Глава третья. Конформные отображения функций комплексного переменного

3.1. Степенные функции комплексного переменного

Поскольку функции комплексного переменного имеют аналоги в области действительных переменных, очень часто модели комплексных переменных рассматривают как удобную форму записи сложных зависимостей у области действительных переменных. Особенно ярко это свойство – просто описывать сложные взаимосвязи в поле действительных переменных, демонстрируют функции комплексного переменного, которые и будут рассмотрены в этой главе. Нас интересуют те свойства функций комплексного переменного и те части теории функций комплексного переменного, которые могут найти применение в моделировании экономики. Именно под таким углом и будут рассмотрены основные функции комплексного переменного.

Наиболее часто в практике моделирования экономики может использоваться степенная функция комплексного переменного. Обозначим, как и ранее, объясняющую комплексную переменную таким образом:

$$z = x_r + ix_i = re^{i\varphi}, \qquad (3.1.1)$$

где x_r - действительная часть комплексной переменной;

x_i - мнимая часть комплексной переменной;

r - модуль комплексной переменной $r = \sqrt{x_r^2 + x_i^2}$,

φ - полярный угол этой переменной (аргумент комплексной переменной $Arg\, z$):

$$\varphi = Argz = arctg\, {x_i}/{x_r},$$

i – мнимая единица.

Результирующую переменную представим в виде другой комплексной переменной:

$$w = y_r + iy_i = \rho e^{i\theta}, \qquad (3.1.2)$$

где y_r - действительная часть комплексной результирующей переменной;

y_i - мнимая часть комплексной результирующей переменной;

ρ - модуль комплексной переменной $\rho = \sqrt{y_r^2 + y_i^2}$,

θ - полярный угол этой переменной:

$$\theta = Argw = arctg\, {y_i}/{y_r}.$$

Будем считать, что все переменные, рассматриваемые в монографии, в соответствии с общими аксиоматическими посылками, являются безразмерными либо одной размерности и одного масштаба. Кроме того, они определены на всей области комплексной плоскости. С учётом введённых обозначений, степенная функция комплексных переменных будет иметь вид:

$$y_r + iy_i = (a_0 + ia_1)(x_r + ix_i)^{b_0 + ib_1} . \qquad (3.1.3)$$

В экспоненциальной форме, используя (3.1.1) и (3.1.2), степенную модель комплексных переменных (3.1.3) можно представить в таком виде:

$$\rho e^{i\theta} = (a_0 + ia_1)(re^{i\varphi})^{b_0 + ib_1} . \qquad (3.1.4)$$

Рассмотрим, как и прежде, вначале простую форму степенной функции комплексных переменных, когда все коэффициенты являются действительными числами, а потом будем постепенно усложнять модель. Пусть при этом коэффициент пропорциональности равен единице *a=1*, а показатель степени представлен как натуральное число *b=n*. Модель примет вид:

$$y_r + iy_i = (x_r + ix_i)^n . \qquad (3.1.5)$$

Удобнее свойства этой функции рассматривать в экспоненциальной форме:

$$\rho e^{i\theta} = r^n e^{in\varphi},$$

откуда в силу свойств равенства комплексных чисел:

$$\begin{cases} \rho = r^n, \\ \theta = n\varphi. \end{cases}$$

Тогда понятно, что конформное отображение, осуществляемое функцией (3.1.5), сводится к растяжению модуля комплексной переменной *z* в *n*-ю степень и увеличению полярного угла комплексной переменной *z* в *n* раз. Если рассматривать комплексную переменную *z* как вектор в полярных координатах, то вектор поворачивается на угол

$$(n-1)\varphi .$$

Так как полярный угол определяется с точностью до периода, то периодичны любые функции от него. Откуда со всей очевидностью следует, что комплексные числа z_1 и z_2 с равными модулями и аргументами, отличающимися друг от друга на число, кратное *2π/n*, переходят при отображении (3.1.5) в одну точку.

В теории функций комплексного переменного существует понятие взаимно однозначного или однолистного отображения. Оно определяется так: если функция *w=f(z)* однозначна на множестве *M* и при этом двум различным точкам на этом множестве *M* комплексной плоскости *w* всегда соответствуют различные точки *N* на комплексной плоскости *z*, то такое отображение является однолистным[1]. В противном случае такое отображение является многолистным. Для рассматриваемой степенной функции однолистность выполняется только в отдельных секторах комплексной плоскости *z*, а именно в тех, в которых выполняется условие, ограничивающее величину полярного угла исходной переменной:

$$k2\pi / n < \varphi < (k+1)2\pi / n ,$$

где *k* – натуральное число.

---

[1] Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Функция одного переменного: В 2-х ч. Ч.1. – СПб.: Издательство «Лань», 2004. – 336 с

Если показатель степени функции (3.1.5) не будет являться целым числом $b \neq n$, что и следует ожидать для большинства экономических задач, то характер рассуждений не изменится. Модуль отображаемой переменной z увеличивается в b-ю степень, а угол поворачивается против часовой стрелки в b раз. Разве что в условии однолистности вместо натурального n следует подставлять нецелое b:

$$k2\pi / b < \varphi < (k+1)2\pi / b.$$

При значениях комплексного фактора z, когда полярный угол φ выходит за рамки ограничений (3.1.6), функция становится многолистной, то есть существует множество точек на комплексной плоскости объясняющих переменных z, которые с помощью формулы (3.1.5) будут отображаться на комплексную плоскость результатов w в одну и ту же точку. Например, при значении показателя степени $b=3,128$ один и тот же результат $w(y_r,y_i)$ можно получить, если привлечь пять единиц x_r и две единицы x_i или же привлечь меньшее количество единиц x_r – две, но увеличить количество единиц x_i до пяти (рис.3.1).

На рис. 3.1 первая точка комплексной плоскости $z(5,2)$ отображается на комплексной плоскости результатов в точку w_1. Другая точка на комплексной плоскости $z(2,5)$ отображается в точку на комплексной плоскости результатов w_2. Координаты точки w_1 и координаты точки w_2 совпадают друг с другом. Поэтому получается, что комплексная переменная z, проходя из первой точки $z(5,2)$ по окружности до точки $z(2,5)$, с помощью степенной функции с показателем степени $b=3,128$, отображается на комплексную плоскость результатов w также на окружность, но с другим радиусом, делающую полный цикл, начиная с точки w_1 и заканчиваясь в точке w_2.

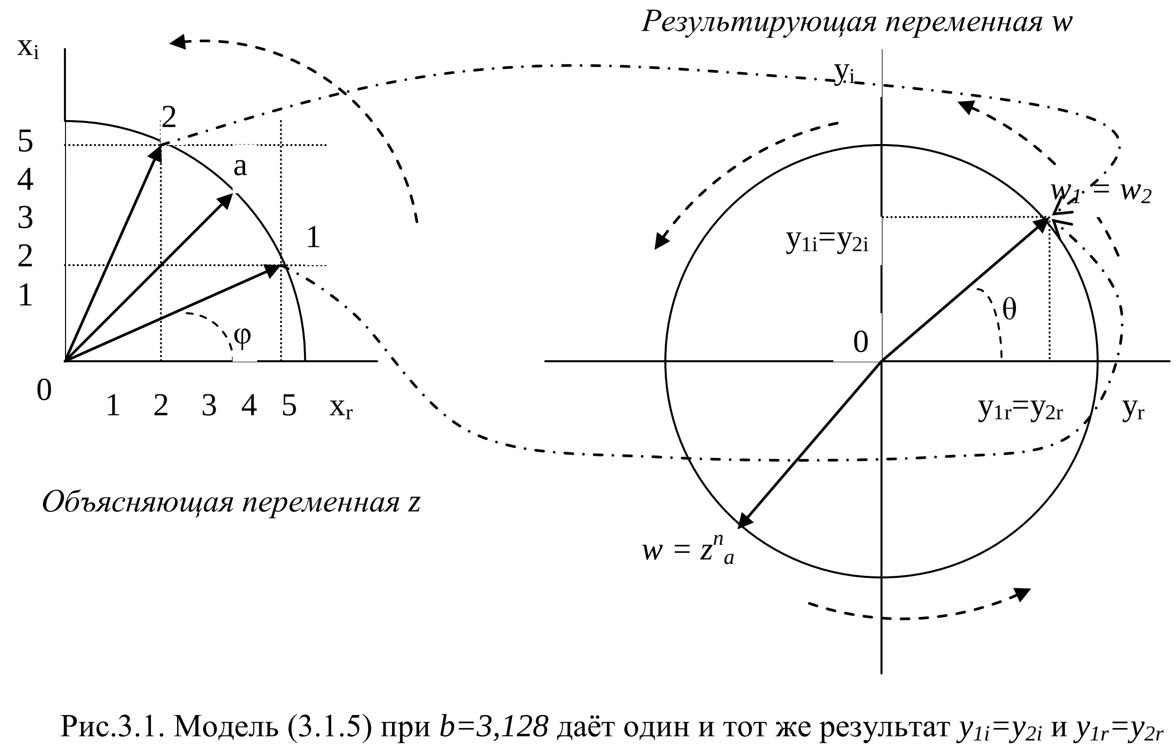

Рис.3.1. Модель (3.1.5) при $b=3,128$ даёт один и тот же результат $y_{1i}=y_{2i}$ и $y_{1r}=y_{2r}$ при разных $x_{1r}=5;x_{1i}=2$ и $x_{2r}=2;x_{2i}=5$

