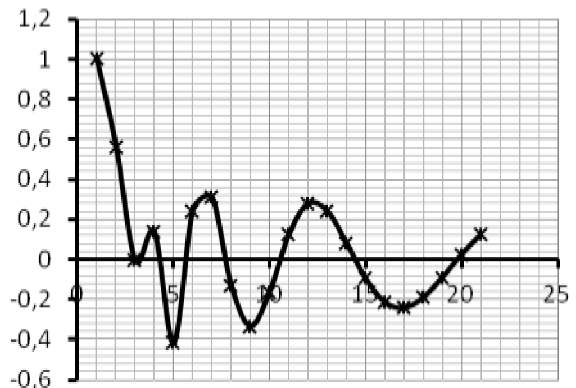


Рис. 2.1. Динамика действительной части комплексного тренда (2.2.9)

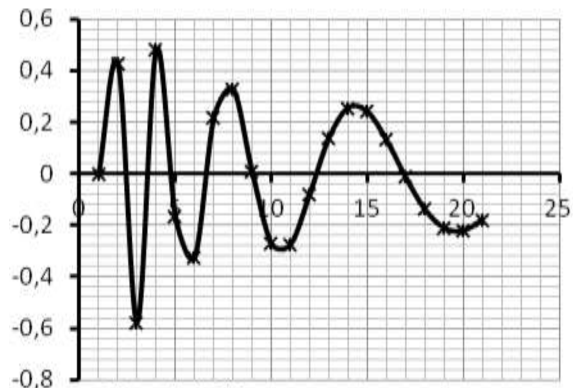


Рис. 2.2. Динамика мнимой части комплексного тренда (2.2.9)

Тот же вид тренда, но с другими коэффициентами:

$$y_{rt} + iy_{it} = t^{(0,25+i0,35)}, \qquad (2.2.10)$$

моделирует совсем иную динамику, которая изображена на рис. 2.3 и рис. 2.4.

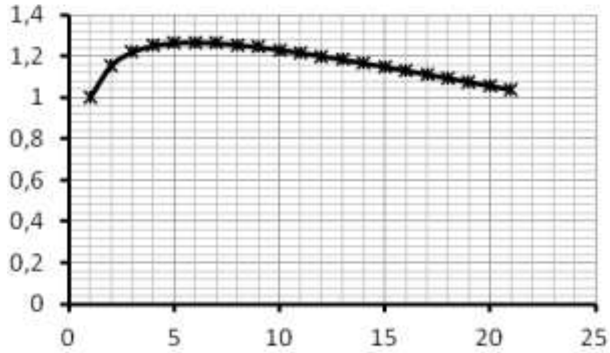


Рис. 2.3. Динамика действительной части комплексного тренда (2.2.10)

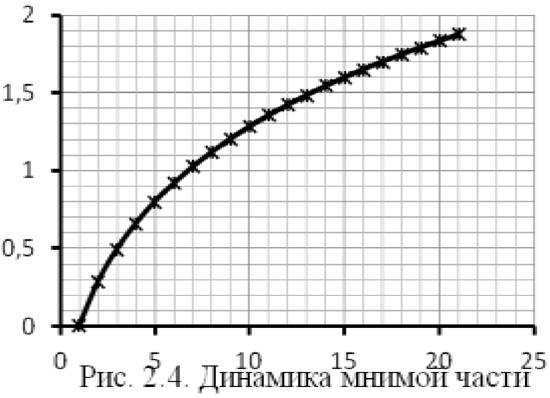


Рис. 2.4. Динамика мнимой части комплексного тренда (2.2.10)

Если тренды, подобные тем, что изображены на рис. 2.3 и рис. 2.4 довольно часто встречаются в области действительных переменных, то с моделями, описывающими динамику трендов типа рис.2.1 и рис. 2.2, в практике исследования социально-экономических процессов экономисты встречаются редко, разве что на фондовых рынках.

Следующей моделью действительного аргумента может выступать *комплексная показательная функция действительного аргумента*. Она может быть представлена в таком виде:

$$y_r + iy_i = (a_0 + ia_1)e^{(b_0+ib_1)x}. \quad (2.2.11)$$

Основание показательной функции может быть и другим, в том числе и некоторым комплексным числом, но эти возможные варианты рассматривать не будем.

Используя экспоненциальную форму записи, функция (2.2.11) может быть представлена так:

$$y_r + iy_i = Ae^{b_0x}e^{i(\alpha+b_1x)}. \quad (2.2.12)$$

Как видно, модуль этой функции изменяется по экспоненциальному закону, а полярный угол меняется прямо пропорционально изменению аргумента. Поскольку комплексный коэффициент показателя степени может принимать различные значения, то и моделируемая функция может описывать разные варианты динамики, в деталях отличающиеся от функции (2.2.4), но также как и она, имеет спиралевидный характер отображения на комплексной плоскости.

Рассматривая отдельно действительную и мнимую части этой комплексной функции, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} y_r = Ae^{b_0x}\cos(\alpha + b_1x), \\ y_i = Ae^{b_0x}\sin(\alpha + b_1x). \end{cases} \quad (2.2.13)$$

Теперь очевидны отличия комплексной показательной функции действительного аргумента от комплексной степенной функции действительного аргумента. Действительная и мнимая части показательной функции меняются по косинусоиде и синусоиде с постоянным периодом колебаний, но с изменяющемся с изменением аргумента размахом колебаний. Если $b_0>0$, то размах колебаний увеличивается с ростом аргумента, а если $b_0<0$, то размах колебаний уменьшается.

Простой вариант такой модели – модель комплексного тренда.

Например, при малых положительных значениях коэффициентов комплексного показателя степени таких, как:

$$y_{rt} + iy_{it} = e^{(0,15+i0,05)t}\ , \qquad (2.2.14)$$

каждая из составляющих описывается при $t=1,2,..\ 22$ возрастающим участком (рис. 2.5 и рис. 2.6).

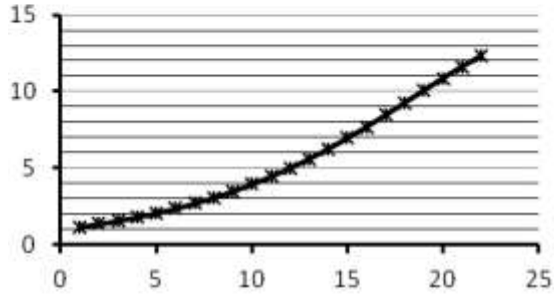


Рис. 2.5. Динамика действительной части тренда (2.2.14)

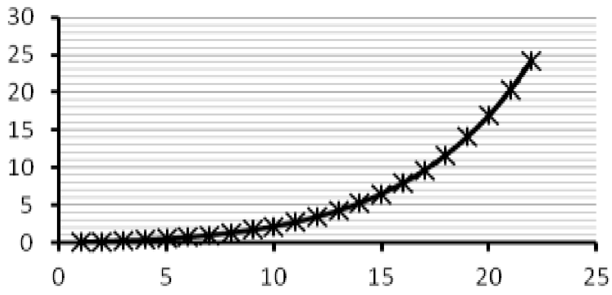


Рис. 2.6. Динамика мнимой части тренда (2.2.14)

При других коэффициентах может быть промоделирована значительно более сложная цикличная динамика, например, если модель примет вид:

$$y_{rt} + iy_{it} = e^{(0,05+i60)t}\ , \qquad (2.2.15)$$

то динамика действительной и мнимой составляющих этого комплекснозначного тренда принимают форму, изображённую на рис.2.7 и рис.2.8.

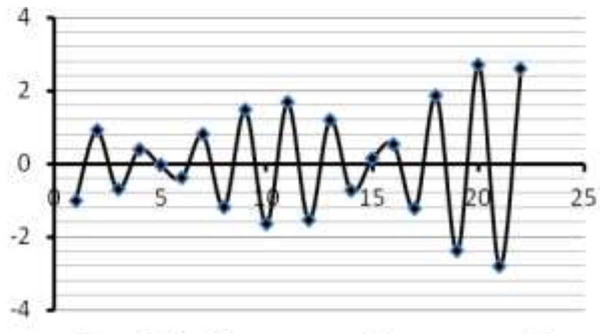


Рис. 2.7. Динамика действительной части тренда (2.2.15)

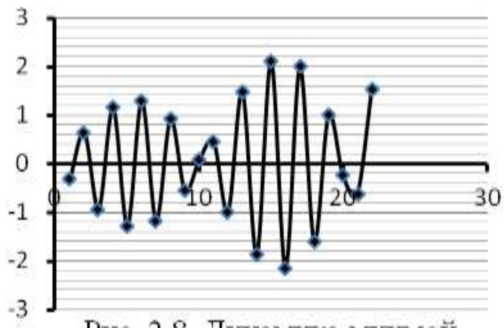


Рис. 2.8. Динамика мнимой части тренда (2.2.15)

Как видно на этих рисунках функция моделирует колебательный процесс со всё возрастающей амплитудой при постоянной частоте колебаний.

Можно продолжить рассмотрение подобных элементарных комплексных функций действительного аргумента, но это выходит за рамки, обусловленные кругом задач данной монографии. Поэтому рассмотрим несколько частных нестандартных функций, являющихся подвидами рассмотренных выше.

Прежде всего - это *показательно-степенная функция с мнимым показателем степени*:

$$y_r + iy_i = x^{ix}. \quad (2.2.16)$$

Представим эту функцию в экспоненциальной форме:

$$y_r + iy_i = e^{ix\ln x}. \quad (2.2.17)$$

Откуда легко определить изменение действительной и мнимой частей с ростом аргумента:

$$\begin{cases} y_r = \cos(x\ln x), \\ y_i = \sin((x\ln x). \end{cases} \quad (2.2.18)$$

Они меняются по косинусоиде и синусоиде с возрастающим периодом колебаний. Наличие логарифма вновь накладывает ограничения на область определения функции – поскольку логарифм нуля не существует, нулевая точка не входит в область определения функции.

