Глава пятая. Производственные функции комплексного аргумента

5.1. Производственные функции комплексного аргумента

Для моделирования в целом работы предприятия, региона, отрасли или страны используют зависимость результатов производства от используемых ресурсов, не изучая сам процесс преобразования ресурсов в производственный результат. На каждом из уровней иерархии производства для моделирования этой зависимости исходят из ряда различного рода предположений и допущений, который для целей нашего исследования не представляют никакого интереса. Мы исходим из того, что перед нами есть некоторая производственная структура, моделирование которой мы осуществляем, рассматривая исключительно как процесс преобразования производственных ресурсов в производственный результат.

По сути, предлагается рассматривать производство как «черный ящик», на вход которого поступают ресурсы $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, а на выходе получается некоторый производственный результат $y_1, y_2, y_3, \ldots y_m$:

$$Y = f(X). \qquad (5.1.1)$$

Такую зависимость в экономике принято называть «производственной функцией». В теории производственных функций, которая использует действительные переменные, рассматривается производственный результат, как одна действительная переменная, на изменение которого оказывает влияние несколько производственных ресурсов, то есть – рассматривается многофакторная зависимость:

$$y = f(x_i), \quad i = 1, 2, 3, \ldots n. \qquad (5.1.2)$$

Ресурсы, которые используются при промышленном производстве, разнообразны. К ним можно отнести: трудовые ресурсы; материальные ресурсы; финансовые ресурсы; капитальные ресурсы (станки, механизмы и т.п.); интеллектуальные ресурсы и др. Кроме того, каждый из ресурсов в свою очередь представляет собой некоторую агрегированную величину, например, трудовые ресурсы можно разделить на: промышленно-производственный персонал и непроизводственный персонал. Но и промышленно-производственный персонал в свою очередь разделяется на: рабочих и учеников, инженерно-технических работников, служащих и т.п.

Если попытаться в максимальной степени приблизить модель к экономическим реалиям, то необходимо включить в неё все эти ресурсы в как можно более детализированной форме, но такая модель становится чрезвычайно громоздкой, поэтому из всего многообразия производственных ресурсов останавливаются на двух основных и в высшей степени агрегированных – труде L и капитале K. Логика выделения этих двух типов ресурсов из всего многообразия такова.

Для выпуска некоторого количества товара Q помимо капитала и труда следует потратить определённое количество материальных и финансовых ресурсов, тепла и электроэнергии. Причём количество этих ресурсов, использованных в производстве, в определённой мере можно считать прямо пропорциональным выпуску. А капитал и труд, конечно же, меняются с изменением выпуска, но это изменение не носит линейный характер, это, во-первых, а во-вторых, эти два ресурса взаимозаменяемы – увеличивая капитальные ресурсы и внедряя новые технологии, можно добиться увеличения производительности труда и снижения тем самым затрат труда. То есть, можно большим числом капитального ресурса и меньшим числом трудового ресурса получить одно и то же количество выпускаемой продукции.

Такая взаимозаменяемость в определённой мере присуща любому уровню производственной иерархии, например, на уровне предприятия можно при постоянстве капитальных ресурсов, увеличивая затраты труда, организовать работу в две или три смены, добившись роста производства. Такого же объёма производства можно добиться и в том случае, когда оставляя неизменной численность занятых на предприятии, увеличивать капитал посредством внедрения более производительного оборудования. Правда, себестоимость валовая прибыль и рентабельность в первом случае будут существенно отличаться от таких же показателей по второму варианту, но эти особенности не рассматриваются в теории производственных функций.

Для целей нашего научного исследования важно, что чаще всего в производственную функцию из всего многообразия ресурсов включают два ресурса – труд и капитал:

$$Q = f(K, L). \qquad (5.1.3)$$

Мы не будем здесь пересказывать разделы теории производственных функций, поскольку читатель этой монографии наверняка с ними знаком, а при необходимости может ознакомиться с ними по многочисленным монографиям и учебникам. Мы рассмотрим возможность и особенности применения комплекснозначных моделей применительно к задачам теории производственных функций.

Поскольку (5.1.3) графически представляет собой отражение точек плоскости ресурсов на действительную ось производственных результатов, то, заменив плоскость действительных переменных на плоскость комплексных переменных, мы сохраним смысл задачи, но поменяем её форму. Тогда производственная функция комплексного аргумента будет иметь вид:

$$Q = f(K + iL). \qquad (5.1.4)$$

Отнесение трудовых ресурсов к мнимой части не вызвано какими-либо особыми экономическими соображениями – исключительно соображениями удобства. Впрочем, в первой главе мы вводили правило, в соответствии с которым к действительной части комплексной переменной отнесём активную часть экономического показателя, а к мнимой - пассивную. В некотором смысле это правило соблюдено и в рассматриваемом случае - поскольку трудовые ресурсы в производстве в большей степени подвержены разнообразным изменениям по сравнению с капитальными ресурсами, их можно отнести к мнимой части.

В соответствии с правилами ТФКП знак равенства в (5.1.4) означает, что производственный результат, представленный в виде действительной переменной, на самом деле представим как комплексная переменная, чья мнимая часть равна нулю:

$$\begin{cases} Q + iQ_i = f(K + iL), \\ Q_i = 0. \end{cases} \tag{5.1.5}$$

Поскольку в экономике гладкие функции существуют лишь в головах некоторых отчаянных идеалистов, а на практике не встречаются, точного функционального соответствия между ресурсами и производственным результатом (5.1.4) быть не может, а может быть в лучшем случае регрессионная зависимость. С учётом этого при построении на практике производственной функции комплексного аргумента будет получена зависимость такого вида:

$$Q = f(K + iL) + \varepsilon_r + i\varepsilon_i. \tag{5.1.6}$$

Из этого следует, что производственная функция комплексного аргумента (ПФКА) представляет собой конформное отображение множества точек, лежащих на комплексной плоскости производственных ресурсов на комплексную плоскость производственного результата, по действительной оси которой откладывается Q, а по мнимой – величина отклонений ε_i. Причём это отображение имеет в общем случае вид линейной регрессии, совпадающей с осью действительных значений Q, отклонение от которой носит случайный характер. Это конформное отображение изображено на рис. 5.1.

Если для нахождения значений коэффициентов ПФКА использовать метод наименьших квадратов (МНК), то будет выполняться равенство:

$$\sum(\varepsilon_r + i\varepsilon_i) = 0. \tag{5.1.7}$$

Особенности комплексной ошибки аппроксимации и способы измерения степени аппроксимации были изложены в предыдущей главе монографии, поэтому в данной и последующих главах не будем уделять этим характеристикам особого внимания.

Формальной математической основой для ПФКА может послужить любая элементарная комплекснозначная функция из множества известных, свойства основных из которых были изучены во второй главе монографии.