Если продолжать и далее движение на комплексной плоскости z по изображённой на рисунке окружности против часовой стрелки, то конформное отображение этого движения на плоскость результатов w будет вновь соответствовать движению по окружности из точки $w_1=w_2$ против часовой стрелки. И вновь на результирующей плоскости точки пройдут полный цикл, в то время, когда на плоскости z точки пройдут только сектор окружности.

Это и означает многолистность конформного отображения – на комплексной плоскости z есть множество точек, которые отображаются на другую комплексную плоскость w в одну и ту же точку. То есть, один и тот же результат можно получить при разном сочетании действительной и мнимой составляющей комплексного фактора.

Поскольку модель (3.1.5) представляет собой равенство друг другу действительной и мнимой частей, то они составляют систему двух действительных уравнений:

$$\begin{cases} y_r = (\sqrt{x_r^2 + x_i^2})^b \cos(barctg \dfrac{x_i}{x_r}), \\ y_i = (\sqrt{x_r^2 + x_i^2})^b \sin(barctg \dfrac{x_i}{x_r}). \end{cases} \quad (3.1.6)$$

Вряд ли можно представить себе в экономике ситуацию, когда комплексный аргумент изменялся бы циклично по некоторой раз и навсегда заданной окружности. А именно в этом случае степенная функция представляет собой окружность. Чаще всего встречаются ситуации либо роста комплексного аргумента, приближающегося к линейному, либо – нелинейная динамика.

В первом случае, когда комплексный аргумент меняется линейно, возможно два варианта:

- когда прямая линия будет проходить через нулевую точку на комплексной плоскости аргумента, и полярный угол комплексного аргумента будет являться величиной постоянной;
- когда прямая линия не проходит через нулевую точку и полярный угол комплексного аргумента меняется.

В первом случае с ростом модуля аргумента действительная и мнимая части комплексной функции будут меняться нелинейно по степенному закону в зависимости от показателя степени b, но на комплексной плоскости результат будет отражаться на прямой линии.

Во втором случае действительная и мнимая составляющая меняются нелинейно по более сложному закону, поскольку представляют собой результат умножения двух составляющих – степенной функции и периодической составляющей. На комплексной плоскости они будут представлять гладкие нелинейные функции, монотонно возрастающие или убывающие в зависимости от значений аргументов и того, как будет меняться полярный угол – убывать (если прямая линия проходит выше нулевой точки) или возрастать (если прямая линия проходит ниже нулевой точки).

В случае, когда аргумент меняется нелинейно, то рассматриваемая функция будет моделировать разные нелинейные зависимости на комплексной плоскости результата. На рис. 3.2 показано как переход аргумента из точки 1 в точку 2 будет отражаться на комплексной плоскости результата.

Рис.3.2. Конформное отображение $w=z^b$ при $1 < b < 1{,}5$ когда аргумент перемещается из точки 1 в точку 2

Рассмотрим теперь особенности поведения степенной функции (3.1.5) с показателем степени b, лежащим в пределах:

$$0<b<1. \tag{3.1.7}$$

Пусть $b=1/n$, где n – любое целое положительное число. Эта функция хорошо исследована в теории функций комплексных переменных, её поведение изучается на примере замкнутых кривых, лежащих на комплексной плоскости, содержащих (рис.3.3) или не содержащих (рис.3.4) внутри себя точку $z=0$.

В первом случае отображение комплексной переменной с помощью функции (3.1.5) даёт n непрерывных и однозначных функций, называемых ветвями многозначной функции (3.1.5) при условии (3.1.7), каждая из которых принимает одно из значений $\sqrt[n]{z}$, поскольку при обходе замкнутой кривой, содержащей внутри себя точку $z=0$, аргумент комплексной переменной факторов получает приращение 2π и точка $w=\sqrt[n]{z}$ при таком аргументе на плоскости комплексного результата не возвращается к своему начальному положению до тех пор, пока вектор на комплексной плоскости фактора не осуществит n-кратный обход замкнутой кривой.

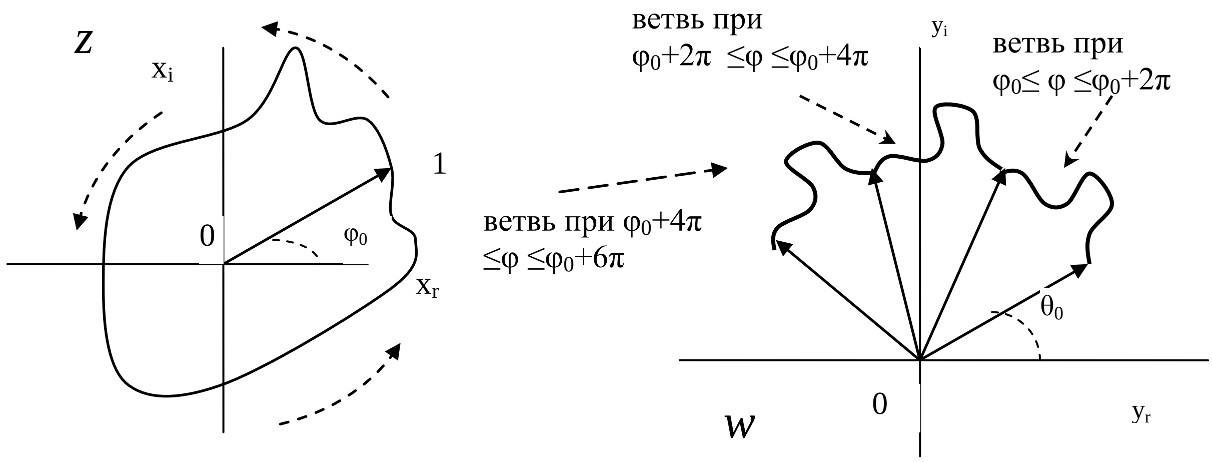

Рис.3.3. Случай конформного отображения замкнутой кривой на комплексной плоскости (x_r,x_i), содержащей внутри себя нулевую точку, с помощью функции $w=z^b$ на комплексную плоскость (y_r,y_i) при $0 < b < 1$

Иначе говоря, вектор на плоскости фактора z, сделав полный оборот, отобразится на комплексной плоскости результата w только в виде одной незамкнутой кривой. Если вектор фактора z сделает ещё один оборот, то на комплексной плоскости результата w это будет отражаться точками, лежащими на следующей кривой, по форме подобной первой, но следующей за ней на комплексной плоскости против часовой стрелки. И так ветви на комплексной плоскости результата w будут прирастать до тех пор, пока, наконец, не замкнутся. Но это произойдёт только в том случае, когда вектор фактора z сделает оборот на своей плоскости ровно n раз.

Во втором случае, когда замкнутая кривая не содержит внутри себя нулевую точку (рис.3.4), аргумент комплексной переменной ресурсов не получает приращение 2π, поскольку не делает полный круг относительно начала координат, поэтому каждой точке на плоскости факторов функция (3.1.5) при (3.1.7) ставит в соответствие одну и только одну точку на плоскости комплексных результатов.

Из этого следует, что во втором случае замкнутой кривой на плоскости z будет соответствовать замкнутая кривая на результирующей комплексной плоскости w.

Без нарушения общности можно распространить эти рассуждения и на другие случаи условия (3.1.7), то есть, когда показатель степени $b=1/n$ принимает на обозначенном промежутке любые значения, в том числе, когда n не является целым.