Поскольку модуль этой функции равен единице, то на комплексной плоскости функция представляет собой единичную окружность.

Ожидаемым развитием такой функции является *показательно-степенная функция с комплексным показателем степени*:

$$y_r + iy_i = x^{(x+ix)} = x^{(1+i)x}. \quad (2.2.19)$$

В данном случае правая часть равенства легко представима в экспоненциальной форме:

$$y_r + iy_i = x^x e^{ix\ln x}. \quad (2.2.20)$$

Эта модель определена в положительной части действительных чисел, поскольку логарифм отрицательного числа, как и логарифм нуля не существует.

Представим отдельно действительную и мнимую части этой комплексной функции:

$$\begin{cases} y_r = x^x\cos(x\ln x), \\ y_i = x^x\sin(x\ln x). \end{cases} \quad (2.2.21)$$

Модуль этой комплексной функции резко возрастает с ростом аргумента, потому действительная и мнимая части функции представляют собой некоторую колебательную функцию с возрастающим периодом колебаний и резко растущим размахом колебаний. На комплексной плоскости эта функция отразится резко раскручивающейся спиралью. Такой характер функции делает её малопригодной для моделирования экономики. Впрочем, начальный участок этой функции может представлять интерес для. Модуль функции в положительной окрестности нулевой точки близок к единице (любое число в нулевой степени равно единице), но с ростом аргумента он вначале уменьшается, а затем - увеличивается. Минимум модуль комплексной функции достигает в точке, где равна нулю первая производная:

$$\frac{dr}{dx} = (x^x)' = 0.$$

Решим это уравнение, воспользовавшись формулой Лейбница – Бернулли. Получим:

$$r' = x^x(1 + \ln x) = 0.$$

Поскольку $|x|>0$, модуль комплексной функции достигает своего минимального значения в точке $x=e^{-1}$.

Динамика полярного угла θ также при изменении аргумента в промежутке [0;1) имеет сложную динамику, поскольку он определяется таким равенством:

$$\theta = x \ln x.$$

Первая производная этой зависимости по аргументу будет иметь вид:

$$\frac{d\theta}{dx} = (x)' \ln x + x(\ln x)' = \ln x + 1.$$

Это значит, что минимум своих значений полярный угол достигает в той же точке, что и модуль комплексной точки: $x=e^{-1}$.

Таким образом, рассматриваемая комплексная функция достигает при аргументе $x=e^{-1}$ минимального значения и модуля, и полярного угла. На комплексной плоскости это будет с ростом аргумента изображаться так. Кривая начинает своё движение по часовой стрелке с окрестностей точки с координатами $x_r=1$, $x_i=0$ до точки, в которой и модуль, и аргумент принимают свои минимальные значения. Модуль при этом равен:

$$r_{\min} = x^x = (e^{-1})^{e^{-1}} = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}},$$

а полярный угол:

$$\theta_{\min} = x \ln x = -\frac{1}{e}.$$

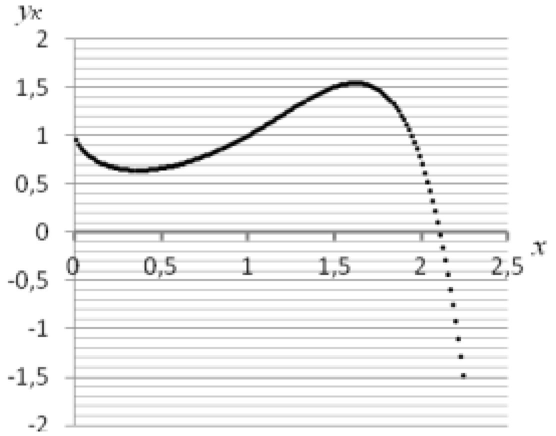
Затем с ростом x начинает увеличиваться и модуль комплексной функции, и её полярный угол. Этот рост отразится на комплексной плоскости движением по той же линии, что и прежде, но в противоположном направлении – против часовой стрелки.

Далее модуль функции начинает резко возрастать, что приводит к увеличению значений и действительной и мнимой частей рассматриваемой функции. Раздельная динамика действительной и мнимой частей этой комплексной функции при незначительных величинах действительного аргумента x=[0;2) более интересны. Эта динамика представлена на рис.2.9.

Сузить размах спирали и увеличить или уменьшить частоту её вращения можно введением в степень комплексного коэффициента пропорциональности, отличного от комплексной единицы:

$$y_r + iy_i = x^{(b_0 + ib_1)x}. \quad (2.2.22)$$

При разных значениях действительной и мнимой частей этого коэффициента получаются для рассматриваемой функции самые разнообразные спирали на комплексной плоскости, также как и разные типы динамики действительной и мнимой частей комплексной функции.



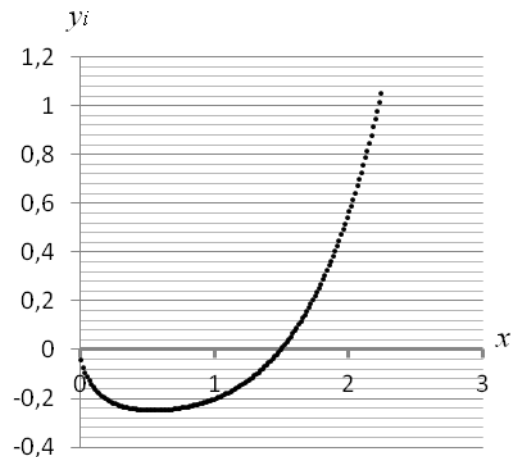


Рис. 2.9. Действительная и мнимая части комплексной функции (2.2.19)

Продолжая логику трансформации действительного аргумента на комплексную плоскость, можно предложить и *комплексную показательно-степенную функцию с комплексным основанием*:

$$y_r + iy_i = (x + ix)^x = (x(1+i))^x \quad . \qquad (2.2.23)$$

Её экспоненциальная форма записи будет такой:

$$y_r + iy_i = (\sqrt{2}x)^x e^{i\frac{\pi}{4}x} \quad . \qquad (2.2.24)$$

Тогда для действительной и мнимой частей этой комплексной функции получим:

$$\begin{cases} y_r = (\sqrt{2}x)^x \cos(\frac{\pi}{4}x), \\ y_i = (\sqrt{2}x)^x \sin(\frac{\pi}{4}x). \end{cases}$$

Нулевая точка действительного аргумента входит в область определения функции. И эта функция в целом представляет собой спираль, но при малых значениях действительного аргумента и она ведёт себя сложно, ведь её полярный угол с ростом действительного аргумента однозначной растёт, а вот модуль – сначала уменьшается, а только после того, как достигнет своего минимума, начинает возрастать.

Первая производная модуля будет равна:

$$r' = (\sqrt{2}x)^x \left(\frac{x}{\sqrt{2}x} + \ln(\sqrt{2}x)\right) .$$

Приравнивая её нулю, получим точку, в которой модуль принимает минимальные значения:

$$x = \frac{e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2}} = 0{,}348652215 .$$

С учётом этих особенностей при начальных значениях действительного аргумента комплексная функция будет иметь нелинейную динамику, изображённую на рис. 2.10.

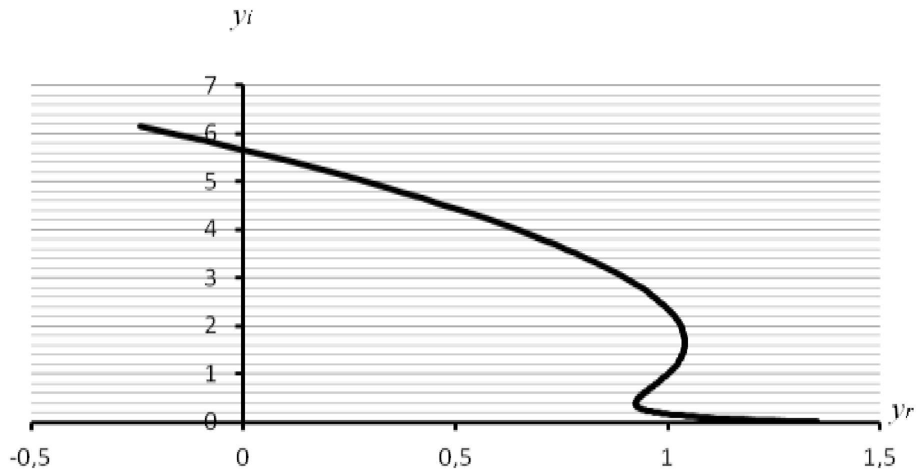


Рис.2.10. Функция (2.2.23) на комплексной плоскости при малых значениях действительного аргумента

Завершает рассмотрение элементарных функций действительного аргумента *комплексная показательно-степенная функция с комплексным основанием и комплексной степенью:*

$$y_r + iy_i = (x + ix)^{(x+ix)} = (x(1+i))^{(1+i)x}. \quad (2.2.25)$$

Переходя к экспоненциальной форме записи, получим:

$$y_r + iy_i = (\sqrt{2}x)^{(1+i)x} e^{i\frac{\pi}{4}(1+i)x} = [(\sqrt{2}x)^x e^{-\frac{\pi}{4}x}][(\sqrt{2}x)^{ix} e^{i\frac{\pi}{4}x}]. \quad (2.2.26)$$

Модуль данной комплексной функции действительного аргумента будет равен:

$$R = (\sqrt{2}x)^x e^{-\frac{\pi}{4}x}, \quad (2.2.27)$$

а полярный угол:

$$\theta = x[\ln(\sqrt{2}x) + \frac{\pi}{4}]. \quad (2.2.28)$$

Легко убедиться в том, что нулевое значение действительного аргумента не входит в область определения данной функции.