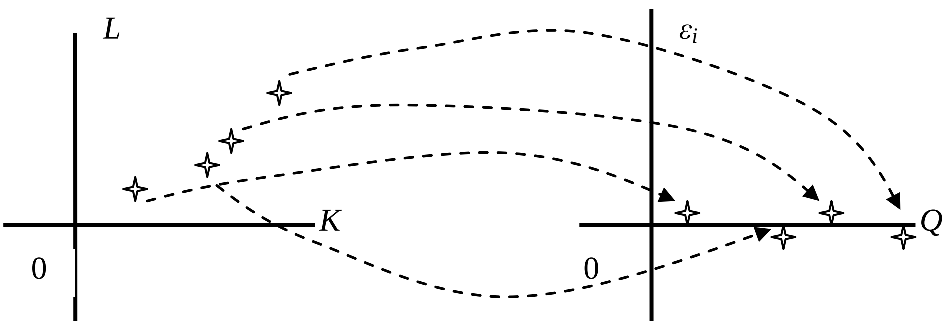

Рис. 5.1. Конформное отображение ПФКА точек комплексной плоскости производственных ресурсов на комплексную плоскость результата

В данной главе мы последовательно рассмотрим ПФКА, исходя из общенаучного принципа – от простого к сложному, то есть, начнём с линейной производственной функции комплексного аргумента и, получив некоторые результаты, перейдём к более сложным моделям. Но прежде, чем это сделать, обратим внимание на область определения задачи – все переменные, как производственные ресурсы, так и производственный результат являются положительными.

5.2. Линейная комплекснозначная модель комплексного аргумента и мультиколлинеарность

Прежде, чем перейти к изучению особенностей функций комплексного аргумента как моделей производственного процесса, обратим на одну важную особенность этих функций. Во второй главе монографии были рассмотрены конформные отображения этих моделей, где было показано, что они представляют собой уравнение линии в трёхмерном пространстве. Эта особенность моделей комплексного аргумента может в определённых случаях рассматриваться как существенное преимущество по сравнению с моделями действительных переменных, особенно для линейной модели комплексного аргумента. Покажем это.

Любая комплекснозначная модель является многофакторной, поскольку комплексный аргумент состоит из двух действительных переменных, отнесённых, соответственно, к вещественной и к мнимой частям. Поэтому, прежде чем перейти к рассмотрению модели производственной функции комплексного аргумента, логично провести сравнительный анализ функций комплексного аргумента с двухфакторными моделями действительных переменных, которые довольно широко используются экономистами в моделировании экономики.

При построении многофакторных моделей социально-экономической динамики (в том числе и двухфакторных), учёные практически всегда встречаются с тем, что многие, а весьма часто и все коэффициенты парной корреляции между переменными, включаемыми в модель, близки по модулю к единице. Это явление получило название «мультиколлинеарности». Мультиколлинеарность, как следует из самого названия явления, возникает тогда, когда факторы модели имеют одинаковые, монотонные относительно друг друга почти линейные тенденции в динамике.

При этом возникает большая неприятность – попытка использования МНК для оценки коэффициентов многофакторных моделей в условиях мультиколлинеарности приводит к тому, что система нормальных уравнений МНК становится вырожденной - коэффициенты уравнений этой системы оказываются близкими друг к другу.

Эта проблема построения многофакторных моделей в условиях мультиколлинеарности занимает умы учёных с середины XX века и с тех пор и по настоящее время учёные предлагают разные способы борьбы моделирования в условиях мультиколлинеарности. Возникло даже особое направление в математической статистике – робастная статистика, главной задачей которой как раз и является построение многофакторных моделей в условиях мультиколлинеарности.

Покажем, как можно получить удовлетворительные оценки МНК многофакторной модели действительных переменных в условиях мультиколлинеарности, не прибегая к сложным математическим процедурам[1].

Прежде всего, запишем систему нормальных уравнений МНК для многофакторной линейной модели:

$$Y_t = a_0 + a_1 x_{1t} + a_2 x_{2t} + ... + a_n x_{nt}\,, \tag{5.2.1}$$

опуская пределы суммирования для простоты записи, и понимая, что оно ведётся для всех *t*, начиная с *t=1*, и заканчивая *t=T:*

$$\begin{cases} \sum Y_t = a_0 T + a_1 \sum x_{1t} + ... + a_n \sum x_{nt} \\ \sum Y_t x_{1t} = a_0 \sum x_{1t} + a_1 \sum x_{1t}^2 + ... + a_n \sum x_{nt} x_{1t} \\ ... \\ \sum Y_t x_{nt} = a_0 \sum x_{nt} + a_1 \sum x_{1t} x_{nt} + ... + a_n \sum x_{nt}^2 \end{cases}. \tag{5.2.2}$$

Теперь представим эту систему уравнений в виде уравнений в отрезках. Получим:

[1] Светуньков С.Г.. Моделирование в условиях мультиколлинеарности // Промышленная энергетика, 1994, № 6. – С. 28 - 32

$$
\begin{cases}
1 = \dfrac{a_0}{\dfrac{\sum Y_t}{T}} + \dfrac{a_1}{\dfrac{\sum Y_t}{\sum x_{1t}}} + \ldots + \dfrac{a_n}{\dfrac{\sum Y_t}{\sum x_{nt}}} \\
1 = \dfrac{a_0}{\dfrac{\sum Y_t x_{1t}}{\sum x_{1t}}} + \dfrac{a_1}{\dfrac{\sum Y_t x_{1t}}{\sum x_{1t}^2}} + \ldots + \dfrac{a_n}{\dfrac{\sum Y_t x_{1t}}{\sum x_{nt} x_{1t}}} \\
\ldots \\
1 = \dfrac{a_0}{\dfrac{\sum Y_t x_{nt}}{\sum x_{nt}}} + \dfrac{a_1}{\dfrac{\sum Y_t x_{nt}}{\sum x_{1t} x_{nt}}} + \ldots + \dfrac{a_n}{\dfrac{\sum Y_t x_{nt}}{\sum x_{nt}^2}}
\end{cases}. \tag{5.2.3}
$$

Поскольку каждое уравнение системы МНК представляет собой уравнение гиперплоскости в гиперпространстве коэффициентов a_i, то решением системы является точка пересечения гиперплоскостей в гиперпространстве. Но если коэффициенты уравнений этих гиперплоскостей очень близки друг к другу, то это означает, что гиперплоскости практически параллельны, а именно это и происходит в условиях мультиколлинеарности. Это, в свою очередь, означает, что малейший сдвиг хотя бы одной из гиперплоскостей в гиперпространстве приводит к тому, что точка пересечения всех гиперплоскостей существенно меняет свои координаты, которые являются искомыми оценками МНК. В таких условиях решение системы нормальных уравнений с округлением, например, до 10-го знака после запятой, приводит к получению одних значений коэффициентов многофакторной модели, а округление в процессе вычислений, например, до 8-го знака после запятой – к получению других, иногда противоположных по знаку коэффициентов той же самой многофакторной линейной модели.

Уравнения системы МНК в (5.2.3) представлены в виде уравнений гиперплоскостей в отрезках в гиперпространстве коэффициентов модели. Если в однофакторном случае оценки МНК представляют собой точку пересечения на плоскости параметров двух прямых условий МНК, поскольку неизвестных параметров всего два – a_0 и a_1, и задачу можно изобразить на плоскости, то уже при числе факторов, равном двум, число коэффициентов модели будет равно трем – a_0, a_1 и a_2. Графически такую задачу оценивания параметров многофакторной модели следует рассмотреть не на плоскости, а в трехмерном пространстве параметров. Действительно, число неизвестных параметров становится равным трем и их можно изобразить в качестве осей трехмерного пространства $0a_0$, $0a_1$ и $0a_2$. В этом случае условия МНК представляют собой систему из трех уравнений с тремя неизвестными, причем каждое из уравнений представляет собой не что иное, как уравнение плоскости в пространстве. Решение системы МНК в данном случае будет представлять собой точку пересечения трех плоскостей в этом пространстве коэффициентов. Координаты этой точки дают искомые с помощью МНК значения коэффициентов модели.