Какой из этих двух возможных вариантов следует отнести к случаям экономической практики, когда могут использоваться степенные комплекснозначные функции? Конечно же, существенная, если не самая большая часть экономических показателей в экономике рассматривается исключительно в первом квадранте декартовой системы координат, поскольку они по своей сути являются неотрицательными (себестоимость, объём произведённой продукции, количество потреблённой электроэнергии, производительность труда, количество занятых в производстве и т.п.).

Валовая прибыль как показатель эффективности производства может быть и отрицательной, если предприятие работает в убыток, но такие случаи отрицательности экономических переменных встречаются очень редко.

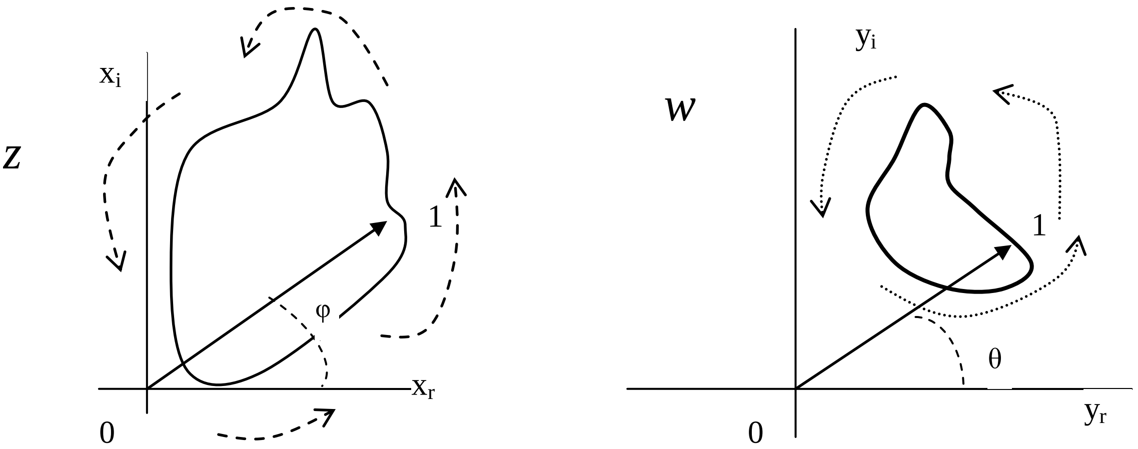

Рис.3.4. Случай конформного отображения замкнутой кривой на комплексной плоскости (x_r,x_i), не содержащей внутри себя нулевую точку, с помощью функции $w=z^b$ на комплексную плоскость (y_r,y_i) при 0 < b < 1

Таким образом, наибольший интерес для экономиста представляет характер конформного отображения с помощью изучаемой модели незамкнутой кривой, лежащей в первом квадранте комплексной плоскости факторов, то есть, когда исходные переменные модели положительны.

Действительная и мнимая части рассматриваемой функции будут представлять собой систему двух уравнений:

$$\begin{cases} y_r = (\sqrt{x_r^2 + x_i^2})^{\frac{1}{n}} \cos(\frac{1}{n} arctg \frac{x_i}{x_r}), \\ y_i = (\sqrt{x_r^2 + x_i^2})^{\frac{1}{n}} \sin(\frac{1}{n} arctg \frac{x_i}{x_r}). \end{cases}$$

Если n стремится к бесконечности, действительная часть функции стремится к единице, а мнимая – к нулю. Во всех остальных случаях функция моделирует нелинейную динамику действительной и мнимой частей при росте аргумента. Например, если на комплексной плоскости аргумента его значения ложатся на прямой линии, проходящей ниже нулевой точки, например, описываемой уравнением

$$x_i = x_r - 3{,}55, \qquad (3.1.8)$$

то при $n=3$ и $x_r=1,2,3,\ldots 40$ на комплексной плоскости точки функции будут лежать на кривой, график которой приведён на рис. 3.5.

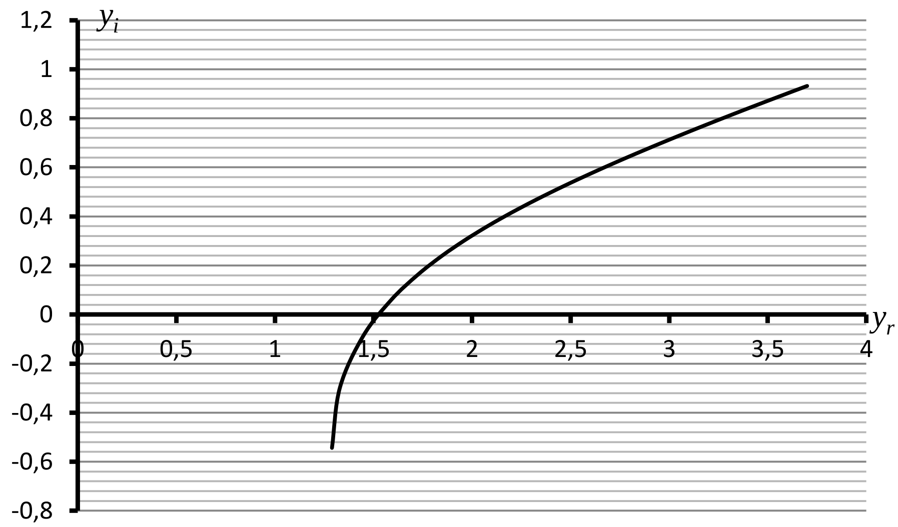

Рис.3.5. Вид функции (3.1.5) при аргументе (3.1.8) и показателе степени $b=1/3$

Для этого же значения показателя степени, но в случае, когда аргумент описывается прямой линией, проходящей выше нулевой точки, например, так:

$$x_i = x_r + 3{,}55, \quad (3.1.9)$$

линия опишет возрастающую кривую другой формы, изображённую на рис. 3.6.

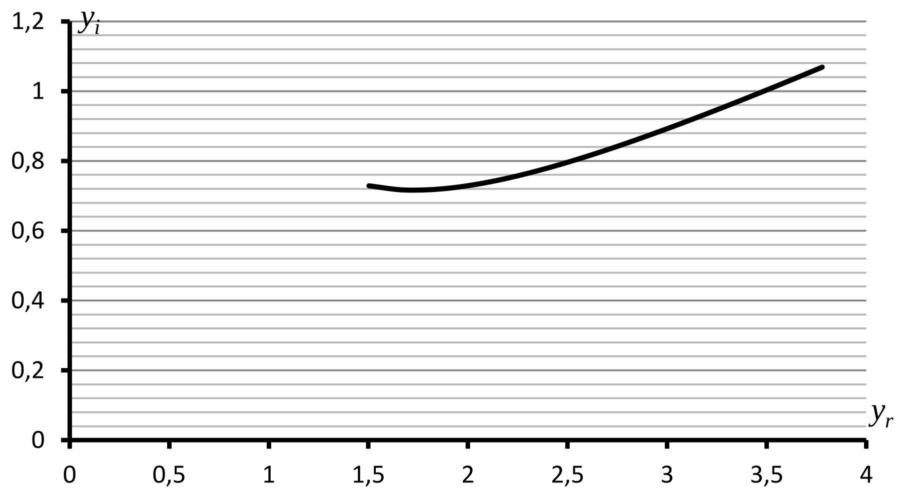

Рис.3.6. Вид функции (3.1.5) при аргументе (3.1.9) и показателе степени $b=1/3$

Если показатель степени будет отрицательным, то любое увеличение аргумента z неминуемо приводит к уменьшению значений функции w - увеличение модуля аргумента r ведёт к уменьшению модуля функции ρ, а увеличение полярного угла φ – к повороту в противоположную сторону конформного отображения, ведь для этого случая

$\rho = r^{-b}$, θ=-bφ. (3.1.10)

Могут ли в экономике встречаться случаи, когда комплекснозначная степенная функция будет иметь отрицательный показатель степени? Такие варианты в экономической практике вполне возможны, когда, например, в производстве наступает ситуация, при которой дополнительное привлечение трудовых и капитальных ресурсов только ухудшает производственные результаты (модуль комплексной переменной производственных результатов уменьшается) или, иначе говоря, сокращение занятых на производстве и закрытие некоторых производств (например, непрофильных), положительно сказывается на производственных результатах – растёт объём валового выпуска и увеличивается валовая прибыль. Такие случаи не редки в экономической ситуации, особенно в условиях кризиса.