Поведение модуля этой функции более сложное, чем предыдущих функций. При аргументе, близком к нулевой точке, модуль будет близок к единице, затем он уменьшается до определённой величины, после чего вновь начинает возрастать, но не так быстро, как в случае предыдущей функции. Для определения точки, в которой модуль комплексной функции (2.2.27) принимает своё минимальное значение, следует найти его первую производную:

$$R' = [(\sqrt{2}x)^x]' e^{-\frac{\pi}{4}x} + (\sqrt{2}x)^x (e^{-\frac{\pi}{4}x})' = (\sqrt{2}x)^x (\frac{1}{\sqrt{2}} + \ln(\sqrt{2}x)) e^{-\frac{\pi}{4}x} - \frac{\pi}{4}(\sqrt{2}x)^x e^{-\frac{\pi}{4}x},$$

которую необходимо приравнять нулю, и решая уравнение, найти точку, в которой модуль минимален:

$$x = \frac{e^{\frac{\pi - 2^{\frac{3}{2}}}{4}}}{\sqrt{2}}.$$

Полярный угол также изменяется нелинейно – уменьшается от значений, близких, но не равных нулю (точки находятся в четвёртом квадранте комплексной плоскости), а затем возрастает. Для определения точки минимального значения полярного угла, найдём его первую производную по действительному аргументу:

$$\frac{d\theta}{dx} = (x)'(\ln(\sqrt{2}x) + \frac{\pi}{4}) + x(\ln(\sqrt{2}x) + \frac{\pi}{4})' = \ln(\sqrt{2}x) + \frac{\pi + 2^{\frac{3}{2}}}{4}.$$

Приравнивая нулю, и решая уравнение, получим значение действительного аргумента, при котором полярный угол достигает своего минимального значения:

$$x = \frac{e^{-\frac{\pi + 2^{\frac{3}{2}}}{4}}}{\sqrt{2}}.$$

Конформное отображение рассматриваемой функции на комплексной плоскости с ростом аргумента происходит по спирали по часовой стрелке так, как это показано на рис. 2.10.

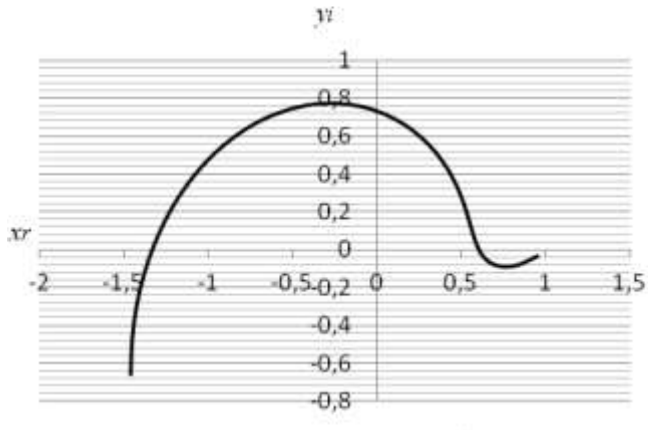


Рис. 2.10. Участок конформного отображения функции (2.2.25) при малом значении аргумента

При дальнейшем росте аргумента модуль функции резко растёт, как растёт и полярный угол, а сама функция продолжает движение по спирали по часовой стрелке.

Элементарная *комплексная показательно-степенная функция с комплексным основанием и комплексной степенью* (2.2.25) может быть представлена и в более применимом для практического использования виде, а именно:

$$y_r + iy_i = (x(a_0 + ia_1))^{(b_0+ib_1)x} . \quad (2.2.29)$$

Экспоненциальная форма записи этой функции будет такой:

$$y_r + iy_i = [(Ax)^{b_0 x} e^{-b_1 x\alpha}][(Ax)^{ib_1 x} e^{ib_0 x\alpha}] . \quad (2.2.30)$$

Откуда получим для модуля данной комплексной функции действительного аргумента:

$$R = (Ax)^{b_0 x} e^{-b_1 x\alpha} , \quad (2.2.31)$$

и для полярного угла:

$$\theta = x[b_1 \ln(Ax) + b_0\alpha] . \quad (2.2.32)$$

Функция определена в положительной области изменений аргумента, что со всей очевидностью следует из (2.2.32).

Меняя значения коэффициентов функции (2.2.29), можно получить самые разнообразные виды конформных отражений и изменения действительной и мнимой частей этой функции, имеющие колебательный характер.

Как можно заметить из (2.2.32), полярный угол этой комплексной функции действительного аргумента во многом зависит от константы b_1. Чем выше значения этой постоянной, тем быстрее растёт с ростом аргумента полярный угол, тем быстрее скорость оборота значений функции на комплексной плоскости. Этот коэффициент оказывает влияние и на изменение модуля рассматриваемой функции, но при малом значении a_1 и большом значении a_0 это влияние уменьшается.

Коэффициент b_0 «отвечает» за рост модуля функции. При его положительных значениях модуль резко возрастает.

При разных значениях коэффициентов функция ведёт себя по-разному – сходится к нулю и расходится, меняет свои значения вокруг некоторой окружности или изменяется хаотически и т.п.

Любопытно, что функция может моделировать и процесс реакции некоторой системы на внешнее воздействие с последующей стабилизацией на прежнем уровне. Так ведёт себя эта функция, например при таких значениях коэффициентов:

$$y_r + iy_i = (x(1-i))^{(-1,5+i6)x} . \quad (2.2.33)$$

Последовательное изменение действительной части этой функции и её мнимой части при росте аргумента в пределах $0<x\leq 10$, в зависимости от аргумента показано на рис. 2.11 и 2.12.

Обобщая результаты данного параграфа, следует сделать вывод о том, что комплексные функции действительного аргумента моделируют цикличную динамику самого разнообразного характера.

Множество функций комплексного аргумента вовсе не ограничивается рассмотренными выше типами. Но рассмотрение более или менее полной части этого множества займёт непомерно большое место в работе и будет противоречить цели монографии – изложению только основополагающих моментов применения аппарата теории функция комплексного переменного к решению экономических задач.

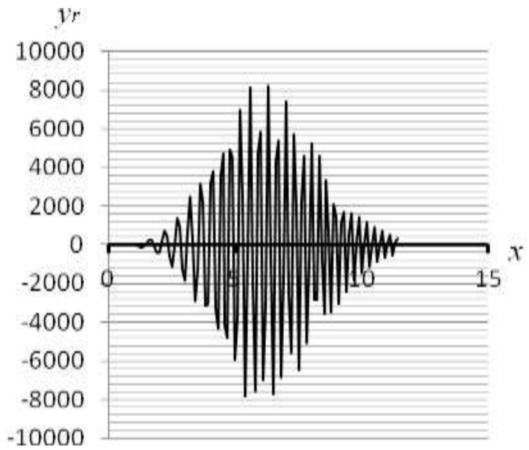


Рис.2.11. Динамика действительной части функции (2.2.33)

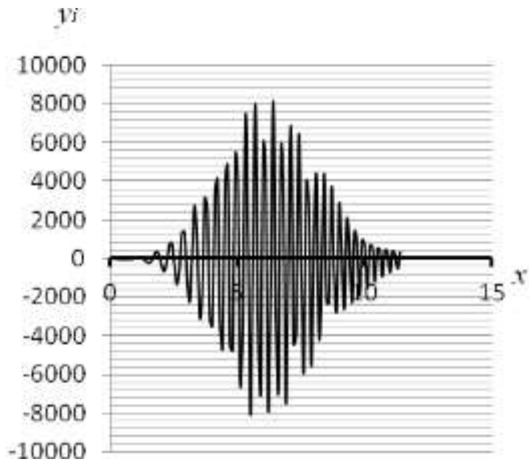


Рис.2.12. Динамика мнимой части функции (2.2.33)

Огромный простор для генерации новых функций представляет собой суперпозиция элементарных комплексных функций. Простым примером такой суперпозиции представляет случай, когда к степенной комплексной функции действительного аргумента:

$$z_r + iz_i = (c_0 + ic_1)x^{d_0 + id_1}$$

аддитивно включена комплексная функция действительного аргумента (2.2.29).

$$z_r + iz_i = (c_0 + ic_1)x^{d_0 + id_1} + (x\ (a_0 + ia_1))^{(b_0 + ib_1)x} \quad . \qquad (2.2.34)$$

Если, например, для второго слагаемого этой функции используются коэффициенты, наподобие тех, которые были предложены в (2.2.33), то полученная модель будет описывать динамику некоторого нелинейного процесса, который в определённом промежутке значений действительного аргумента претерпевает под воздействием некоторых внешних воздействий существенные хаотические отклонения от прежней траектории, но в силу устойчивости объекта вновь возвращается на прежнюю траекторию. Очевидно, что вместо степенной функции первое слагаемое может быть представлено и другими формами, например, ступенчатой функцией. При должном подборе параметров с помощью такой суперпозиции будет моделироваться переход из одного стационарного состояния в другое.

Действительный аргумент сам может быть представлен в комплексных функциях как действительная функция действительного аргумента, например, sin$x$ или cos$x$.

Как видно, многообразие комплексных функций действительного аргумента чрезвычайно велико и охватить это многообразие в одном параграфе или главе не представляется возможным.