Если представить задачу нахождения коэффициентов многофакторных моделей в условиях мультиколлинеарности с помощью МНК в виде системы (5.2.3), то практически всегда величины полученных отрезков, отсекаемых гиперплоскостями условий МНК на каждой из осей гиперпространства коэффициентов, практически совпадают друг с другом, т.е. сами гиперплоскости почти параллельны друг другу. Очевидно, поэтому, что решение системы МНК, которое представляет собой точку пересечения этих практически параллельных друг другу гиперплоскостей в гиперпространстве, является чрезвычайно неустойчивым - малейшая ошибка в округлении может привести к тому, что гиперплоскости могут, перемещаясь незначительно в гиперпространстве, иметь новую точку их пересечения, значительно удаленную от первоначальной. При этом решение системы МНК, как точка пересечения гиперплоскостей, меняется так, что искажается не только абсолютная величина коэффициентов многофакторной модели, но и сам знак этих коэффициентов, что и происходит повсеместно.

Следовательно, последствия мультиколлинеарности действительно вызваны неприемлемостью существующего алгоритма оценивания параметров многофакторных моделей в этом случае. Тогда исследования должны быть направлены не на борьбу с объективно существующей реальностью - сильной коллинеарностью практически всех показателей и факторов социально-экономической динамики (что подтверждается явлением ложной корреляции), не на совершенствование математических алгоритмов работы со слабо обусловленными матрицами, а на улучшение используемого аппарата оценивания коэффициентов таких моделей.

Для повышения устойчивости оценок параметров многофакторных моделей необходимо «развести» гиперплоскости системы нормальных уравнений МНК, устранить их практическую параллельность. Следовательно, надо сделать так, чтобы отрезки на осях гиперпространств оценок параметров моделей были в максимально возможной степени отличны друг от друга, а не совпадать до такой степени, как это происходит всегда в условиях мультиколлинеарности. Лучший вариант – предложить такой вариант получения оценок МНК, при котором гиперплоскости будут перпендикулярны друг другу – это даст возможность получить устойчивые оценки коэффициентов модели.

Для того чтобы решить эту задачу, вспомним формулу определения угла между двумя плоскостями в трёхмерном пространстве. Если одна плоскость записывается уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{5.2.4}$$

а вторая плоскость уравнением

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0, \tag{5.2.5}$$

то косинус угла между ними можно определить по формуле[2]:

[2] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1984. - С. 85.

$$\cos\gamma = \frac{AA' + BB' + CC''}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}. \qquad (5.2.6)$$

Если плоскости почти параллельны, то угол между ними близок к нулю и косинус угла, соответственно, близок к единице. Если же плоскости перпендикулярны друг другу, то угол между ними равен 90 градусов и косинус равен нулю. Это означает, что для получения устойчивых оценок МНК в условиях мультиколлинеарности необходимо сделать такие преобразования, чтобы числитель был равен (или близок) нулю, или знаменатель стремился к бесконечности.

С помощью формулы определения косинуса угла между плоскостями (5.2.6) можно определить косинус угла между плоскостями системы (5.2.2) в пространстве коэффициентов эконометрической модели.

Косинус угла между первой и второй плоскостями, описываемых, соответственно, первым и вторым уравнениями системы нормальных уравнений, будет определяться так:

$$\cos\gamma_{12} = \frac{T\sum x_{1t} + \sum x_{1t}\sum x_{1t}^2 + \ldots + \sum x_{nt}\sum x_{1t}x_{nt}}{\sqrt{T^2 + (\sum x_{1t})^2 + \ldots + (\sum x_{nt})^2}\sqrt{(\sum x_{1t})^2 + (\sum x_{1t}^2)^2 + \ldots + (\sum x_{1t}x_{nt})^2}}. \qquad (5.2.7)$$

Равен нулю, как об этом говорилось, он может быть лишь в двух случаях – когда числитель равен нулю, а знаменатель - стремится к бесконечности.

Если второе условие, привести знаменатель к бесконечности, не увеличивая в этом же направлении числитель, не выполнимо, то первое условие выполняется легко. Для этого следует произвести центрирование исходных переменных относительно их средней арифметической. Следует напомнить, что операция центрирования представляет собой такое преобразование исходного ряда $\{x_t\}$, при котором из каждого значения ряда вычитается средняя арифметическая этого ряда:

$$x_t^{'} = x_t - \bar{x}. \qquad (5.2.8)$$

Как следует из элементарных основ математической статистики, сумма такого центрированного ряда будет равна нулю. Поэтому в формуле (5.2.7) будут равны нулю такие суммы:

$$\sum x_{1t} = 0,\ \sum x_{2t} = 0,\ \ldots, \sum x_{nt} = 0. \qquad (5.2.9)$$

А так как все они являются сомножителями каждого слагаемого числителя (5.2.7), то числитель будет равен нулю. При этом знаменатель всегда будет больше нуля. Это означает, что косинус угла между первой и второй гиперплоскостями равен нулю, то есть угол между ними равен 90 градусов и эти две гиперплоскости перпендикулярны друг другу. В свою очередь это говорит о том, что линия пересечения этих гиперплоскостей будет определяться очень устойчиво вне зависимости от ошибок округления.

Легко убедиться в том, что при условии (5.2.8) для всех коэффициентов модели углы между первой гиперплоскостью и другими гиперплоскостями гиперпространства искомых коэффициентов, определяемых системой нормальных уравнений МНК, будут прямыми, и первая гиперплоскость будет находиться по отношению к остальным гиперплоскостям плоскости перпендикулярно. При центрировании относительно средних арифметических косинусы углов между другими гиперплоскостями системы (5.2.2), например, второй и третьей, не будут равны нулю, но они будут меньше, чем в случае использования не центрированных переменных, а это свидетельствует о том, что гиперплоскости пересекают друг друга под более тупым углом, чем прежде и точка пересечения всех гиперплоскостей будет более устойчива к ошибкам округления и поступлению новой информации.