Это означает, что комплекснозначная степенная функция с отрицательным показателем степени имеет право на существование в комплекснозначной экономике.

Конформное отображение степенной функции при отрицательном показателе степени вновь будет нелинейным. Если аргумент возрастает по линейному закону (3.1.8) и в тех же пределах, что и раньше, а показатель степени равен b=-1/3, то функция изменяет свои значения по часовой стрелке от y_r=0,658, y_i=0,278 до точки с координатами y_r=0,254, y_i=-0,064.

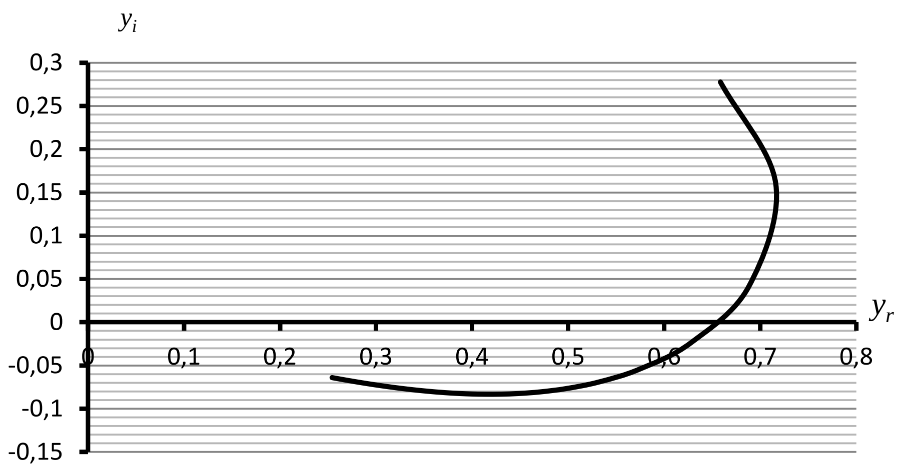

Рис.3.7. Вид функции (3.1.5) при аргументе (3.1.8) и показателе степени b=-1/3

В случае, когда линия аргумента проходит выше нулевой точки так, как это описано зависимостью (3.1.9), уменьшение модуля функции будет отображаться кривой другой формы, как это изображено на рис. 3.8 – против часовой стрелки от точки с координатами y_r=0,539, y_i=-0,261 до точки с координатами y_r=0,245, y_i=-0,069.

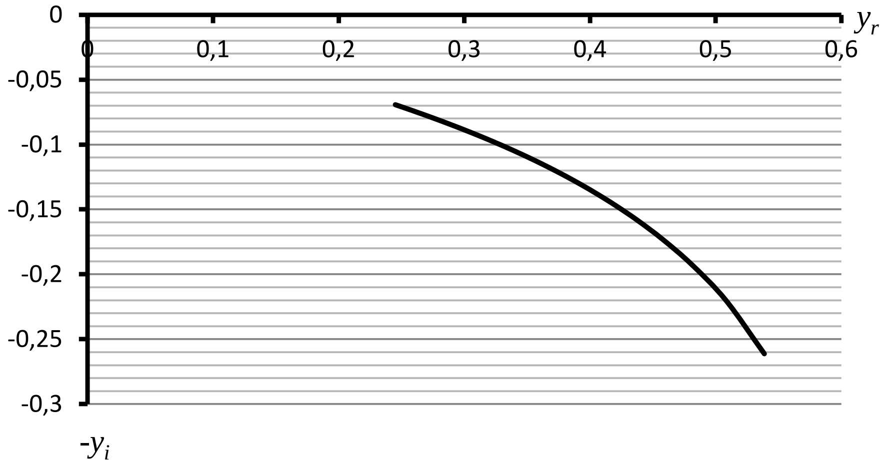

Рис.3.8. Вид функции (3.1.5) при аргументе (3.1.9) и показателе степени $b=-1/3$

Рассмотрим теперь степенную функцию комплексных переменных с мнимым показателем степени и коэффициентом пропорциональности, равным единице:

$$y_r + iy_i = (x_r + ix_i)^{ib}. \qquad (3.1.11)$$

Представим её в экспоненциальной форме:

$$\rho e^{i\theta} = (re^{i\varphi})^{ib} = e^{-b\varphi} r^{ib} = e^{-b\varphi} e^{ib\ln r}. \qquad (3.1.12)$$

Здесь показатель степени b – любое действительное число.

Откуда модуль рассматриваемой функции будет представлять собой такую зависимость:

$\rho = e^{-b\varphi}$, а аргумент $\theta = b\ln r$.

Легко заметить, что в этой модели модуль функции ρ зависит исключительно от соотношения между факторами x_r и x_i (аргумента φ), а аргумент функции меняется исключительно в зависимости от изменений модуля комплексной переменной факторов.

Следовательно, в том случае, когда модуль комплексной переменной аргумента r является постоянной величиной, а меняется только полярный угол этой переменной φ, то есть – аргумент изменяет свои значения по окружности, с помощью функции (3.1.11) это отображается на комплексную плоскость w в виде прямой линии с углом равным $b\ln r$. С ростом полярного угла аргумента точки на прямой линии будут возрастать, если показатель степени b отрицателен и будут уменьшаться, если он положителен.

Если же комплексный аргумент меняется линейно и эта прямая линия проходит через нулевую точку, но не включает её в себя, то это означает постоянство полярного угла и рост модуля аргумента. Конформное отображение этих точек на комплексную плоскость w будет осуществляться в виде окружности – поскольку модуль функции не изменен, а полярный угол меняется с изменением модуля аргумента.

Более интересна ситуация, когда аргумент представляет собой прямую линию, проходящую выше или ниже нулевой точки. В этом случае будет меняться и полярный угол аргумента, и его модуль. Тогда функция (3.1.11) будет моделировать нелинейную динамику и действительной, и мнимой частей комплексной функции, поскольку они представимы в виде системы:

$$\begin{cases} y_r = e^{-barctg\frac{x_i}{x_r}} \cos(b\ln\sqrt{x_r^2 + x_i^2}), \\ y_i = e^{-barctg\frac{x_i}{x_r}} \sin(b\ln\sqrt{x_r^2 + x_i^2}). \end{cases} \qquad (3.1.13)$$

Если аргумент описывается прямой линией, проходящей ниже нулевой точки так, как это определено уравнением (3.1.8), то при показателе степени b=1/3, конформное отображение функции (3.1.11) будем иметь вид нелинейной функции, изображённой на рис.3.9. Функция изменяет свои значения справа налево против часовой стрелки от точки с координатами $y_r=1{,}407,\ y_i=0{,}491$ до точки с координатами $y_r=0{,}186,\ y_i=0{,}759$.

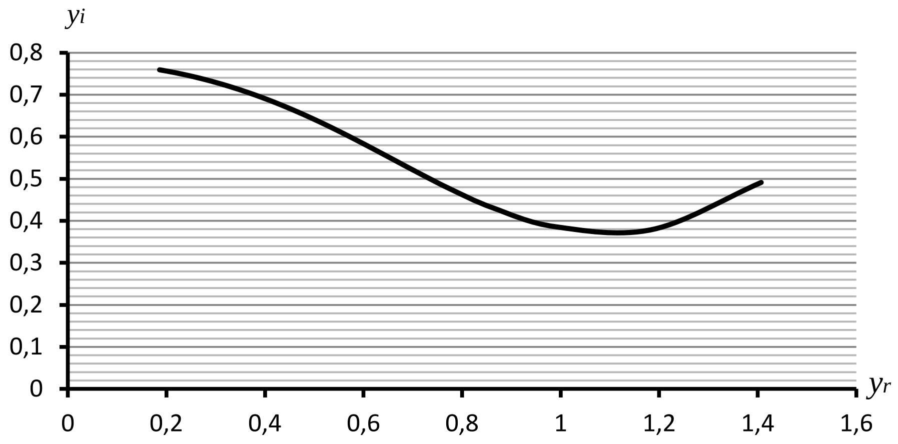

Рис.3.9. Вид функции (3.1.11) при аргументе (3.1.8) и показателе степени *b=1/3*

Если же прямая на плоскости комплексного аргумента пройдёт выше нулевой точки так, как это определяется уравнением (3.1.9), то в тех же самых пределах изменения значений аргумента и при показателе степени *b=1/3*, функция вновь будет меняться, уменьшая модуль с ростом полярного угла. Но форма этого нелинейного изменения будет отличаться от той, которая изображена на рис. 3.9 – она более гладкая, что наглядно видно из рис. 3.10.