2.3. Функции комплексного аргумента: линейная функция

Поскольку есть возможность трансформации действительного аргумента на комплексную плоскость с помощью определённых функций, то возможен и обратный порядок трансформации – из поля комплексных переменных на числовую ось действительных переменных. Зависимость между комплексным аргументом и действительным результатом будет представлять собой функцию комплексного аргумента:

$$y = f(x_r + ix_i) = f_r(x_r, x_i) + if_i(x_r, x_i). \qquad (2.3.1)$$

Так как в правой части равенства находится комплексное число, а в левой – действительное, то функция комплексного аргумента (2.3.1) может быть записана так:

$$y + i0 = f_r(x_r, x_i) + if_i(x_r, x_i). \qquad (2.3.2)$$

Откуда со всей очевидностью имеем систему двух действительных уравнений:

$$\begin{cases} y = f_r(x_r, x_i), \\ 0 = f_i(x_r, x_i). \end{cases} \qquad (2.3.3)$$

Первое равенство системы представляет собой уравнение некоторой поверхности в трёхмерном пространстве, второе уравнение – линию на плоскости аргумента. Но так как задача рассматривается в трёхмерной системе координат, то для второго уравнения системы (2.3.3) равенство выполняется для любых значений y. Это означает в трёхмерном пространстве поверхность, которая ось y не пересекает, то есть – ось y параллельна этой поверхности, а сама поверхность перпендикулярна комплексной плоскости аргумента.

Поскольку эти два уравнения объединены в систему, то из этого следует одновременное выполнение этих двух равенств. Геометрически это означает, что система (2.3.3) и исходная функция (2.3.1) представляют собой линию пересечения в трёхмерном пространстве двух поверхностей – первого и второго уравнения системы (2.3.3). Но перпендикулярность второго уравнения системы (2.3.3) означает, что совокупность точек, лежащих и на поверхности первого уравнения системы (2.3.3), должна проецироваться на плоскость комплексного аргумента в линию, описываемую вторым уравнением системы (2.3.4).

Рассмотрим последовательно по мере усложнения основные функции комплексного аргумента и их графическую интерпретацию, приводя каждую функцию к виду (2.3.3).

Первой такой моделью, которая может быть использована в экономике, является линейная функция комплексного аргумента с нулевым свободным членом:

$$y = (b_0 + ib_1)(x_r + ix_i) . \qquad (2.3.4)$$

Выделяя действительную и мнимую части этой функции и группируя их, получим:

$$\begin{cases} y = b_0 x_r - b_1 x_i , \\ 0 = b_1 x_r + b_0 x_i . \end{cases} \qquad (2.3.5)$$

Первое уравнение (2.3.5) есть не что иное, как уравнение плоскости в пространстве, проходящее через нулевую точку. Угол наклона и положение плоскости в пространстве полностью определяется знаками и величинами коэффициентов комплексного коэффициента пропорциональности.

Второе уравнение рассматриваемой системы представляет собой уравнение прямой линии на плоскости аргумента:

$$x_r = -\frac{b_0}{b_1} x_i . \qquad (2.3.6)$$

Эта прямая линия выходит из нулевой точки, а её расположение в том или ином квадранте комплексной плоскости определяется значениями действительной и мнимой части комплексного коэффициента пропорциональности. Поскольку второе уравнение системы (2.3.5) следует рассматривать в пространстве, то оно представляет собой плоскость, параллельную оси y и перпендикулярную комплексной плоскости.

Пересечением двух плоскостей в пространстве является прямая линия, из чего следует, что линейная функция комплексного аргумента (2.3.4) представляет собой прямую линию в трехмерном пространстве ($0y;0x_r;0x_i$), проходящую через нулевую точку.

Если теперь рассмотреть линейную функцию комплексного аргумента со свободным комплексным коэффициентом:

$$y = (a_0 + ia_1) + (b_0 + ib_1)(x_r + ix_i) , \qquad (2.3.7)$$

то, выделяя действительную и мнимую части этой функции и группируя их, как и ранее, получим:

$$\begin{cases} y = a_0 + b_0 x_r - b_1 x_i , \\ 0 = a_1 + b_1 x_r + b_0 x_i . \end{cases} \qquad (2.3.8)$$

Очевидно, что характер функции не изменился – и первое, и второе уравнение являются уравнениями плоскостей, - изменилось только положение плоскостей в пространстве, также как изменилось расположение в пространстве и прямой линии, являющейся пересечением этих плоскостей. Из первого уравнения следует, что плоскость в пространстве не проходит через нулевую точку и пересекает ось y в точке $y=a_0$. Второе уравнение показывает, что прямая линия на плоскости комплексного аргумента также не проходит через нулевую точку, поскольку:

$$x_r = -\frac{a_1}{b_1} - \frac{b_0}{b_1} x_i \qquad (2.3.9)$$

и на оси действительных значений комплексного аргумента эта линия проходит через точку $x_r = -\frac{a_1}{b_1}$.

Таким образом, линейная функция комплексного аргумента со свободным комплексным коэффициентом (2.3.7) представляет собой уравнение прямой в трёхмерном пространстве «комплексная плоскость аргумента - ось действительных чисел». Или иначе – любая прямая линия в трёхмерном пространстве может быть описана линейной функцией комплексного аргумента (2.3.7).

Здесь уместно вспомнить, что в системе декартовых координат уравнение прямой также определяется пересечением двух плоскостей и применительно к рассматриваемой системе координат может быть записана так:

$$\begin{cases} a_1 y + b_1 x_r + c_1 x_i + d_1 = 0, \\ a_2 y + b_2 x_r + c_2 x_i + d_2 = 0. \end{cases} \qquad (2.3.10)$$

Прямая в декартовой системе координат определяется, как следует из (2.3.10), восьмью коэффициентами; та же прямая в форме линейной функции комплексного аргумента определяется, как это следует из (2.3.7), только четырьмя коэффициентами, да ещё и представляется в виде линейного уравнения. Вновь можно убедиться в том, что действиям с комплексными числами соответствуют действия с числами действительными, а функции комплексных переменных зачастую представляют собой более удобную форму записи, чем функции действительных переменных.

Следует отметить, что в системе декартовых координат уравнение прямой, проходящей через две несовпадающие точки $P_1(y_1,x_{r1},x_{i1})$ и $P_2(y_2,x_{r2},x_{i2})$, записывается так:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x_r - x_{r1}}{x_{r2} - x_{r1}} = \frac{x_i - x_{i1}}{x_{i2} - x_{i1}} \qquad (2.3.11)$$

Применительно же к прямой линии, описываемой функцией комплексного аргумента (2.3.7), для этих двух точек уравнение прямой запишется так:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{(x_r + ix_i) - (x_{r1} + ix_{i1})}{(x_{r2} + ix_{i2}) - (x_{r1} + ix_{i1})} \qquad (2.3.12)$$

Особенности линейной функции комплексного аргумента применительно к некоторым экономическим задачам будут рассмотрены в других главах монографии.

2.4. Степенная функция комплексного аргумента с вещественным показателем степени

Линейная функция комплексного аргумента может быть применена во многих случаях моделирования экономики, поскольку в соответствии с общенаучным принципом «от простого – к сложному» для изучения некоторого сложного объекта вначале используют простые модели, в том числе линейные, после чего модели усложняются по мере понимания свойств объекта для более адекватного описания сложных процессов.

Более сложной, нежели линейная, является степенная функция комплексного аргумента, которая в общем виде будет записана так:

$$y = (a_0 + ia_1)(x_r + ix_i)^{(b_0 + ib_1)}. \qquad (2.4.1)$$

Легко заметить, что если показатель степени этой модели равен единице, то она превращается в элементарную линейную модель комплексного аргумента (2.3.4).

Рассмотрим функцию (2.4.1) последовательно в порядке повышения её сложности в зависимости от того, каким будет показатель степени – действительным, мнимым или комплексным.

Первой из возможных моделей, которая определяется равенством (2.4.1) является модель с вещественным показателем степени:

$$y = (a_0 + ia_1)(x_r + ix_i)^{b_0}. \qquad (2.4.2)$$

Для понимания свойств этой функции представим комплексный коэффициент пропорциональности и комплексную переменную ресурсов в экспоненциальной форме. Получим:

$$y = ae^{i\alpha}(re^{i\varphi})^{b_0} = ar^{b_0}e^{i(\alpha + b_0\varphi)}, \qquad (2.4.3)$$

где $a = \sqrt{a_0^2 + a_1^2}, \alpha = arctg\dfrac{a_1}{a_0}, r = \sqrt{x_x^2 + x_i^2}, \varphi = arctg\dfrac{x_i}{x_r}$.

Откуда следует система уравнений для действительной и мнимой частей рассматриваемой функции:

$$\begin{cases} y = ar^{b_0}\cos(\alpha + b_0\varphi), \\ 0 = ar^{b_0}\sin(\alpha + b_0\varphi). \end{cases} \qquad (2.4.4)$$

Из последнего равенства системы следует, что оно выполняется при таких условиях:

$$\sin(\alpha + b_0\varphi) = 0 \rightarrow \alpha + b_0\varphi = \pm\pi k, \qquad (2.4.5)$$

где k - целое число.

Заметим, что при значениях полярного угла функции, определённых этими условиями, его косинус принимает значения:

$$\begin{cases} \cos(\alpha + b_0\varphi) = 1, \quad \forall\ k = 0, \pm2, \pm4, ... \\ \cos(\alpha + b_0\varphi) = -1, \ \forall\ k = \pm1, \pm3, \pm5, ... \end{cases} \qquad (2.4.6)$$

Если, например, рассматривать полярный угол на комплексной плоскости аргумента в пределах от 0 до 2π, то при $\alpha=0$ и $b_0=1$ получим, что y положителен при $\varphi=0$ и $\varphi=2\pi$ и отрицателен при $\varphi=\pi$. При любых α и при $b_0\neq0$ (при показателе степени $b_0=0$ функция превращается в точку $y=a\cos\alpha=a_0$) функция (2.4.2) в зависимости от значений коэффициентов α и b_0 и полярного угла φ принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Поскольку из второго уравнения системы (2.4.4) вытекает, что отношение между действительной и мнимой частями комплексного аргумента в данной функции является величиной постоянной вне зависимости от значений *y*, то в трёхмерном пространстве это уравнение представлено плоскостью, параллельной оси действительной переменной *0y* и перпендикулярной плоскости комплексного аргумента.