Во многих случаях эта простая процедура даёт удовлетворительные результаты, поэтому в условиях мультиколлинеарности следует всегда осуществлять предварительное центрирование всех исходных переменных. Однако на практике встречаются ситуации, когда и этот подход не даёт нужных результатов. Рассмотрим пример, исследованный М.Глущенковой и А.Земляной. Пусть мы наблюдаем некоторый социально-экономический процесс, который описывается функциональной двухфакторной линейной моделью с нулевым свободным членом:

$$y_t = 7,3x_{1t} + 2x_{2t}\,. \tag{5.2.10}$$

Факторы x_{1t} и x_{2t} в рассматриваемый период меняются линейно и это изменение описывается линейной функциональной зависимостью одного фактора от другого:

$$x_{2t} = 0,273972603x_{1t}\,. \tag{5.2.11}$$

Таблица 5.1

Данные условного примера

t	x_{1t}	x_{2t}	*Расчётное значение Y_t, полученное по (5.2.10)*
1	2	0,547945205	15,69589
2	4	1,095890411	31,39178
3	6	1,643835616	47,08767
4	8	2,191780822	62,78356
5	10	2,739726027	78,47945
6	12	3,287671233	94,17534
7	14	3,835616438	109,8712
8	16	4,383561644	125,5671
9	18	4,931506849	141,263
10	20	5,479452055	156,9589
11	22	6,02739726	172,6548
12	24	6,575342466	188,3507
13	26	7,123287671	204,0466
14	28	7,671232877	219,7425
15	30	8,219178082	235,4384
16	32	8,767123288	251,1342
17	34	9,315068493	266,8301
18	36	9,863013699	282,526
19	38	10,4109589	298,2219
20	40	10,95890411	313,9178

Очевидно, что в таком случае коэффициент парной корреляции между ними будет равен единице, что свидетельствует о крайнем случае мультиколлинеарности - о линейной функциональной зависимости между ними. В табл. 5.1 рассчитаны, в соответствии с приведённой формулой (5.2.10) при линейно изменяющихся переменных, величины результативного показателя y_t. Следует ещё раз подчеркнуть, что все данные табл. 5.1 - результаты функциональной зависимости (5.2.10) между всеми переменными.

Теперь поставим обратную задачу, а именно - по данным таблицы, не зная коэффициенты зависимости (5.2.10), построить многофакторную линейную модель, то есть – рассчитать по данным таблицы значения коэффициентов модели:

$$y_t = a_1 x_{1t} + a_2 x_{2t}$$

Поскольку между всеми переменными задачи имеется строго функциональная зависимость, на первый взгляд может показаться, что задача будет легко решена, поскольку в задаче нет ни одной случайной ошибки и неопределённости – задача полностью детерминирована. И конечно же, следует ожидать точности от применения МНК. Используем его для нахождения оценок исходной модели по табличным данным, зная, что свободный член равен нулю. Система нормальных уравнений для такой модели будет иметь вид:

$$\begin{cases} \sum Y_t x_{1t} = a_1 \sum x_{1t}^2 + a_2 \sum x_{2t} x_{1t} \\ \sum Y_t x_{2t} = a_1 \sum x_{1t} x_{2t} + a_2 \sum x_{2t}^2 \end{cases}.$$

Уравнения, с помощью которых можно вычислить коэффициенты, рассчитанные по данным табл. 5.1, примут вид такой системы:

$$\begin{cases} 90094,411 = a_1 11480 + a_2 3145,206 \\ 24683,403 = a_1 3145,206 + a_2 861,700 \end{cases}. \qquad (5.2.12)$$

Следующий шаг – решить систему и получить искомые значения коэффициентов. Но прежде, чем сделать это, приведём эту систему уравнений к системе уравнений в отрезках так, как это сделано в (5.2.3). Получим:

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{a_1}{7,8479452} + \dfrac{a_2}{28,645} \\ 1 = \dfrac{a_1}{7,8479452} + \dfrac{a_2}{28,645} \end{cases}. \qquad (5.2.13)$$

Как видно, система уравнений вырождена и не имеет решений. Плоскости уравнений МНК не только параллельны друг другу, они полностью совпадают друг с другом, то есть, они не имеют точку пересечения. Значит, многофакторный МНК не позволяет решить поставленную задачу.

Теперь осуществим предварительное центрирование исходных данных, которые приведены в табл. 5.1, относительно их средних арифметических, надеясь на улучшение ситуации. Тогда система нормальных уравнений будет иметь вид:

$$\begin{cases} 20875,53 = a_1 2660 + a_2 728,77 \\ 5719,32 = a_1 728,77 + a_2 199,66 \end{cases}. \qquad (5.2.14)$$

Очевидно, значения этой системы отличаются от тех значений, которые были получены без центрирования (5.2.12), но позволяет ли такое действие решить поставленную задачу? Для этого вновь представим полученную систему как систему уравнений в отрезках:

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{a_1}{7,8479452} + \dfrac{a_2}{28,645} \\ 1 = \dfrac{a_1}{7,8479452} + \dfrac{a_2}{28,645} \end{cases}.$$

Легко убедиться в том, что эта система совпадает с (5.2.13), и это говорит о том, что задача не может быть решена.

Между всеми переменными имеется строгая линейная зависимость, которая в трёхмерном пространстве исходных переменных представляет собой точки, лежащие на одной прямой линии, а поскольку эти точки лежат на одной прямой, то существует бесконечное количество плоскостей, которым будет принадлежать эта прямая линия. Система (5.2.13) это и демонстрирует – она даёт возможность бесконечного сочетания пар значений коэффициентов модели плоскости в трёхмерном пространстве, то есть позволяет получить бесконечное множество уравнений плоскостей, пересекающихся друг с другом и содержащих в себе прямую линию. Одной из таких плоскостей и является плоскость, описываемая уравнением (5.2.10). Но выделить эту плоскость из бесконечного числа других, как видно, с помощью МНК не представляется возможным.

Мы рассмотрели предельный случай, который не встречается в реальной экономической практике, но ситуации, близкие к рассматриваемой, встречаются повсеместно - когда коэффициенты парных корреляций между факторами и моделируемым результатом по модулю близки к единице, например, равны *0,97*. И в таких случаях мы будем иметь проблему оценивания коэффициентов многофакторной линейной модели, которая не имеет удовлетворительного решения в области действительных переменных.

Линейные модели комплексного аргумента, позволяют решить эту задачу. В общем виде линейная модель комплексного аргумента имеет вид:

$$y_r = (a_0 + ia_1)(x_r + ix_i) + (b_0 + ib_1). \qquad (5.2.15)$$

После центрирования исходных переменных относительно их средних арифметических эта модель будет выглядеть проще:

$$y_r = (a_0 + ia_1)(x_r + ix_i). \qquad (5.2.16)$$

Выделяя действительную и мнимую части этого равенства, получим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} y_r = a_0 x_r - a_1 x_i, \\ 0 = a_1 x_r + a_0 x_i \end{cases}. \qquad (5.2.17)$$

Откуда:

$$\begin{cases} y_r = a_0 x_r - a_1 x_i, \\ x_r = -\dfrac{a_0}{a_1} x_i \end{cases}. \qquad (5.2.18)$$

Первое уравнение полученной системы говорит о том, что результат линейно зависит от факторных переменных, а второе уравнение свидетельствует о том, что для линейной функции комплексного аргумента свойственна линейная функциональная зависимость между факторными переменными. Иначе говоря, *линейная функция комплексного аргумента имеет право на существование исключительно в условиях линейной взаимосвязи между факторами модели, то есть – в условиях проявления крайнего случая мультиколлинеарности – линейной функциональной зависимости между факторами*! Учёные борются всеми силами за то, чтобы устранить последствия действия мультиколлинеарности, а введённая в научный оборот функция комплексного аргумента в иных случаях использоваться и не должна!