При отрицательных значениях показателя степени функции (3.1.11) будут моделироваться иные формы конформного отображения.

Рассмотрим теперь общую модель степенной комплекснозначной функции с комплексными коэффициентами:

$$y_r + iy_i = (a_0 + ia_1)(x_r + ix_i)^{b_0 + ib_1}, \qquad (3.1.14)$$

которая сочетает в себе все вышерассмотренные варианты конформного отображения и включает в себя комплексный коэффициент пропорциональности.

Влияние комплексного коэффициента пропорциональности на поведение этой функции легко понять, если представить его в экспоненциальной форме:

$$a_0 + ia_1 = ae^{i\alpha}.$$

Этот коэффициент изменяет модуль функции в a раз, а полярный угол сдвигает на α.

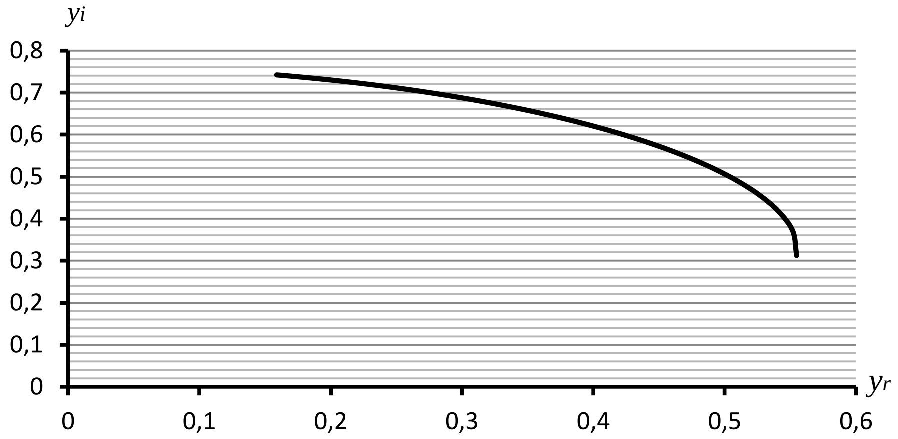

Рис.3.10. Вид функции (3.1.11) при аргументе (3.1.9) и показателе степени *b=1/3*

Приведём модель (3.1.14) к экспоненциальной форме записи. В результате получим функцию такого вида:

$$w = ae^{b_0 \ln r - b_1\varphi} e^{i(\alpha + b_0\varphi + b_1 \ln r)}, \qquad (3.1.15)$$

Откуда для действительной и мнимой частей рассматриваемой комплекснозначной функции имеем:

$$\begin{cases} y_r = ae^{b_0 \ln r - b_1\varphi} \cos(\alpha + b_0\varphi + b_1 \ln r), \\ y_i = ae^{b_0 \ln r - b_1\varphi} \sin(\alpha + b_0\varphi + b_1 \ln r). \end{cases} \qquad (3.1.16)$$

Из полученных равенств видно, что при различных сочетаниях значений комплексных коэффициентов (a_0+ia_1) и (b_0+ib_1) функция (3.1.14) будет описывать самые разнообразные формы зависимости, в том числе и циклические. С этих позиций комплекснозначная модель (3.1.14) является универсальной и может использоваться в многочисленных экономических приложениях.

Для представления о возможных формах конформного отображения этой функции, рассмотрим модель вида:

$$y_r + iy_i = (x_r + ix_i)^{-0,5+i}. \qquad (3.1.17)$$

В первом случае рассмотрим отображение на комплексную плоскость *w* прямой линии (3.1.8), проходящей на плоскости комплексного аргумента ниже нулевой точки (рис. 3.11), а во втором случае – когда прямая линия (3.1.9) проходит на плоскости комплексного аргумента выше нулевой точки. Этот второй случай изображён на рис. 3.12.

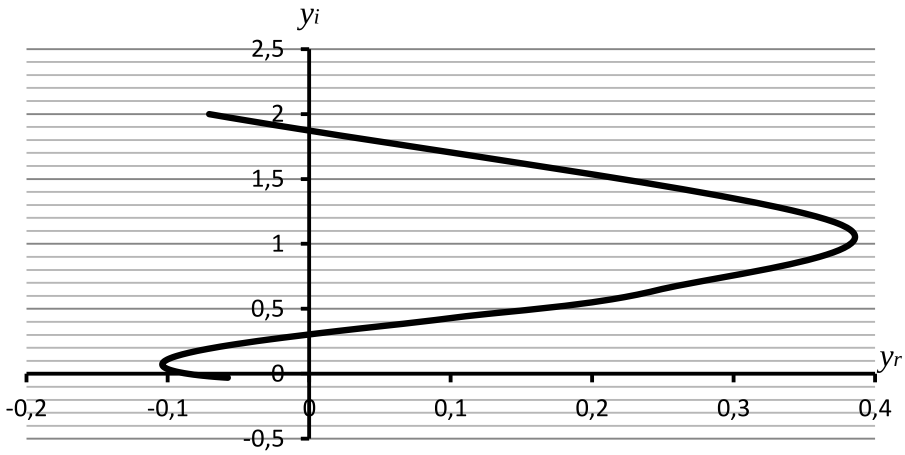

Рис.3.11. Общий вид конформного отображения степенной комплекснозначной функции при аргументе (3.1.8) и комплексном показателе степени (*-0,5+i)*

Из сравнения этих двух рисунков видно, что положение прямой линии на плоскости комплексного аргумента существенно влияет на вид конформного отображения.

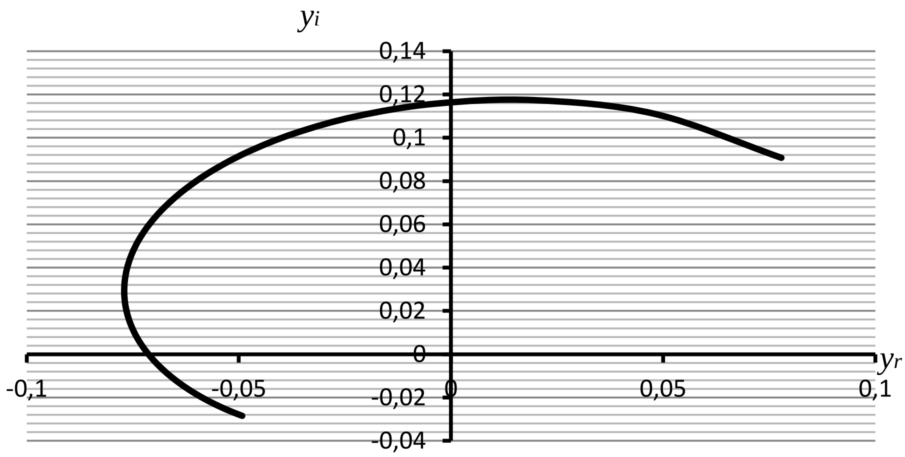

Рис.3.12. Общий вид конформного отображения степенной комплекснозначной функции при аргументе (3.1.9) и комплексном показателе степени (*-0,5+i)*

Таким образом, следует признать, что степенная комплекснозначная функция с комплексным показателем степени может использоваться для моделирования в экономике самых разных нелинейных процессов.

3.2. Показательные функции комплексных переменных

Степенные функции действительных переменных не являются единственным классом функций, используемых в современной экономике, хотя они превалируют среди экономических моделей действительных переменных. В частности именно степенные функции нашли широчайшее применение в теории производственных функций, поскольку показатели степени имеют ясную экономическую интерпретацию, а дифференцируемость функции позволяет по значениям производных первого и второго порядка судить о моделируемых производственных процессах. Эти модели являются основными для моделирования экономической динамики, для параметрических моделей в ценообразовании и т.п. Но, поскольку в экономике действительных переменных используются и другие функции, следует и в комплекснозначной экономике изучить свойства комплекснозначных функций, аналогичных функциям действительных переменных и возможность их использования в практике математического моделирования экономики.

Рассмотрим показательные функции на примере наиболее удобной из них - экспоненциальной комплекснозначной функции следующего вида:

$$y_r + iy_i = (a_0 + ia_1)e^{(b_0+ib_1)(x_r+ix_i)}. \qquad (3.2.1)$$

Свойства других показательных функций будут аналогичными данной экспоненциальной, поэтому, изучив свойства модели (3.2.1), мы можем их распространить на весь класс показательных функций комплексных переменных.