Первое уравнение (2.4.4) определяет изменение *y* в зависимости от изменения двух факторов x_r и x_i, которое может быть представлено в трёхмерном пространстве в виде некоторой поверхности.

Комплексный коэффициент пропорциональности меняет масштаб представления и наклоны поверхности, поэтому его влиянием на результат для простоты изложения можно вначале пренебречь и считать, что этот коэффициент равен единице. Поэтому рассмотрим упрощённый аналог функции (2.4.2):

$$y = (x_r + ix_i)^{b_0}. \qquad (2.4.7)$$

Тогда действительная и мнимая части этой функции будут иметь вид:

$$\begin{cases} y = r^{b_0} \cos b_0\varphi, \\ 0 = r^{b_0} \sin b_0\varphi. \end{cases} \qquad (2.4.8)$$

Рассмотрим теперь влияние на действительную часть модели (2.4.7) показателя степени b_0, то есть – рассмотрим уравнение первой функции системы (2.4.8), поскольку второе уравнение описывает линейную взаимосвязь между действительной и мнимой частями комплексного аргумента, поскольку:

$$0 = r^{b_0} \sin b_0\varphi \to \sin b_0\varphi = \pi k \to \varphi = arctg\,\frac{x_i}{x_r} = const$$

При этом возможны три варианта поведения функции:

1) когда показатель степени отрицателен, $b_0<0$,
2) когда показатель степени лежит в пределах: $0<b_0<1$,
3) когда показатель степени больше единицы, $b_0>1$.

Рассмотрим первый случай, когда *показатель степени степенной функции комплексного аргумента* b_0 *меньше нуля*. Для удобства представим первое уравнение системы (2.4.8) в полном виде:

$$y = (\sqrt{x_r^2 + x_i^2})^{b_0} \cos(b_0 arctg\,\frac{x_i}{x_r}). \qquad (2.4.9)$$

Поскольку второе уравнение системы (2.4.8) фиксирует, что рассматриваемая функция на комплексной плоскости аргумента проецируется на прямую линию, проходящую через нулевую точку, и имеющую постоянную величину полярного угла, рассмотрим вначале – какие значения может принимать сомножитель, содержащий этот постоянный полярный угол. Косинус – функция периодическая, но аргумент этой функции не меняется, он всегда остаётся постоянным из-за постоянства полярного угла. Поверхность, описываемая в трёхмерном пространстве первым уравнением системы (2.4.8) является нелинейной, и её характер определяется коэффициентом b_0, поскольку он характеризует частоту колебаний – чем больше он по модулю, тем более неровной («гофрированной») является эта поверхность.

Так как в дальнейшем вид этой поверхности нам не понадобится, будем рассматривать исключительно характер линий в пространстве, образуемых системой (2.4.8).

Рассмотрим вначале ситуацию, когда полярный угол аргумента на комплексной плоскости равен нулю. Это возможно, когда $x_r>0$, $x_i=0$. Поскольку косинус нуля равен единице, (2.4.9) примет простой вид:

$$y = x_r^{b_0}\,. \qquad (2.4.10)$$

На плоскости (y,x_r) данная функция будет представлять собой гиперболу, которая с ростом модуля аргумента убывает от плюс бесконечности к нулю.

Теперь предположим, что полярный угол комплексного аргумента равен $\pi/4$, то есть переменные находятся в первом квадранте комплексной плоскости и $x_r=x_i$. Тогда функция (2.4.9) примет вид:

$$y = (x_r\sqrt{2})^{b_0}\cos(b_0\frac{\pi}{4})\,. \qquad (2.4.11)$$

Функция положительна при $-2<b_0<0$, равна нулю при $b_0=-2$, отрицательна при $-6<b_0<-2$ и т.д. Абсолютные значения функции для этого случая также уменьшаются с ростом модуля комплексного аргумента, как и ранее, но в случае отрицательных значений функции – от минус бесконечности до нуля.

Рассмотрим другой случай, когда равна нулю действительная часть комплексного аргумента: $x_r=0$, а его мнимая часть положительна: $x_i>0$. Полярный угол комплексного аргумента равен $\pi/2$ и функция примет вид:

$$y = x_i^{b_0}\cos(b_0\frac{\pi}{2})\,. \qquad (2.4.12)$$

Если коэффициент b_0 лежит в пределах $-1<b_0<0$ косинус функции (2.4.12) будет положительным, что означает положительность функции. В случае, когда показатель степени равен $b_0=-1$, косинус становится равным нулю и функция также равна нулю. Если значения этого коэффициента оказываются в пределах $-3<b_0<-1$, косинус функции становится отрицательным, как и сама функция. Поскольку косинус – функция периодическая, с последующим увеличением по модулю значений показателя степени b_0 функция становится как положительной, так и отрицательной. С ростом значений аргумента функции (2.4.12) абсолютные значения функции уменьшаются так же по гиперболе.

Продолжая дальше, легко убедиться в том, что степенная функция комплексного аргумента с отрицательным действительным показателем степени уменьшается по своим абсолютным значениям по гиперболическому закону с ростом модуля аргумента. При этом знак функции определяется результатом умножения показателя степени на полярный угол. В некоторых случаях функция равна нулю.

Во втором случае, когда показатель степени функции комплексного аргумента лежит в пределах $0<b_0<1$ функция ведёт себя несколько иначе.

Когда полярный угол аргумента на комплексной плоскости равен нулю при $x_r>0$, $x_i=0$, функция (2.4.9) имеет тот же вид:

$$y = x_r^{b_0}. \qquad (2.4.13)$$

Но так как показатель степени положителен и не больше единицы, с ростом модуля аргумента функция нелинейно возрастает от нуля до плюс бесконечности по степенному закону с отрицательной второй производной.

Если полярный угол комплексного аргумента равен $\pi/4$, когда переменные находятся в первом квадранте комплексной плоскости и $x_r=x_i$, функция (2.4.9) примет такое значение:

$$y = (x_r\sqrt{2})^{b_0}\cos(b_0\frac{\pi}{4}). \qquad (2.4.14)$$

Функция будет положительной при показателе степени, лежащем в пределах $0<b_0<2$ и равна нулю при $b_0=2$. Она будет отрицательной при $2<b_0<6$ и т.п. С ростом модуля комплексного аргумента абсолютные значения будет вести себя точно так же, как и в случае (2.4.13).

Нет смысла продолжать исследование этого случая далее, поскольку понятно, что функция будет вести себя именно так – её абсолютные значения будут нелинейно возрастать от нуля, а знак функции будет определяться показателем степени функции.

В третьем случае степенной функции с действительным показателем степени, когда показатель степени больше единицы $b_0>1$, функция (2.4.9) будет принимать отрицательные или положительные значения, а также значения, равные нулю, в зависимости от результата произведения показателя степени на полярный угол, поскольку косинус угла может быть и положительным, и отрицательным, и быть равным нулю. Но по своему абсолютному значению функция с ростом модуля комплексного аргумента будет стремиться от нуля к бесконечности по степенному закону с положительной второй производной.

Теперь можно вернуться к рассматриваемой модели с комплексным коэффициентом пропорциональности (2.4.2):

$$y = (a_0 + ia_1)(x_r + ix_i)^{b_0},$$

и более внимательно рассмотреть влияние этого коэффициента на поведение функции.

Значения этого комплексного коэффициента пропорциональности оказывают влияние и на модуль функции, и на полярный угол.

Модуль функции комплексного аргумента, равный $R = ar^{b_0}$, при разных значения коэффициента пропорциональности приводится к разному масштабу.

Полярный угол при изменении значений этого коэффициента пропорциональности также поворачивается на плоскости комплексного аргумента:

$$\varphi = \frac{\pm\pi k}{b_0} - \alpha.$$

Поэтому изменением коэффициента пропорциональности осуществляется перемещение кривой линии степенной функции в разных частях пространства симметрично оси y и изменение масштаба кривой.

2.5. Степенная функция комплексного аргумента с мнимым показателем степени

Рассмотрев случай, когда степенная функция комплексного аргумента (2.4.1) представлена вещественным показателем степени и функция представляет собой линию степенной функции, расположенной в трёхмерном пространстве, перейдём к более сложному случаю, когда действительная часть показателя этой функции равна нулю и аргумент возводится в мнимую степень:

$$y = (a_0 + ia_1)(x_r + ix_i)^{ib_1}. \qquad (2.5.1)$$

В этом случае будет моделироваться иная зависимость, отличная от степенной, хотя комплексный аргумент и возводится в степенью

Поскольку влияние коэффициента пропорциональности на результат в этом случае будет таким же как и прежде, примем, что коэффициент пропорциональности этой функции равен действительной единице:

$$a_0 + ia_1 = 1.$$

Тогда, представляя функцию в экспоненциальной форме, получим:

$$y = (re^{i\varphi})^{ib_1} = e^{-\varphi b_1} e^{ib_1 \ln r}, \qquad (2.5.2)$$

где $r = \sqrt{x_x^2 + x_i^2}, \varphi = arctg\frac{x_i}{x_r}$.

Откуда следует система уравнений для действительной и мнимой частей рассматриваемой функции:

$$\begin{cases} y = e^{-b_1 arctg\frac{x_i}{x_r}} \cos(b_1 \ln\sqrt{x_r^2 + x_i^2}), \\ 0 = e^{-b_1 arctg\frac{x_i}{x_r}} \sin(b_1 \ln\sqrt{x_r^2 + x_i^2}). \end{cases} \qquad (2.5.3)$$

Первое уравнение данной системы представляет собой описание некоторой нелинейной функции в трёхмерном пространстве о сути которой поговорим позже.