Применим МНК к оценке коэффициентов комплекснозначной модели (5.2.16) так, как это было показано в четвёртой главе. В ней была выведена формула для оценки линейной модели комплексного аргумента:

$$\begin{cases} \sum\limits_t x_{rt} y_t = a_0 \sum\limits_t (x_{rt}^2 - x_{it}^2) - 2a_1 \sum\limits_t x_{rt} x_{it} \\ \sum\limits_t x_{it} y_t = a_1 \sum\limits_t (x_{rt}^2 - x_{it}^2) + 2a_0 \sum\limits_t x_{rt} x_{it} \end{cases}.$$

Или в отрезках:

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{a_0}{\dfrac{\sum\limits_t x_{rt} y_t}{\sum\limits_t (x_{rt}^2 - x_{it}^2)}} - \dfrac{a_1}{\dfrac{\sum\limits_t x_{rt} y_t}{2\sum\limits_t x_{rt} x_{it}}} \\ 1 = \dfrac{a_0}{\dfrac{\sum\limits_t x_{it} y_t}{2\sum\limits_t x_{rt} x_{it}}} + \dfrac{a_1}{\dfrac{\sum\limits_t x_{it} y_t}{\sum\limits_t (x_{rt}^2 - x_{it}^2)}} \end{cases}$$

Применительно к данным таблицы 5.1 эта система примет вид:

$$\begin{cases} 90094,41 = a_0 10618,29 - a_1 6290,41 \\ 24683,4 = a_1 10618,29 + a_0 6290,41 \end{cases}. \qquad (5.2.19)$$

Или в отрезках:

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{a_0}{8,4848} - \dfrac{a_1}{14,3225} \\ 1 = \dfrac{a_1}{2,3246} + \dfrac{a_0}{3,9239} \end{cases}. \qquad (5.2.20)$$

Легко убедиться в том, что получена устойчивая система нормальных уравнений, решая которую, получим такую модель комплексного аргумента:

$$y_r = (7,3 - i2)(x_1 + i x_2). \qquad (5.2.21)$$

Если теперь раскрыть скобки и сгруппировать действительную и мнимую части полученного равенства, то оно преобразуется в следующее:

$$y_r = 7,3x_1 + 2x_2 + i(-2x_1 + 7,3x_2)\,. \qquad (5.2.22)$$

Действительная часть полученного равенства полностью соответствует исходной функции (5.2.10), а мнимая часть легко преобразуется в такое равенство:

$$0 = i(-2x_{1t} + 7,3x_{2t}) \rightarrow x_{2t} = \frac{2}{7,3}x_{1t} = 0,273972603x_{1t}\,. \qquad (5.2.23)$$

То есть, абсолютно точно идентифицируется исходная зависимость между факторами (5.2.11). М.Глущенкова и Н.Земляная провели многочисленные расчёты на этом и других условных примерах, задавая дисперсию в факторы, уменьшая тем самым корреляцию между ними, а также внося дисперсию в уравнение зависимости, переводя её из функциональной в регрессионную. Каждый раз оценки линейной функции комплексной переменной оказывались устойчивыми к этим дисперсиям.

В завершение данного параграфа следует указать на принципиальное отличие линейной двухфакторной модели действительных переменных типа:

$$y_t = a_0x_{1t} + a_1x_{2t} \qquad (5.2.24)$$

и линейной модели комплексного аргумента:

$$y_t = (a_0 + ia_1)(x_{1t} + ix_{2t})\,. \qquad (5.2.25)$$

Несмотря на то, что в модели (5.2.24), как и в модели (5.2.25) две переменные и два коэффициента, они описывают разные фигуры. Модель действительных переменных (5.2.24) представляет собой уравнение плоскости в пространстве исходных переменных. Модель же комплексного аргумента (5.2.25) – уравнение прямой линии в этом пространстве.

Это значит, что в ситуации, когда между переменными x_{1t} и x_{2t} нет линейной зависимости, или линейная зависимость не описывается уравнением $x_r = -\frac{a_0}{a_1}x_i$, то модель комплексного аргумента будет давать не самые лучшие результаты, почему и следует использовать модель действительных переменных. Если же зависимость между факторами и результатом соответствует условиям (5.2.17), модель замечательно описывает процесс.

В целом ряде случаев нам удавалось встречаться на практике именно с этой ситуацией, но они, к сожалению, не доминируют, и широкого применения линейная модель комплексного аргумента в условиях мультиколлинеарности найти не может. Если бы удалось разработать метод приведения факторов многофакторной модели в условиях мультиколлинеарности к условиям (5.2.17), то тогда использование линейной модели комплексного аргумента в условиях мультиколлинеарности было бы универсальным.

Из этого в очередной раз следует вывод о том, что модели комплексных переменных – иные, нежели модели действительных переменных и их использование в моделировании экономики расширяет инструментальную базу экономики, облегчая решение сложных задач моделирования социально-экономических процессов.

5.3. Линейная производственная функция комплексного аргумента

Экономическая динамика сложна и многообразна. Нельзя исключать и такой вариант её развития, который описывается линейным характером изменения её показателей. В этом случае можно использовать для различных целей экономического анализа линейную ПФКА. Именно свойства линейной ПФКА, предложенной и изложенной в начале 2005 г., послужили основой для формирования комплекснозначной экономики[3]. Основные её характеристики хорошо изучены и описаны в монографии, опубликованной в 2008 году[4], поэтому в данной монографии остановимся лишь на наиболее важных её свойствах. Для построения этой простой функции будем использовать три переменные, описывающие производственный процесс, а именно: объём производства Q_t, затраты труда L_t и затраты капитала K_t. Представим производственные ресурсы в виде комплексной переменной.

Будем изучать линейную функцию комплексного аргумента без свободного члена, понимая, что при необходимости от него легко избавиться центрированием исходных переменных относительно их средних арифметических. Модель линейной производственной функции комплексного аргумента представим в следующем виде:

$$Q_t = (a_0 + ia_1)(K_t + iL_t). \tag{5.3.1}$$

Перемножив два сомножителя в правой части равенства (5.3.1) и группируя отдельно вещественную и мнимую части, получим:

$$Q_t = (K_t a_0 - L_t a_1) + i(L_t a_0 + K_t a_1) \cdot \tag{5.3.2}$$

Таким образом, производственную функцию (5.3.2) можно представить в виде системы двух уравнений:

$$Q_t = K_t a_0 - L_t a_1, \tag{5.3.3}$$

и

$$0 = L_t a_0 + K_t a_1. \tag{5.3.4}$$

Поскольку из материалов предыдущего параграфа ясно, что (5.3.1) представляет собой уравнение прямой линии в трехмерном пространстве, то на плоскости ресурсов она описывает такую линейную проекцию:

---

[3] Светуньков С.Г., Светуньков И.С. Исследование свойств производственной функции комплексного аргумента (препринт). – СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2005. – 24 с.
[4] Светуньков С.Г., Светуньков И.С. Производственные функции комплексных переменных. – М.: ЛКИ, 2008. – 136 с.

$$K_t = -\frac{a_0}{a_1} L_t . \quad (5.3.5)$$

Так как по определению капитальные ресурсы и трудовые ресурсы положительны, то (5.3.5) указывает на то, что один из коэффициентов пропорциональности должен быть отрицательным. Поскольку при этом чаще всего рост ресурсов ведёт к росту результатов производства, то для выполнения этого условия, необходимо, чтобы в (5.3.3) отрицательным был коэффициент a_1.