Пусть в начале комплексный показатель степени представляют собой действительное число, то есть $b_1=0$. Тогда функция в экспоненциальной форме будет иметь вид:

$$y_r + iy_i = ae^{i\alpha}e^{b_0(x_r+ix_i)} = ae^{b_0x_r}e^{i(\alpha+b_0x_i)}. \qquad (3.2.2)$$

То есть – модуль функции зависит исключительно от изменения действительной части комплексного аргумента:

$$\rho = ae^{b_0x_r}, \qquad (3.2.3)$$

а полярный угол функции полностью определяется изменениями мнимой части комплексного аргумента:

$$\theta = \alpha + b_0x_i. \qquad (3.2.4)$$

Вначале рассмотрим простейшую ситуацию, когда один из факторов x_r или x_i остаётся величиной постоянной, а меняется только другой фактор.

Если постоянной является вещественная часть комплексного аргумента $x_r=X=const$, а мнимая часть x_i увеличивается, то это на плоскости комплексного аргумента означает линию, параллельную оси мнимых чисел, пересекающую ось действительных чисел в точке X. Конформное отображение этой прямой линии будет представлять собой окружность с постоянным радиусом

$$\rho = ae^{b_0 X} \qquad (3.2.5)$$

и полярным углом (3.2.4), который увеличивается с увеличением мнимой части при положительном значении коэффициента b_0 и уменьшается при его отрицательном значении.

Во втором случае, когда прямая линия на комплексной плоскости аргумента перпендикулярна оси мнимых чисел при $x_i = X = const$ и изменяющемся x_r, функция (3.2.2) отображается на плоскости w прямой линией, так как она характеризуется постоянным значением полярного угла

$$\theta = \alpha + b_0 x_i = \alpha + b_0 X,$$

а радиус меняется по экспоненте (3.2.3).

В том случае, когда комплексный аргумент меняет свои значения линейно и не параллельно какой-нибудь из осей плоскости комплексного аргумента, функция (3.2.2) моделирует линию более сложной формы. Действительная и мнимая части этой функции будут иметь вид:

$$\begin{cases} y_r = ae^{b_0 x_r} \cos(\alpha + b_0 x_i) \\ y_i = ae^{b_0 x_r} \sin(\alpha + b_0 x_i) \end{cases}. \qquad (3.2.6)$$

Характер конформного отображения зависит от знака показателя степени b_0. Если $b_0>0$, то с линейным ростом значений комплексного аргумента существенно возрастает модуль функции. Поскольку её полярный угол также растёт, то это будет означать на комплексной плоскости w движение по расходящейся спирали, а действительная и мнимая части комплекснозначной функции будут меняться по косинусоиде и синусоиде соответственно с нелинейно возрастающим размахом колебаний.

В том случае, когда показатель степени меньше нуля $b_0<0$, модуль функции уменьшается по экспоненте и на комплексной плоскости это отобразиться спиралью, стремящейся к нулю, а рассмотренные отдельно действительная и мнимая части функции будут представлять собой затухающий колебательный процесс.

Теперь рассмотрим случай, когда показатель степени умножается на мнимый коэффициент b_1, а действительный равен нулю, $b_0=0$:

$$y_r + iy_i = (a_0 + ia_1)e^{ib_1(x_r + ix_i)} = (a_0 + ia_1)e^{-b_1 x_i} e^{ib_1 x_r} \qquad (3.2.7)$$

Модуль этой функции представляет собой экспоненциальную зависимость от мнимой части комплексного аргумента:

$$\rho = ae^{-b_1 x_i}, \qquad (3.2.8)$$

а полярный угол - линейную зависимость от действительной части аргумента:

$$\theta = \alpha + b_1 x_r \qquad (3.2.9)$$

Если сравнить (3.2.8) с (3.2.3), а (3.2.9) с (3.2.4), то можно убедиться в том, что функция изменилась «симметрично» - теперь мнимая часть аргумента влияет на модуль функции, а действительная часть аргумента влияет на полярные угол функции.

Это означает, что линейный рост комплексного аргумента будет отображаться показательной функцией (3.2.7) на комплексную плоскость *w* в виде спирали, расходящейся, если коэффициент $b_1<0$ и сходящейся к нулю, если $b_1>0$.

Теперь можно рассмотреть функцию (3.2.1) с комплексным показателем степени:

$$y_r + iy_i = (a_0 + ia_1)e^{(b_0+ib_1)(x_r+ix_i)} = (a_0 + ia_1)e^{(b_0x_r - b_1x_i)}e^{i(b_1x_r + b_0x_i)}. \quad (3.2.10)$$

Приводя все комплексные переменные и коэффициенты функции (3.2.8) в экспоненциальную форму, и группируя составляющие полярного угла и составляющие модуля, получим:

$$\rho e^{i\theta} = ae^{b_0x_r - b_1x_i}e^{i\alpha}e^{i(b_1x_r + b_0x_i)}. \quad (3.2.11)$$

Откуда для модуля комплексной функции:

$$\rho = ae^{b_0x_r - b_1x_i} \quad (3.2.12)$$

и для полярного угла этой функции:

$$\theta = \alpha + b_1x_r + b_0x_i. \quad (3.2.13)$$

Интерес представляет случай, когда аргумент представляет собой прямую линию, лежащую на комплексной плоскости, то есть, когда:

$$c_rx_r + c_ix_i = d \rightarrow x_i = \frac{d - c_rx_r}{c_i}. \quad (3.2.14)$$

Подставим (3.2.14) в модуль функции (3.2.12):

$$\rho = ae^{b_0x_r - b_1\frac{d - c_rx_r}{c_i}} = ae^{\frac{(c_ib_0 + b_1c_r)x_r - b_1d}{c_i}} \quad (3.2.15)$$

Модуль показательной функции с комплексным коэффициентом пропорциональности вновь меняется по экспоненте и в зависимости от коэффициентов может возрастать, а может и убывать по своим значениям.

Если же теперь (3.2.14) подставить в (3.2.13), то легко увидеть, как меняется полярный угол этой функции при линейном изменении комплексного аргумента:

$$\theta = \alpha + b_1x_r + b_0\frac{d - c_rx_r}{c_i} = \alpha + \frac{(b_1c_i - c_rb_0)x_r + b_0d}{c_i}. \quad (3.2.13)$$

Он меняется линейно.

Значит и общая показательная функция с комплексным показателем степени моделирует расходящийся по спирали процесс или сходящийся по спирали к нулю (в зависимости от значений коэффициентов) если комплексный аргумент меняется линейно.

При нелинейных изменениях аргумента вид линии конформного отображения изменится.

3.3. Логарифмические функции комплексных переменных

Рассмотрим возможность применения логарифмических функций комплексных переменных в комплекснозначной экономике. В общем виде функция комплексного переменного будет представлена так:

$$y_r + iy_i = (a_0 + ia_1) + (b_0 + ib_1)\ln(x_r + ix_i). \qquad (3.3.1)$$

Очевидно, что возможны и другие основания логарифмов (не только натуральное, но и десятичное, двоичное и т.п.), но это не меняет сути дальнейших рассуждений и основных свойств самой функции, поэтому будем рассматривать натуральное основание логарифмов, как наиболее удобное для анализа.

Следует сразу указать на то, что логарифмическая функция комплексных переменных, как и в случае функции действительных переменных, не существует в точке x_r =0, x_i =0, но в отличие от логарифмической функции действительных переменных, существует при отрицательных значениях аргумента. Поэтому во всех дальнейших рассуждениях данного параграфа мы эту нулевую точку по умолчанию исключаем из рассмотрения. Если возникнет необходимость рассмотреть ситуацию, когда некоторая линия, изображённая на комплексной плоскости ресурсов выходит из нулевой точки, мы будем подразумевать, что она выходит из окрестности этой точки.

Поскольку свободный член правой части равенства характеризует начальные условия и его влияние на комплексный результат этим и ограничивается, будем рассматривать функцию без него:

$$y_r + iy_i = (b_0 + ib_1)\ln(x_r + ix_i). \qquad (3.3.2)$$

Из теории функций комплексного переменного известно, что логарифм комплексного числа z может быть представлен в виде суммы:

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z = \ln r + i(\varphi + 2k\pi), \qquad (3.3.3)$$

где k – целое число.