Второе уравнение данной системы представляет собой нелинейную поверхность, перпендикулярную плоскости комплексного аргумента, все прямые, лежащие на которой будут параллельны оси $0y$.

Пересечение этих двух поверхностей и есть графическая интерпретация функции (2.5.1) в пространстве.

Рассмотрим вначале – что представляет собой на плоскости комплексного аргумента второе уравнение:

$$0 = e^{-b_1 arctg\frac{x_i}{x_r}} \sin(b_1 \ln\sqrt{x_r^2 + x_i^2}). \quad (2.5.4)$$

Первый сомножитель может быть равен нулю только в том случае, когда показатель его степени равен бесконечности. Варианты, когда b_1 равен бесконечности, мы не рассматриваем из-за их бессмысленности. Арктангенс, как известно, лежит в пределах от $-\pi/2$ до $+\pi/2$. Следовательно, первый сомножитель (2.5.4) никогда не будет равен нулю и равенство выполняется, когда равен нулю второй сомножитель:

$$\sin(b_1 \ln\sqrt{x_r^2 + x_i^2}) = 0. \quad (2.5.5)$$

Это равенство выполняется в случае, когда

$$b_1 \ln\sqrt{x_r^2 + x_i^2} = \pi k. \quad (2.5.6)$$

Откуда следует такое равенство:

$$x_r^2 + x_i^2 = e^{2\frac{\pi k}{b_1}}. \quad (2.5.7)$$

Это означает, что равенство нулю мнимой части функции (2.5.1) выполняется в том случае, когда значения комплексного аргумента на комплексной плоскости лежат на окружности с радиусом $e^{2\frac{\pi k}{b_1}}$. В частности, если $k=0$, то равенство выполняется в том случае, когда

$$x_r^2 + x_i^2 = 1, \quad (2.5.8)$$

то есть, когда точки на комплексной плоскости лежат на единичной окружности.

Но k может принимать любые целые значения, что означает семейство окружностей на комплексной плоскости аргументов. В трёхмерном пространстве это есть цилиндрическая поверхность, перпендикулярная плоскости комплексного аргумента.

Теперь рассмотрим первое уравнение системы (2.5.3), относящееся к действительной части функции:

$$y = e^{-b_1 arctg\frac{x_i}{x_r}} \cos(b_1 \ln\sqrt{x_r^2 + x_i^2}). \quad (2.5.9)$$

Это уравнение описывает нелинейную поверхность в пространстве, но поскольку вид этой поверхности в дальнейшем никогда использоваться не будет, необходимо рассмотреть – какая линия на этой поверхности отсекается цилиндром, ведь функция комплексного аргумента (2.5.1) – это пересечение двух нелинейных поверхностей, одна из которых – цилиндр (2.5.7). Поэтому рассмотрим поведение уравнения (2.5.9) в том случае, когда переменные x_r и x_i лежат на какой-нибудь окружности.

В этом случае аргумент логарифма является величиной постоянной и сам логарифм также постоянен. Косинус константы есть величина постоянная, поэтому характер этой кривой полностью определяется первым сомножителем (2.5.9), который представляет собой экспоненту.

Так как комплексный аргумент изменяет свои значения по окружности, то в начальной точке, когда мнимая составляющая равна нулю и равен нулю полярный угол, а действительная часть равна радиусу окружности, первый сомножитель равен единице, поскольку любое число в нулевой степени равно единице. Тогда функция принимает такие значения при полярном угле, равном нулю:

$$y(0) = \cos(b_1 \ln r)\,. \quad (2.5.10)$$

При росте по окружности значений мнимой составляющей x_i и соответственном уменьшении вещественной составляющей x_r (полярный угол увеличивается), полярный угол комплексного аргумента стремится от нуля к π/2. В крайней точке, когда равна нулю действительная составляющая комплексного аргумента, функция примет вид:

$$y(\frac{\pi}{2}) = e^{-b_1 \frac{\pi}{2}} \cos(b_1 \ln r)\,. \quad (2.5.11)$$

В промежутке между этими двумя точками, функция будет меняться нелинейно по экспоненте от точек с координатами, определяемыми уравнением (2.5.10) до точек, определяемых уравнением (2.5.11).

Дальнейшее движение комплексного аргумента по окружности соответствует изменению полярного угла от π/2 до π. В крайней точке, когда полярный угол равен π, что означает равенство нулю мнимой составляющей, а действительная составляющая становится равной x_r=-r, функция принимает значения:

$$y(\pi) = e^{-b_1 \pi} \cos(b_1 \ln r)\,. \quad (2.5.12)$$

Продолжая движение по окружности, и переходя в точку, в которой равна нулю действительная часть, а мнимая равна x_i=-r, получим значение функции, равное

$$y(\frac{3}{2}\pi) = e^{-b_1 \frac{3\pi}{2}} \cos(b_1 \ln r)\,. \quad (2.5.13)$$

Завершая полный цикл движения по окружности, в точке, когда мнимая часть равна нулю, а действительная равен радиусу, функция принимает значение

$$y(2\pi) = e^{-b_1 2\pi} \cos(b_1 \ln r)\,. \quad (2.5.14)$$

Теперь становится понятным, что представляет собой в пространстве степенная функции комплексного аргумента, если показателем степени является мнимое число – это экспонента, которая расположена на поверхности цилиндра. Совершая полный цикл оборота по окружности, равный 2π, функция отличается от своей начальной точки в $e^{-b_1 2\pi}$ раз.

Если коэффициент b_1 положителен, то функция стремится к нулю; если же показатель степени отрицателен, то функция стремится к бесконечности, делая по поверхности цилиндра оборот за оборотом, если комплексный аргумент делает вращательные движения на комплексной плоскости. Но поскольку в экономике вращательных движений такого рода не наблюдается, что означает изменение полярного угла комплексного аргумента в пределах $0 \le \varphi \le 2\pi$, то следует рассматривать функцию (2.5.1) как экспоненту на поверхности цилиндра, делающую на его поверхности полный оборот один раз.

2.6. Степенная функция комплексного аргумента с комплексным показателем степени

В том случае, когда комплексный аргумент степенной функций возводится в действительную степень, в трёхмерном пространстве она представляет собой кривую, описываемую показательной функцией, и лежащей в пространстве на плоскости, перпендикулярной плоскости комплексного аргумента.

Если показатель степени этой функции является мнимым числом, то она представляет собой экспоненту, изменяющуюся с ростом полярного угла комплексной переменной и лежащей в пространстве на поверхности цилиндра, перпендикулярного плоскости комплексного аргумента.

Теперь рассмотрим характер степенной функции комплексного аргумента, для которого показатель степени является комплексным:

$$y = (a_0 + ia_1)(x_r + ix_i)^{(b_0 + ib_1)} . \quad (2.6.1)$$

Эту функцию, с учётом ранее введённых обозначений и при принятии допущения о равенстве единице комплексного коэффициента пропорциональности, можно в экспоненциальной форме записать так:

$$y = r^{b_0} e^{ib_0\varphi} e^{-\varphi b_1} e^{ib_1 \ln r} = r^{b_0} e^{-\varphi b_1} e^{i(b_0\varphi + b_1 \ln r)} . \quad (2.6.2)$$

Действительная и мнимая части этой функции могут быть записаны в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} y = r^{b_0} e^{-b_1\varphi} \cos(b_0\varphi + b_1 \ln r), \\ 0 = r^{b_0} e^{-b_1\varphi} \sin(b_0\varphi + b_1 \ln r). \end{cases} \quad (2.6.3)$$

Вновь имеем уравнения сложных нелинейных поверхностей в пространстве, причём второе уравнение описывает поверхность, перпендикулярную плоскости комплексного аргумента. Как и в предыдущих случаях, начнём изучение свойств функции (2.6.1) с условия равенства нулю мнимой части функции комплексного аргумента.

Условие равенства нулю второго уравнения будет выполняется в случаях, когда аргумент равен нулю и когда равен нулю синус:

$$\sin(b_0\varphi + b_1 \ln r) = 0 \qquad (2.6.4)$$

В нулевой точке и сама функция равна нулю, поэтому интерес представляет уравнение (2.6.4), которое может быть записано так:

$$b_0\varphi + b_1 r = \pi k , \quad (2.6.5)$$

где, как и ранее, k – целое число.

Примем для определённости $k=0$. Тогда (2.6.5) можно записать так:

$$r = \frac{-b_0}{b_1}\varphi . \quad (2.6.6)$$

Легко убедиться, что перед нами – спираль Архимеда, причём, при изменении полярного угла в пределах от $0 \le \varphi \le 2\pi$, коэффициент перед полярным углом должен быть всегда положительным, так как модуль комплексного аргумента не может быть отрицательным. А это значит, что знаки действительной и мнимой частей комплексного показателя степени должны быть противоположными друг другу.

Мы не рассматриваем вращающиеся процессы, которых в экономике практически нет, поэтому в рассматриваемом пространстве второе равенство системы (2.6.3) означает один оборот спирали Архимеда, точнее говоря – нелинейную поверхность в виде спирали Архимеда, перпендикулярную плоскости комплексного аргумента. Эта поверхность «вырезает» на другой поверхности, которая представлена первым уравнением системы (2.6.3) нелинейную кривую.

Нас не интересует вид поверхности, которую в пространстве описывает первое уравнение системы (2.6.3), а только то – какая именно линия на этой поверхности отсекается спиралью Архимеда.