Это означает, что представив коэффициенты и ресурсы положительными, мы должны использовать такую линейную производственную функцию комплексного аргумента:

$$Q_t = \left(a_0 - ia_1\right)\left(K_t + iL_t\right). \quad (5.3.6)$$

Теперь довольно просто определить коэффициенты такой модели и их экономический смысл. Для этого из (5.3.1) выразим комплексный коэффициент пропорциональности через объёмы производства и производственные ресурсы:

$$a_0 - ia_1 = \frac{Q_t}{K_t + iL_t} = \frac{Q_t\,(K_t - iL_t)}{K_t^2 + L_t^2}, \quad (5.3.7)$$

Данное равенство, как это следует из свойств комплексных чисел, выполняется только в том случае, когда равны друг другу вещественные и мнимые части комплексных чисел в левой и правой частях равенства (5.3.7). Это свойство позволяет легко получить формулы для расчёта каждого из коэффициентов - раскрывая скобки и группируя отдельно вещественную и мнимую части, получаем формулы для вычисления каждого из коэффициентов. Для действительной части коэффициента пропорциональности:

$$a_0 = \frac{Q_t K_t}{K_t^2 + L_t^2}, \quad (5.3.8)$$

и для мнимой части коэффициента пропорциональности

$$a_1 = \frac{Q_t L_t}{K_t^2 + L_t^2}. \quad (5.3.9)$$

Из приведённых формул видно, что пара значений коэффициентов рассчитывается, когда имеется хотя бы одно наблюдение как за значениями ресурсов, так и за значениями производственного результата. Это свойство сразу же отличает предлагаемую функцию от её аналогов в области действительных чисел, где для нахождения двух неизвестных коэффициентов необходимо иметь хотя бы два наблюдения. Это свойство производственной функции (5.3.6) легко объяснимо - функция имеет только один неизвестный комплексный коэффициент, поэтому его значения легко определяются по одному наблюдению. Если бы мы находили коэффициенты более сложной линейной модели комплексного аргумента, например такого типа:

$$Q_t = \left(b_0 + ib_1\right) + \left(a_0 + ia_1\right)\left(K_t + iL_t\right),$$

то перед нами была бы модель с двумя комплексными коэффициентами, для нахождения значений которых необходимо уже иметь два наблюдения. Но поскольку мы изучаем простую функцию без свободного члена, то это означает, что для её практического использования необходимо осуществить предварительное центрирование исходных переменных относительно их средних арифметических.

Полученные формулы (5.3.8) и (5.3.9) позволяют не только найти численные значения коэффициентов по известным величинам затрат и результатов, но и дать экономическую интерпретацию коэффициентам a_0 и a_1 в том случае, когда производственный результат хорошо моделируется этой линейной функцией.

Знаменатели формул одинаковы и характеризуют масштаб привлекаемых ресурсов. Отличие в формулах наблюдается только в числителях, которые и позволяют понять смысловую нагрузку каждого коэффициента.

Числитель действительного коэффициента a_0 характеризует степень использования капитальных ресурсов, числитель мнимой части комплексного коэффициента характеризует степень использования трудовых ресурсов.

Поэтому есть смысл их называть именно так – коэффициент a_0 называть коэффициентом использования капитальных ресурсов, а коэффициент a_1 - коэффициентом использования трудовых ресурсов.

Построим линейную ПФКА по статистическим значениям произведённого национального дохода, величины основных производственных фондов и среднегодовой численности промышленно-производственного персонала бывшего СССР с 1972 по 1989 год. Эти данные, приведённые к относительным величинам, а также значения коэффициентов использования ресурсов, рассчитанные в соответствии с (5.3.8) и (5.3.9), приведены в таблице 5.2[5].

Для вычисления коэффициентов модели (5.3.1) все исходные данные таблицы отцентрированы относительно их средних арифметических.

По результатам изменения во времени комплексного коэффициента пропорциональности можно заметить, что для наблюдений, соответствующих 1981, 1982 и 1983 году комплексный коэффициент пропорциональности существенно отличается от значений всего ряда. Это легко объяснить – ведь проведено предварительное центрирование исходных данных относительно их средних арифметических, поэтому в точках, где наблюдения за ресурсами по своему значению приближаются к средним арифметическим, их разность близка к нулю, а в результате деления на малую величину, что предусматривается формулами (5.3.8) и (5.3.9), получаются значительные расчётные величины коэффициентов.

[5] Светуньков С.Г., Светуньков И.С. Производственные функции комплексных переменных. – М.: ЛКИ, 2008. – С. 50/

Действительно, например, для 1981 года центрированная относительная величина капитальных ресурсов бывшего СССР равна *0,015389*, в то время как для 1984 года она равна *0,432389*. Если игнорировать наблюдения за комплексным коэффициентом в эти годы, то можно заметить, что действительная часть комплексного коэффициента пропорциональности колеблется относительно величины *0,53422*, а мнимая часть комплексного коэффициента пропорциональности колеблется относительно значения *0,04278*, имея всё же тенденцию к некоторому снижению своего значения за весь период наблюдения.

Последнее означает, что в годы существования бывшего СССР для обеспечения национального дохода привлекалось относительно меньшее количество персонала, а это означает некоторый рост производительности труда.

Таблица 5.2.
Расчёт коэффициентов использования ресурсов для экономики бывшего СССР с 1972 по 1989 г.

Год	Национальный доход, Q_t	Основные производственные фонды, K_t	Среднегодовая численность промышленно-производственного персонала, L_t	Коэффициенты использования ресурсов	
				a_0	a_1
1972	1,000	1,000	1,000	0,553187	0,066240
1973	1,079	1,091	1,013	0,521700	0,061203
1974	1,130	1,193	1,029	0,526128	0,058947
1975	1,159	1,292	1,049	0,562921	0,055536
1976	1,232	1,393	1,073	0,537856	0,039692
1977	1,295	1,496	1,091	0,523597	0,026845
1978	1,361	1,612	1,109	0,510070	0,008363
1979	1,399	1,724	1,124	0,591209	-0,02362
1980	1,476	1,846	1,136	0,530158	-0,10133
1981	1,554	1,973	1,147	0,200023	0,420264
1982	1,671	2,107	1,159	0,822334	0,244040
1983	1,750	2,247	1,165	0,713303	0,124065
1984	1,819	2,390	1,169	0,641294	0,080584
1985	1,847	2,518	1,174	0,546466	0,057859
1986	1,875	2,649	1,178	0,484325	0,044366
1987	1,914	2,778	1,175	0,456662	0,033584
1988	2,014	2,904	1,151	0,502928	0,019308
1989	2,097	3,024	1,122	0,524799	0,003609

Посмотрим теперь - как линейная производственная функция комплексного аргумента (5.3.6) будет себя вести на примере экономики России и можно ли её использовать для этого случая. В таблице 5.3

приведены соответствующие статистические данные с 1998 по 2004 год. В качестве результата производственной функции Q_t нами используется валовой внутренний продукт, в качестве трудовых затрат L_t – численность занятого в экономике населения, в качестве капитала K_t - инвестиции в основной капитал. В двух последних столбцах этой же таблицы приведены результаты расчёта коэффициентов использования ресурсов.