То есть, комплексное число $z \neq 0$ имеет бесчисленное множество логарифмов (бесконечнозначная функция), поскольку действительная часть логарифмической функции определяется однозначно, а мнимая – с точностью до слагаемого, кратного 2π.

Из (3.3.3) легко заметить, что если действительная или (и) мнимая части комплексного аргумента логарифмической функции являются отрицательными, то логарифм этой функции существует. Это дополнительный аргумент в пользу использования в экономике функций комплексных переменных, поскольку логарифмическую зависимость можно распространить и на область отрицательных значений аргумента в отличие от функций действительных переменных.

В теории функций комплексного переменного вводится понятие «главное значение логарифма», когда $k=0$. Мы будем использовать в моделях комплекснозначной экономики именно это главное значение.

Применяя свойство логарифма комплексного числа к рассматриваемой функции (3.3.2), получим:

$$y_r + iy_i = (\mathrm{b}_0 + ib_1)(\ln\sqrt{x_r^2 + x_i^2} + iarctg\,\frac{x_i}{x_r}) = (\mathrm{b}_0 + ib_1)(\ln r + i\varphi). \qquad (3.3.4)$$

Разберём случай, когда мнимая часть комплексного коэффициента равна нулю. Тогда функция будет иметь следующий вид:

$$y_r + iy_i = b_0 \ln r + b_0 i\varphi. \qquad (3.3.5)$$

Или:

$$y_r = b_0 \ln r. \qquad (3.3.6)$$

$$y_i = b_0\varphi. \qquad (3.3.7)$$

Если комплексный аргумент представляет собой точки, лежащие на окружности, то модуль аргумента всегда будет величиной постоянной. Это означает постоянство действительной части функции. Мнимая часть функции будет меняться линейно, поскольку она представляет собой линейную функцию от полярного угла аргумента. То есть – окружность на комплексной плоскости аргумента отображается на комплексную плоскость *w* в форме прямой линии, перпендикулярной оси действительных переменных.

Если комплексный аргумент представляет собой прямую линию, проходящую в окрестностях нулевой точки, то полярный угол аргумента будет величиной постоянной $\varphi=const$, что скажется в постоянстве мнимой части функции, $y_i=const$. Значит, и в этом случае функция отображается на комплексной плоскости *w* в виде прямой линии, но перпендикулярной оси мнимой части функции.

Но если комплексный аргумент представить в виде прямой линии, проходящей мимо нулевой точки, то рассматриваемая функция будет давать иное отображение этой прямой линии. Пусть для определённости:

$$c_r x_r + c_i x_i = d. \quad (3.3.8)$$

Тогда действительная часть функции будет представлять собой в соответствии с (3.3.6)

$$y_r = b_0 \ln\sqrt{x_r^2 + (\frac{d - c_r x_r}{c_i})^2}. \qquad (3.3.9)$$

Значит, с линейным ростом аргумента действительная часть функции возрастает по логарифму.

Мнимая часть функции с учётом линейного характера изменения аргумента будет меняться так:

$$y_i = b_0 arctg\,\frac{x_i}{x_r} = b_0 arctg\,\frac{d - c_r x_r}{c_i x_r} = b_0 arctg(\frac{d}{c_i x_r} - \frac{c_r}{c_i}). \qquad (3.3.10)$$

Это – изменение по функции арктангенса обратной величины.

Совместное изменение действительной и мнимой частей функции на комплексной плоскости будет давать изображение гладких кривых.

На рис. 3.13 приведено это отображение для случая, когда комплексный аргумент изменяется по линейному закону:

$$2x_r - 1,5x_i + 2 = 0$$

а коэффициент пропорциональности равен $b_0=1,5$.

Здесь действительная часть аргумента меняется в пределах от $x_r=0,1$ до $x_r=4,0$ с шагом 0,1.

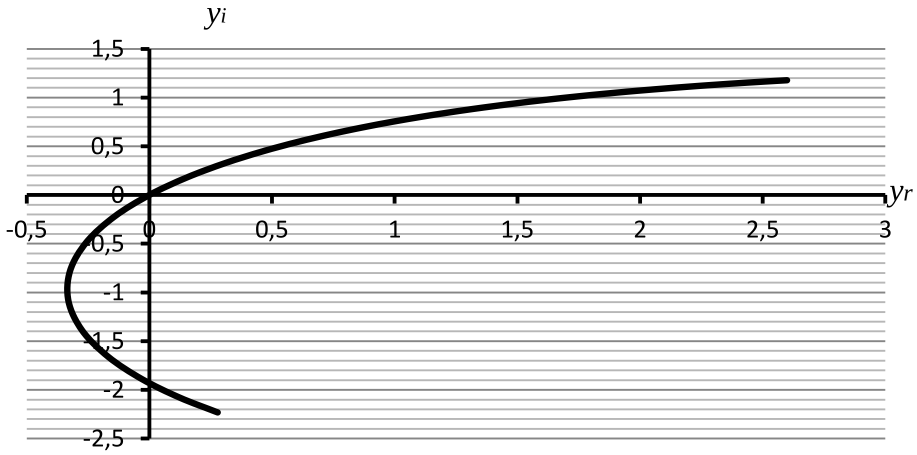

Рис.3.13. Вид функции (3.3.5) при линейном изменении аргумента

Рассмотрим теперь ситуацию, когда равна нулю действительная часть комплексного коэффициента пропорциональности модели (3.3.2), то есть, используется функция следующего вида:

$$y_r + iy_i = ib_1 \ln(x_r + ix_i) = -b_1\varphi + ib_1 \ln r . \qquad (3.3.11)$$

Откуда:

$$y_r = -b_1\varphi .$$

$$y_i = b_1 \ln r .$$

Тем самым мы получили свойства, «симметричные» свойствам модели (3.3.5) – та же самая окружность на комплексной плоскости будет отображаться на комплексную плоскость *w* в виде прямой линии, параллельной оси y_r; а прямая линия, выходящая из окрестностей нулевой точки на оси аргумента будет отображаться прямой, параллельной оси y_i.

Теперь можно рассмотреть свойства модели (3.3.2), когда и действительная, и мнимая части коэффициента пропорциональности не равны нулю. Раскрывая скобки (3.3.4) , получим:

$$x_r + ix_i = b_0 \ln r - b_1\varphi + i(b_0\varphi + b_1 \ln r) . \qquad (3.3.12)$$

Откуда для действительной части равенства:

$$y_r = b_0 \ln r - b_1\varphi ,$$

и для мнимой части:

$$y_i = b_1 \ln r + b_0\varphi .$$

Чтобы понять поведение этой модели, представим её в экспоненциальной форме.

Тангенс полярного угла для рассматриваемой функции будет равен:

$$tg\theta = \frac{b_1 \ln r + b_0 \varphi}{b_0 \ln r - b_1 \varphi}. \qquad (3.3.13)$$

Модуль комплексного результата:

$$\rho = \sqrt{(b_0^2 + b_1^2)(\ln^2 r + \varphi^2)}. \qquad (3.3.14)$$

Сама функция в экспоненциальной форме будет иметь вид:

$$w = \sqrt{(b_0^2 + b_1^2)(\ln^2 r + \varphi^2)} e^{iarctg \frac{b_1 \ln r + b_0 \varphi}{b_0 \ln r - b_1 \varphi}}.$$

Как видно, моделируется гладкая кривая сложной формы, которая зависит от коэффициента пропорциональности и того, как лежат точки аргумента на комплексной плоскости. Пример того, как функция

$$y_r + iy_i = (-2,5 + i0,5)\ln(x_r + ix_i) \qquad (3.3.15)$$

отображает линейное изменение комплексного аргумента x_r-$2x_i$-$2=0$ на комплексную плоскость, приведён на рис.3.14.