Для того чтобы понять это, подставим (2.6.6) в первое уравнение системы (2.6.3). Получим:

$$y = \left(\frac{-b_0}{b_1}\varphi\right)^{b_0} e^{-b_1\varphi} \cos\left(b_0\varphi + b_1 \ln\left(\frac{-b_0}{b_1}\varphi\right)\right). \quad (2.6.7)$$

Поскольку ранее было показано, что b_0 и b_1 имеют противоположные знаки, примем вначале, что $b_0>0,\ b_1<0$. Для этого случая при росте полярного угла:

- первый сомножитель $\left(\frac{-b_0}{b_1}\varphi\right)^{b_0}$ возрастает по степенному закону;

- второй сомножитель $e^{-b_1\varphi}$ возрастает по экспоненте;

- третий сомножитель $\cos\left(b_0\varphi + b_1 \ln\left(\frac{-b_0}{b_1}\varphi\right)\right)$ меняется нелинейно в зависимости от модулей величин коэффициентов b_0 и b_1. Если сложный аргумент косинусоиды возрастает по модулю с ростом полярного угла, то этот сомножитель уменьшается до нуля, после чего становится отрицательным.

Таким образом (2.6.7) в целом описывает возрастающую до определённого предела функцию, с последующим её уменьшением до нуля и переходом в область отрицательных значений. Причём эта линия расположена на нелинейной поверхности спирали Архимеда в пространстве.

Если теперь поменять знаки коэффициентов на противоположные $b_0<0$, $b_1>0$, получим:

- первый сомножитель $\left(\frac{-b_0}{b_1}\varphi\right)^{b_0}$ уменьшается по степенному закону;

- второй сомножитель $e^{-b_1\varphi}$ уменьшается по экспоненте;

- третий сомножитель $\cos(b_0\varphi + b_1 \ln(\frac{-b_0}{b_1}\varphi))$ ведёт себя также как и в первом случае, поскольку косинус – функция симметричная.

В целом при таких знаках коэффициентов функция уменьшается с ростом аргумента и становится отрицательной, двигаясь при этом по поверхности спирали Архимеда.

Разные сочетания коэффициентов даёт разные формы кривой в пространстве, причём в том случае, когда равна нулю мнимая часть комплексного показателя степени, функция представляет собой точки, лежащие на линии показательной функции в пространстве, находящейся на плоскости, перпендикулярной плоскости комплексного аргумента. А когда становится близкой к нулю действительная часть комплексного показателя степени, кривая представляет собой экспоненту, лежащую на цилиндрической поверхности. Если показатель степени равен единице – перед нами линейная функция комплексного аргумента.

В завершение рассмотрения свойств этой функции, следует отметить, что коэффициенты функции могут быть легко оценены по двум точкам.

Пусть имеются в распоряжении экономиста две точки (x_{r1},x_{i1},y_1) и (x_{r2},x_{i2},y_2) и он считает, что между этими переменными существует взаимосвязь, которая может быть описана моделью в виде степенной функции комплексного аргумента (2.6.1). Подставляя эти значения в функцию и разделив левые и правые части равенств друг на друга, можно получить уравнение:

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_{r1}+ix_{i1}}{x_{r2}+ix_{i2}}^{(b_0+ib_1)} \quad . \quad (2.6.8)$$

Из него показатель степени находится элементарно:

$$b_0 + ib_1 = \frac{\ln \frac{y_1}{y_2}}{\ln \frac{x_{r1}+ix_{i1}}{x_{r2}+ix_{i2}}} . \quad (2.6.9)$$

Зная эту величину показателя степени, легко найти значение коэффициента пропорциональности (a_0+ia_1).

Так, например, если экономист хочет построить модель в виде степенной функции комплексного аргумента и в его распоряжении имеются две точки в трёхмерном пространстве - (2; 3; 5) и (2,5; 4,7; 15), сделать это с помощью (2.6.8) и (2.6.9) легко, и модель (2.6.1), проходящая в трёхмерном пространстве через эти две точки, будет иметь вид:

$$y = (-0,014 - i0,082)(x_r + ix_i)^{(2,648-i0,674)}$$

2.7. Показательная функция комплексного аргумента

Как можно понять из рассмотренных выше свойств степенной функции комплексного аргумента, она может использоваться для моделирования различного вида сложных нелинейных взаимосвязей в трёхмерном пространстве. Но эта модель вовсе не охватывает всё возможное многообразие функций комплексного аргумента. Одна из простых нелинейных функций комплексного аргумента, отличающихся свойствами от степенной функции, является показательная функция вида:

$$y = (a_0 + ia_1)e^{(b_0 + ib_1)(x_r + ix_i)} . \quad (2.7.1)$$

Для изучения её свойств вновь рассмотрим вначале ситуацию, когда коэффициент пропорциональности показателя степени сначала представляется только как действительный коэффициент, потом – когда он является мнимой частью, а затем уже можно рассмотреть функцию (2.7.1) в целом.

Показательная функция действительного аргумента с действительным коэффициентом показателя степени будет иметь вид:

$$y = (a_0 + ia_1)e^{b_0(x_r + ix_i)} . \quad (2.7.2)$$

В экспоненциальной форме она запишется так:

$$y = ae^{b_0 x_r} e^{i(\alpha + b_0 x_i)} . \quad (2.7.3)$$

Откуда для действительной и мнимой частей функции выполняются равенства:

$$\begin{cases} y = ae^{b_0 x_r} \cos(\alpha + b_0 x_i), \\ 0 = ae^{b_0 x_r} \sin(\alpha + b_0 x_i). \end{cases} \quad (2.7.4)$$

Равенство нулю мнимой части рассматриваемой функции может быть в двух случаях – когда при положительном коэффициенте показателя степени $x_r \to -\infty$ или когда

$$\alpha + b_0 x_i = \pi k . \quad (2.7.5)$$

Ситуации, когда один из факторов или все факторы стремятся к бесконечности, в экономике не встречаются, поэтому сконцентрируем внимание на равенстве (2.7.5).

Последнее условие представляет собой совокупность уравнений прямой линии на комплексной плоскости аргумента, параллельных оси действительных значений комплексного аргумента, поскольку из (2.7.5) следует равенство:

$$x_i = \frac{\pi k - \alpha}{b_0} . \quad (2.7.6)$$

В простом случае, когда k=0, на комплексной плоскости располагается прямая

$$x_i = -\frac{\alpha}{b_0} . \quad (2.7.7)$$

Поскольку изучается задача представления функции в трёхмерном пространстве, (2.7.7) представляет собой плоскость, перпендикулярную плоскости комплексного аргумента и параллельную осям действительной части комплексного аргумента x_r и функции y.

Первое уравнение системы (2.7.4) описывает в трёхмерном пространстве нелинейную поверхность. Рассмотрим её.

В том случае, когда действительная часть комплексного аргумента есть величина постоянная $x_r=d=const$, функция меняется по косинусоиде:

$$y = ae^{b_0 d}\cos(\alpha + b_0 x_i). \quad (2.7.8)$$

Когда постоянной является мнимая часть комплексного аргумента $x_i=g=const$, то функция меняется по экспоненциальному закону:

$$y = ae^{b_0 x_r}\cos(\alpha + b_0 g). \quad (2.7.9)$$

Поскольку последнее условие как раз и является ограничением (2.7.7), которое следует из равенства нулю мнимой части рассматриваемой функции, то в трёхмерном пространстве показательная функция комплексного аргумента с действительным коэффициентом показателя степени представляет собой экспоненту:

$$y = ae^{b_0 x_r}\cos(\alpha + b_0\frac{\pi k - \alpha}{b_0}) = ae^{b_0 x_r}. \quad (2.7.10)$$

Пусть теперь показательная функция действительного аргумента имеет мнимый коэффициент показателя степени:

$$y = (a_0 + ia_1)e^{ib_1(x_r + ix_i)}. \quad (2.7.11)$$

В экспоненциальной форме она запишется так:

$$y = ae^{-b_1 x_i}e^{i(\alpha + b_1 x_r)}. \quad (2.7.12)$$

Откуда для действительной и мнимой частей функции:

$$\begin{cases} y = ae^{-b_1 x_i}\cos(\alpha + b_1 x_r), \\ 0 = ae^{-b_1 x_i}\sin(\alpha + b_1 x_r). \end{cases} \quad (2.7.13)$$

Равенство нулю мнимой части рассматриваемой функции означает выполнение условия:

$$\alpha + b_1 x_r = \pi k. \quad (2.7.14)$$

Или:

$$x_r = \frac{\pi k - \alpha}{b_1}. \quad (2.7.15)$$

То есть – вновь получено уравнение прямых линий, которые на плоскости комплексного аргумента проходят параллельно мнимой оси. Можно ограничиться случаем, когда $k=0$. В рассматриваемом пространстве это уравнение означает плоскость, перпендикулярную плоскости комплексного аргумента и проходящую через линию (2.7.15).

А это значит, что на сложной нелинейной поверхности, которая описывается первым равенством (2.7.13), определяется кривая с постоянным значением x_r. Легко убедиться из первого уравнения системы (2.7.13), что такая кривая описывается экспонентой:

$$y = Ñe^{-b_1 x_i}, \quad C = a\cos(\alpha + b_1 x_r), \quad x_r = const.$$

Теперь можно понять, что будет представлять собой полная показательная функция комплексного аргумента. Вновь представим комплексные величины модели – коэффициент пропорциональности и комплексный аргумент в экспоненциальной форме. Группируя составляющие модуля и полярного угла, получим:

$$y = ae^{b_0x_r - b_1x_i}e^{i(\alpha + b_1x_r + b_0x_i)}. \qquad (2.7.16)$$

Представляя эту модель как систему равенств действительной и мнимой частей, имеем:

$$\begin{cases} y = ae^{b_0x_r - b_1x_i}\cos(\alpha + b_1x_r + b_0x_i) \\ 0 = ae^{b_0x_r - b_1x_i}\sin(\alpha + b_1x_r + b_0x_i) \end{cases}. \qquad (2.7.17)$$

Из последнего равенства системы легко получить:

$$x_i = \frac{1}{b_0}(\pi k - \alpha - b_1x_r). \qquad (2.7.18)$$

Это уравнение описывает семейство параллельных прямых на комплексной плоскости аргумента. В простом случае, когда *k=0*, на плоскости – это прямая линия, а в пространстве – плоскость, перпендикулярная комплексной плоскости аргумента. И прямая линия, и плоскость определены на всей области значений задачи.