Вновь наблюдаем в середине рассматриваемого отрезка влияние масштаба центрированных величин на коэффициенты модели - для 2001 – 2002 года коэффициент в сильно степени подвержен влиянию результатов центрирования. Очевидно, что по полученным значениям сделать вывод о характере производственного процесса сложно - нужны либо более длинные ряды, либо избавляться от свободного комплексного коэффициента иным путём, избегая центрирования относительно средних арифметических.

Таблица 5.3.

Исходные данные для построения производственной функции и расчётные значения коэффициентов использования ресурсов[6]

Год	Валовой внутренний продукт, Q_t		Инвестиции в основной капитал, K_t		Численность занятого в экономике населения, L_t		Коэффициенты использования ресурсов	
	Абсолютные значения, млрд.руб.	Относительные значения	Абсолютные значения, млрд.руб.	Относительные значения	Абсолютные значения, млн. чел.	Относительные значения	a_0	a_1
1998	2630	1,000	407,1	1,000	63,6	1,000	0,89868	0,00634
1999	4823	1,834	670,4	1,651	62,7	0,986	0,78225	0,01232
2000	7306	2,778	1165,2	2,860	64,2	1,009	0,78447	0,00901
2001	8944	3,401	1504,7	3,702	64,5	1,014	1,19895	0,07636
2002	10834	4,119	1762,4	4,331	66,2	1,041	1,12936	0,04457
2003	13285	5,051	2186,2	5,371	65,8	1,035	0,97630	0,00944
2004	16779	6,380	3105,1	7,627	66,9	1,053	0,74852	0,00649

Итак, самая простая модель комплексного аргумента (5.3.6), не смотря на то, что её коэффициенты имеют простой экономический смысл, не является универсальной, а потому малопригодна для описания реальных экономических ситуаций.

Более сложна, а значит, и более приспособлена для описания реальных экономических процессов линейная ПФКА со свободным членом:

$$Q_t = (b_0 + ib_1) + (a_0 + ia_1)(K_t + iL_t). \tag{5.3.10}$$

[6] Краткосрочные экономические показатели Российской Федерации/Госкомстат России. - Октябрь 2004 (http://www.cir.ru).

Этот свободный член снимает жёсткие требования относительно исходных данных и точек отсчёта. Поэтому она может более точно отражать реальные процессы. Впрочем, экономические процессы никогда не бывают линейными или нелинейными в соответствии с некоторой заданной формой. Все процессы в экономике меняются, меняются и складывающиеся пропорции, и выявленные количественные закономерности.

Поскольку возможны ситуации, которые описывают модели типа (5.3.10), следует рассмотреть свойства этих моделей и метод нахождения оценок её коэффициентов.

Для этого представим модель (5.3.10) не только в момент t, но и в следующем наблюдении:

$$Q_{t+1} = (b_0 + ib_1) + (a_0 + ia_1)(K_{t+1} + iL_{t+1}). \tag{5.3.11}$$

Если теперь от левой части равенства (5.3.11) отнять левую часть равенства (5.3.10), а от правой части равенства (5.3.11) отнять правую часть предыдущего равенства, получим:

$$\Delta Q_t = (a_0 + ia_1)(\Delta K_t + i\Delta L_t). \tag{5.3.12}$$

Откуда легко вывести формулы для вычисления комплексного коэффициента пропорциональности.

Для действительной части коэффициента пропорциональности это будет:

$$a_0 = \frac{\Delta Q_t \Delta K_t}{\Delta K_t^2 + \Delta L_t^2}, \tag{5.3.13}$$

а для мнимой части коэффициента пропорциональности:

$$a_1 = \frac{\Delta Q_t \Delta L_t}{\Delta K_t^2 + \Delta L_t^2}. \tag{5.3.14}$$

Поскольку в знаменателе каждой формулы одна и та же величина, характеризующая изменение отдачи масштаба ресурсов, то смысл коэффициентов определяется их числителями.

Первый коэффициент, составляющий действительную часть комплексного коэффициента пропорциональности, отражает прирост капитальных ресурсов, а второй – прирост трудовых ресурсов. Поэтому действительный коэффициент модели (5.3.11) может быть назван коэффициентом экстенсивности капитальных ресурсов, а второй соответственно – коэффициентом экстенсивности трудовых ресурсов.

Воспользовавшись полученными формулами для вычисления коэффициентов, оценим их значения на вышеприведённых примерах.

В табл. 5.4 приведены результаты вычислений по экономике бывшего СССР.

Действительная часть комплексного коэффициента пропорциональности изменяется вокруг некоторого среднего, которое равно *0,535*. Колебания эти имеют большой размах, но явно выраженной тенденции к изменению своих значений этот коэффициент не демонстрирует.

Мнимая часть комплексного коэффициента пропорциональности, которая в определённой степени отражает интенсивность использования трудовых ресурсов, демонстрирует уменьшение своих значений во времени. Если попытаться дать некоторую смысловую интерпретацию этой тенденции, то можно говорить о том, что трудовые ресурсы в бывшем СССР с каждым годом использовались всё менее и менее экстенсивно, то есть – всё более и более интенсивно по сравнению с предыдущим годом. Это означает рост производительности труда. Именно такой вывод был получен и с помощью модели (5.3.1). В первом приближении эту тенденцию изменения коэффициента экстенсивности использования трудовых ресурсов можно описать моделью линейного тренда:

$$a_{1t} = 0{,}1575 - 0{,}0137t.$$

Тогда с помощью линейной ПФКА производственный процесс в бывшем СССР может быть более или менее удачно описан моделью:

$$\Delta Q_t = \left(0{,}535 + i(0{,}1575 - 0{,}0137t\right)\left(\Delta K_t + i\Delta L_t\right),$$

где $t=T-1972$, T – текущий год.

Таблица 5.4.
Расчёт коэффициентов экстенсивности использования ресурсов для экономики бывшего СССР с 1972 по 1989 г.

Год	Прирост национального дохода, ΔQ_t	Прирост основных производственных фондов, ΔK_t	Прирост среднегодовой численности промышленно-производственного персонала, ΔL_t	Коэффициенты использования ресурсов	
				a_0	a_1
1972					
1973	0,079	0,091	0,013	0,850769	0,121538
1974	0,051	0,102	0,016	0,487992	0,076548
1975	0,029	0,099	0,020	0,281443	0,056857
1976	0,073	0,101	0,024	0,684142	0,162568
1977	0,063	0,103	0,018	0,593524	0,103723
1978	0,066	0,116	0,018	0,555588	0,086212
1979	0,038	0,112	0,015	0,333307	0,044639
1980	0,077	0,122	0,012	0,625100	0,061485
1981	0,078	0,127	0,011	0,609600	0,052800
1982	0,117	0,134	0,012	0,866188	0,077569
1983	0,079	0,140	0,006	0,563251	0,024139
1984	0,069	0,143	0,004	0,48214	0,013486
1985	0,028	0,128	0,005	0,218417	0,008532
1986	0,028	0,131	0,004	0,213541	0,006520
1987	0,039	0,129	-0,003	0,302162	-0,00703
1988	0,100	0,126	-0,024	0,765864	-0,14588
1989	0,083	0,120	-0,029	0,65350	-0,15793

Здесь следует указать на то, что формулы (5.3.13) и (5.3.14) будут стремиться к бесконечности, если прирост капитала и трудовых ресурсов незначителен и близок к нулю.