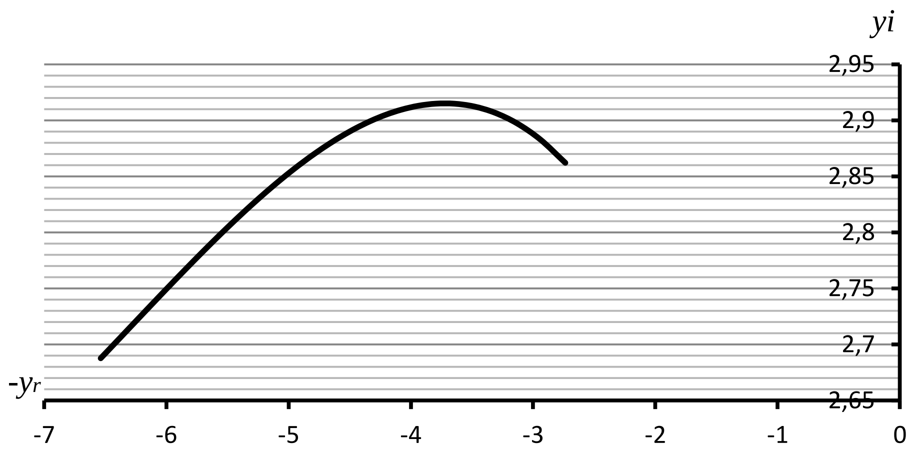

Рис. 3.14. Вид функции (3.3.15) при линейном изменении аргумента

3.4. Функция Жуковского и тригонометрические комплекснозначные функции

Рассмотренные выше простые комплекснозначные функции в теории функций комплексного переменного дополняют ещё и функцией Жуковского, а также тригонометрическими функциями. Поскольку экономика многообразна, и нельзя исключать наличие таких взаимосвязей в ней, которые могут быть описаны подобными функциями, осуществим изучение их свойств.

Дробно-рациональная функция вида

$$w = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) \qquad (3.5.1)$$

была тщательно изучена Н.Е.Жуковским, почему её и называют в теории функций комплексного переменного функцией Жуковского.

Для того чтобы определить область однолистности конформного отображения этой функции, необходимо определить – а существует ли область многолистности, то есть, есть ли такие z_1 и z_2 которые с помощью функции Жуковского переходят в одну точку w? Для ответа на этот вопрос приравняем друг другу функции Жуковского для этих двух комплексных переменных:

$$z_1 + \frac{1}{z_1} = z_2 + \frac{1}{z_2} \to (z_1 - z_2)(1 - \frac{1}{z_1 z_2}) = 0. \qquad (3.5.2)$$

Если это равенство выполняется, то функция многолистна, если не выполняется, то каждому значению комплексной переменной факторов соответствует только одно комплексное значение результата.

Поскольку по условию задачи $z_1 \neq z_2$, то функция однолистна за исключением точек, для которых $z_1 z_2 = 1$. Посмотрим, какие точки не удовлетворяют условию однолистности, то есть, в каких случаях $z_1 z_2 = 1$. Для этого представим комплексные переменные в экспоненциальной форме:

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = 1 \leftrightarrow r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} = 1.$$

Для того чтобы выполнялось равенство единице, необходимо, чтобы,

- во-первых, сумма полярных углов была равна нулю - $\theta_1 = -\theta_2$, что означает симметричность точек относительно оси действительных чисел,

- а во-вторых, модули комплексных переменных z_1 и z_2 были равны единице.

Таким образом, функция Жуковского однолистна на всей комплексной плоскости за исключением точек единичной окружности.

Поскольку любое комплексное число может быть представлено как в арифметической, так и в тригонометрической форме, представим z:

$$z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi. \qquad (3.5.3)$$

Подставим это выражение в функцию Жуковского. Получим:

$$w = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) = \frac{1}{2}(r\cos\varphi + ir\sin\varphi + \frac{1}{r\cos\varphi + ir\sin\varphi}) = \frac{1}{2}(r\cos\varphi + ir\sin\varphi + \frac{r\cos\varphi - ir\sin\varphi}{r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)})$$

Или:

$$w = \frac{1}{2}(r + \frac{1}{r})\cos\varphi + i\frac{1}{2}(r - \frac{1}{r})\sin\varphi. \qquad (3.5.4)$$

Если рассматривать на плоскости аргумента окружность, $r = r_0 \neq 1$, то функция Жуковского отображается на результирующей плоскости в виде эллипсов с полуосями:

$$a = \frac{1}{2}(r_0 + \frac{1}{r_0}), \ \mathrm{b} = \frac{1}{2}(r_0 - \frac{1}{r_0}). \qquad (3.5.5)$$

При $r_0 \to 1$ эллипс сжимается в отрезок [-1,1] действительной оси комплексной плоскости, при $r_0 \to 0$ уходит в бесконечность, также, как и при $r_0 \to \infty$. Только в случае, когда $|z|<1$, то есть, точки лежат внутри единичной окружности, с ростом полярного угла аргумента эллипс обходится в отрицательном направлении, а когда $|z|>1$ - в положительном.

Легко заметить из (3.5.4), что при r>>1 функция Жуковского почти совпадает с линейной комплекснозначной функцией, а в отрезке *r<1* она становится нелинейной. То есть - если комплексный аргумент меняется линейно, то и функция Жуковского будет меняться практически линейно за исключением участка значений аргумента, лежащих внутри окружности единичного радиуса. Здесь функция становится нелинейной.

Применительно к экономическим задачам, эта функция может использоваться в эконометрии. Тогда удобнее её представлять в виде:

$$w = (a_0 + ia_1)(z + \frac{1}{z}), \qquad (3.5.6)$$

поскольку комплексный коэффициент пропорциональности способствует генерации конформных отображений в виде эллипсов разного масштаба и разной формы.

В качестве примера на рис. 3.15 приведено конформное отображение функции Жуковского на комплексную плоскость *w* для линейно изменяющегося аргумента *z*, когда мнимая составляющая представляет собой зависимость от действительной составляющей аргумента, вычисленной по формуле:

$x_i = 0,4 + x_r, -7 < x_r < 7$.

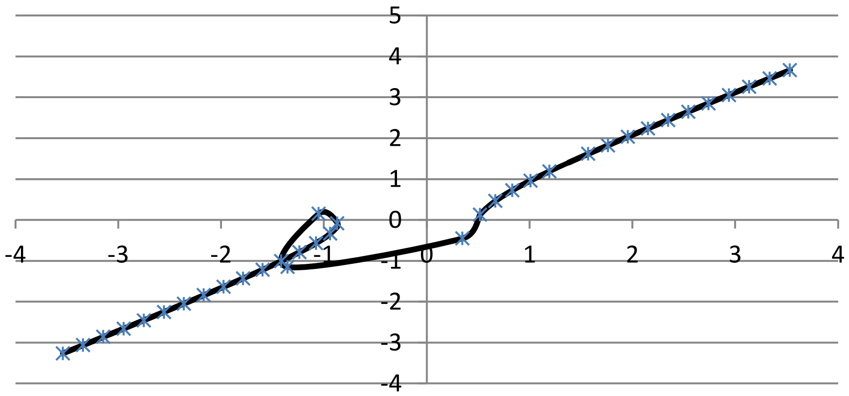

Рис. 3.15. Функция Жуковского при значениях аргумента, меняющихся линейно (-7<xr<7)

При других способах линейного изменения аргумента внутри окружности единичного радиуса функция принимает иные нелинейные формы.

Это означает, что функция Жуковского может быть использована в моделировании некоторых экономических процессов в том случае, когда в области изменения действительной и мнимой частей аргумента в пределах от *-1* до *+1* моделируется нестабильность линейной динамики.

Функция Жуковского удобна для изучения тригонометрических функций комплексных переменных.

Поскольку из формулы Эйлера следуют два равенства:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x; \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x,$$

то из них легко вывести формулы для вычисления синусов и косинусов:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}; \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

Опираясь на эти формулы, в теории функций комплексного переменного так определяют тригонометрические функции комплексного переменного z:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}; \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}. \tag{3.5.7}$$

Для этих функций выполнимы все тригонометрические соотношения, они периодичны с периодом 2π и т.п. Для представления сути конформного отображения первой функции, её можно представить так:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{1}{2}(\frac{e^{iz}}{i} + ie^{-iz}) = \frac{1}{2}(\frac{e^{iz}}{i} + \frac{i}{e^{iz}}) = \frac{1}{2}(z_1 + \frac{1}{z_1}). \tag{3.5.8}$$

Здесь $z_1 = \frac{e^{iz}}{i}$.

Таким образом, отображение функции $\sin z$ можно рассматривать как суперпозицию других отображений – экспоненциальной функции комплексной переменной и функции Жуковского. Поскольку в настоящее время не ясно, в каких экономических приложениях могут быть применимы тригонометрические функции комплексных переменных, ограничимся констатацией этого факта.

В завершение следует сказать, что косинус комплексной переменной в силу очевидного равенства:

$$\cos z = \sin(z + \frac{\pi}{2})$$

отличается от синуса лишь сдвигом.

На основе формул синуса и косинуса комплексных переменных определяются и другие тригонометрические функции.