Эта плоскость отсекает на поверхности, определяемой первым уравнением системы (2.7.17) некоторую линию:

$$y = ae^{b_0x_r - b_1x_i}\cos(\alpha + b_1x_r + b_0x_i). \qquad (2.7.19)$$

Подставляя в неё (2.7.18), получим:

$$y = ae^{b_0x_r - \frac{b_1}{b_0}(\pi k - \alpha - b_1x_r)}\cos(\alpha + b_1x_r + (\pi k - \alpha - b_1x_r)) = ae^{\frac{b_1}{b_0}(\alpha - \pi k) + \frac{b_0^2 + b_1^2}{b_0}x_r}. \qquad (2.7.20)$$

То есть – перед нами экспонента в пространстве, расположенная при этом на плоскости, перпендикулярной комплексной плоскости аргумента.

2.8. Логарифмическая функция комплексного аргумента

Изучим теперь свойства логарифмической функции комплексного аргумента. Как известно, логарифм комплексной переменной есть функция периодическая, поэтому при её рассмотрении сразу же оговариваются - какую часть этой функции изучают. В первой главе монографии было определено, что из всей совокупности значений логарифмов будем рассматривать исключительно главные значения.

Логарифмическая функция комплексного аргумента в общем виде может быть представлена так:

$$y = (a_0 + ia_1) + (b_0 + ib_1)\ln(x_r + ix_i). \qquad (2.8.1)$$

Применяя к рассматриваемой модели формулу логарифма комплексного аргумента, получим:

$$y = (a_0 + ia_1) + (b_0 + ib_1)(\ln\sqrt{x_r^2 + x_i^2} + iarctg\frac{x_i}{x_r}) \quad (2.8.2)$$

Рассмотрим вариант, когда равна нулю мнимая часть комплексного коэффициента пропорциональности:

$$y = (a_0 + ia_1) + b_0(\ln\sqrt{x_r^2 + x_i^2} + iarctg\frac{x_i}{x_r}) \quad (2.8.3)$$

Раскрывая скобки и группируя действительную и мнимую части данного уравнения, получим:

$$y = a_0 + b_0\ln\sqrt{x_r^2 + x_i^2} + i(a_1 + b_0 arctg\frac{x_i}{x_r}). \quad (2.8.4)$$

Из этого следуют два равенства для действительной и мнимой частей:

$$\begin{cases} y = a_0 + b_0\ln\sqrt{x_r^2 + x_i^2}, \\ 0 = a_1 + b_0 arctg\dfrac{x_i}{x_r}. \end{cases} \quad (2.8.5)$$

Второе уравнение представляет собой требование постоянства полярного угла на плоскости комплексного аргумента:

$$arctg\frac{x_i}{x_r} = -\frac{a_1}{b_0}, \quad (2.8.6)$$

что означает уравнение прямой линии, проходящей через окрестности нулевой точки, но не включающей её в себя. Нулевая точка не существует и для первого уравнения, поскольку логарифм нуля не существует.

Первое уравнение системы (2.8.5) описывает нелинейную поверхность в трёхмерном пространстве. Нас интересует расположение на этой поверхности той линии, которая удовлетворяет условию (2.8.6). Поэтому рассмотрим уравнение

$$y = a_0 + b_0\ln\sqrt{x_r^2 + x_i^2},$$

когда выполняется условие:

$$x_i = dx_r$$

Подставляя его в уравнение, получим:

$$y = a_0 + b_0\ln x_r\sqrt{1 + d^2}. \quad (2.8.7)$$

Следовательно, логарифмическая функция комплексного аргумента с действительным коэффициентом пропорциональности представляет собой в трёхмерном пространстве логарифмическую функцию, проходящую через нулевую точку, и лежащую на плоскости, перпендикулярной комплексной плоскости аргумента.

Теперь рассмотрим второй крайний вариант, когда равна нулю действительная часть комплексного коэффициента пропорциональности:

$$y = (a_0 + ia_1) + ib_1(\ln\sqrt{x_r^2 + x_i^2} + iarctg\,\frac{x_i}{x_r}) \quad (2.8.8)$$

Группируя действительную и мнимую части данной функции, получим систему:

$$\begin{cases} y = a_0 - b_1 arctg\,\frac{x_i}{x_r}, \\ 0 = a_1 + b_1 \ln\sqrt{x_r^2 + x_i^2}. \end{cases} \quad (2.8.9)$$

Равенство нулю мнимой части функции означает, что на комплексной плоскости аргумента функция определена на окружности, поскольку это равенство легко приводится к виду:

$$\sqrt{x_r^2 + x_i^2} = e^{-\frac{a_1}{b_1}} = const = d \quad (2.8.10)$$

Нулевая точка не входит в область определения функции в силу того, что логарифм нуля не существует. В рассматриваемом пространстве второе уравнение системы (2.8.9) представляет цилиндрическую поверхность. Эта цилиндрическая поверхность отсекает на поверхности первого уравнения некоторую кривую, вид которой нас и интересует.

Поскольку полярный угол на плоскости комплексного аргумента изменяется по окружности, то на поверхности, описываемой первым уравнением системы (2.8.9), определяется кривая, представляющая собой функцию арктангенса, лежащую на поверхности цилиндра, перпендикулярного комплексной плоскости аргумента.

Общая логарифмическая функция комплексного аргумента (2.8.1) представляет собой сложную суперпозицию этих двух функций. Раскрывая скобки в правой части равенства (2.8.1) и группируя действительную и мнимую части, получим:

$$y = a_0 + b_0 \ln\sqrt{x_r^2 + x_i^2} - b_1 arctg\,\frac{x_i}{x_r} + i(a_1 + b_1 \ln\sqrt{x_r^2 + x_i^2} + b_0 arctg\,\frac{x_i}{x_r}). \quad (2.8.11)$$

Это равенство выполняется в том и только том случае, когда равны друг другу действительные и мнимые части:

$$\begin{cases} y = a_0 + b_0 \ln\sqrt{x_r^2 + x_i^2} - b_1 arctg\,\frac{x_i}{x_r} \\ 0 = a_1 + b_1 \ln\sqrt{x_r^2 + x_i^2} + b_0 arctg\,\frac{x_i}{x_r} \end{cases}. \quad (2.8.12)$$

Второе уравнение системы описывает кривую линию на плоскости комплексного аргумента, не включающую в себя нулевую точку:

$$0 = a_1 + b_1 \ln\sqrt{x_r^2 + x_i^2} + b_0 arctg\,\frac{x_i}{x_r}. \quad (2.8.13)$$

Примерный вид этой функции можно представить из расположения на плоскости функции с такими коэффициентами:

$$0 = -3\ln\sqrt{x_r^2 + x_i^2} + 0,2arctg\frac{x_i}{x_r}. \quad (2.8.14)$$

Вид этой функции представлен на рис.2.13.

Первое уравнение системы (2.8.12) представляет собой поверхность сложной формы, общий вид которой можно представить так – в пространстве множество линий типа тех, которые изображены на рис. 2.13, располагаются параллельно друг другу, и, в зависимости от коэффициентов функции, возрастая по оси $0y$ или уменьшаясь с ростом аргумента. Эта поверхность пересекается другой поверхностью, перпендикулярной плоскости комплексного аргумента, и проходящей на плоскости комплексного аргумента через точки, определённые линией (2.8.13). Пересечение этих двух плоскостей и даёт некоторую линию в пространстве по форме напоминающей линию рис. 2.13.

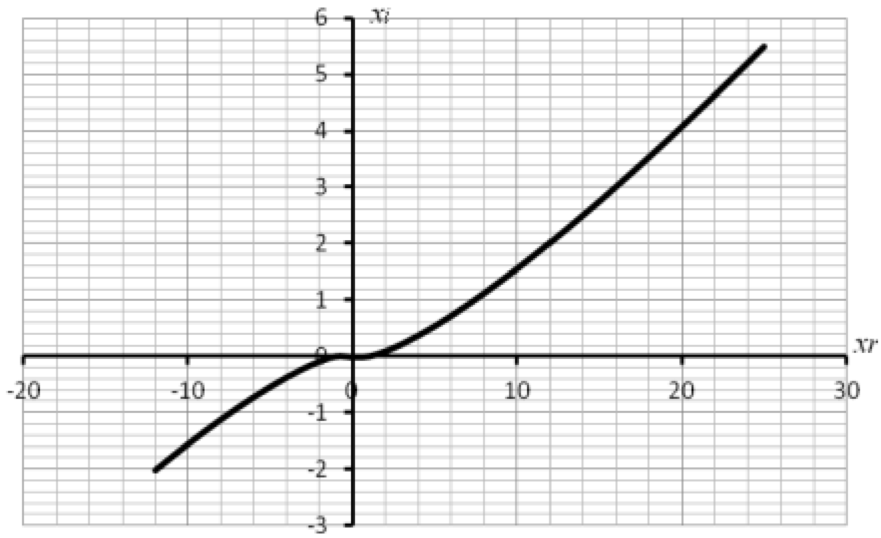


Рис.2.13. Линия (2.8.14) на плоскости комплексного аргумента

Рассмотренными функциями комплексного аргумента вовсе не исчерпывается всё их множество, но представляется, что из числа тех, которые могут быть использованы в экономической практике, приведённые выше функции являются основными.