Посмотрим, что может дать эта модель линейной ПФКА на примере экономики России. Поскольку нас интересует демонстрация возможностей рассматриваемой модели, можно остановиться на тех данных, которые были приведены в табл. 5.3.

В табл. 5.5 приведены результаты расчёта коэффициентов экстенсивности использования капитальных и трудовых ресурсов. Как можно обнаружить из анализа характера изменения этих коэффициентов во времени, ни первый коэффициент, ни второй никакой тенденции изменения во времени не имеют. Следовательно, линейная ПФКА для моделирования экономики России по используемым данным применяться не может.

Естественно, что можно и не высчитывать значения коэффициентов на каждом наблюдении, а оценивать их величины на всём множестве наблюдений с помощью МНК.

Таблица 5.5.

Исходные данные для построения производственной функции и расчётные значения коэффициентов использования ресурсов

Год	Прирост ВВП, ΔQ_t	Прирост инвестиций в основной капитал, ΔK_t	Прирост численность занятого в экономике населения, ΔL_t	Коэффициенты экстенсивности использования ресурсов	
				a_0	a_1
1998					
1999	0,834	0,651	-0,014	-38,7810	-0,018330
2000	0,944	1,209	0,023	49,62157	0,017623
2001	0,623	0,842	0,005	104,9132	0,003678
2002	0,718	0,629	0,027	16,72674	0,029552
2003	0,932	1,04	-0,006	-161,5470	-0,005410
2004	1,329	2,256	0,018	166,5680	0,010520

Так, для центрированных исходных данных (то есть – для модели (5.3.1)), для вычисления оценок МНК модели комплексного аргумента необходимо решить комплексное уравнение:

$$a_0 + ia_1 = \frac{\sum Q_t(K_t + iL_t)}{\sum (K_t + iL_t)^2}. \qquad (5.3.15)$$

Применительно к примеру бывшего СССР оценки МНК комплексного коэффициента пропорциональности оказались такими:

$$a_0 + ia_1 = 0,52936 - i0,03976$$

Вычисление значений коэффициента на каждом наблюдении и расчёт их средних значений, приведённый ранее, давал такие значения этого комплексного коэффициента пропорциональности:

$$a_0 + ia_1 = 0,53422 + i0,04278$$

Значения действительной части коэффициента близки друг другу, но значения мнимой части – отличаются. Поэтому, понимая, что оценки МНК свободны от недостатков процедуры вычисления коэффициентов на каждом наблюдении, в случае, когда экономист принимает решение использовать модель производственной функции в форме линейной функции комплексного аргумента, ему следует использовать оценки МНК.

Поскольку рассматривается новая производственная функция, то для неё следует определить важную характеристику производственной функции как таковой – коэффициенты эластичности производственного результата по ресурсам. Интерес представляет линейная функция без свободного члена:

$$Q_t = \left(a_0 + ia_1\right)\left(K_t + iL_t\right)$$

Как известно, коэффициент эластичности представляет собой такую величину для дискретных величин:

$$\varepsilon_{\acute{o}\tilde{o}} = \frac{\Delta y}{y} \bigg/ \frac{\Delta x}{x}\ .$$

А для непрерывной функции коэффициент эластичности может быть записан так:

$$\varepsilon_{\acute{o}\tilde{o}} = \frac{dy}{y} \bigg/ \frac{\partial x}{x} = \frac{dy}{dx}\frac{x}{y}\ . \qquad (5.3.16)$$

Коэффициент эластичности по капиталу для рассматриваемой функции будет иметь вид:

$$\varepsilon_K = \frac{\partial Q}{\partial K}\frac{K}{Q} = \frac{\partial Q}{\partial K}\frac{K}{(a_0 + ia_1)(K + iL)}\ . \qquad (5.3.17)$$

Частная производная линейной производственной функции комплексного аргумента по капиталу будет равна:

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = (a_0 + ia_1)\ . \qquad (5.3.18)$$

Подставляя это значение частной производной в (5.3.17), получим формулу коэффициента эластичности производства по капиталу:

$$\varepsilon_K = \frac{K}{K + iL}\ . \quad (5.3.19)$$

Это означает, что коэффициент эластичности производства по капиталу является комплексной величиной и меняется с изменением номера наблюдения за комплексным ресурсом.

Аналогично можно определить и коэффициент эластичности производства по труду:

$$\varepsilon_L = \frac{\partial Q}{\partial L}\frac{L}{Q} = \frac{\partial Q}{\partial L}\frac{L}{(a_0 + ia_1)(K + iL)}\ . \qquad (5.3.20)$$

Поскольку частная производная объёма выпуска по труду равна

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = i(a_0 + ia_1), \qquad (5.3.21)$$

то искомый коэффициент эластичности объёма выпуска по труду будет также являться комплексным коэффициентом:

$$\varepsilon_L = \frac{iL}{K + iL}. \quad (5.3.22)$$

Легко заметить, что:

$$\varepsilon_K + \varepsilon_L = 1. \quad (5.3.23)$$

Поскольку коэффициент эластичности производственной функции показывает – насколько процентов изменится производственный результат при изменении ресурса на один процент, определим суть полученных коэффициентов. Каждый из коэффициентов эластичности (5.3.19) и (5.3.20) показывает, как изменится производственный результат с изменением данного ресурса с учётом влияния другого ресурса.

Если комплексный аргумент изменился на один процент, то и производственный результат, как следует из (5.3.23), также изменится на единицу.

Важной характеристикой производственной функции является изокванта, которая представляет собой совокупность точек на плоскости ресурсов, каждой из которых соответствует одно и то же значение производственного результата, то есть $Q=Q_c=const$.

Уравнение изокванты для модели производственной функции без свободного члена будет таким:

$$K = \frac{Q_c - a_1 L}{a_0}. \qquad (5.3.24)$$

Полученное уравнение свидетельствует о том, что изокванты представляют собой множество параллельных прямых, перемещающихся вправо вверх с ростом объёма производства.

5.4. Степенная производственная функция

Двухфакторная линейная зависимость в области действительных переменных представляет собой уравнение плоскости в трёхмерном пространстве. Линейная модель комплексного аргумента, как было выяснено ранее – представляет собой уравнение прямой линии.

Нелинейные двухфакторные модели действительных переменных представляют собой уравнение нелинейных поверхностей в трёхмерном пространстве, а нелинейные модели комплексного аргумента, соответственно, представляют собой уравнение некоторой кривой линии в трёхмерном пространстве. Особенности этих линий были рассмотрены во второй главе этой монографии. Зная это, рассмотрим нелинейные модели производственной функции комплексного аргумента.

Начнём это рассмотрение с традиционной для теории производственных функций формы – степенной модели. Из всего разнообразия форм степенных комплекснозначных функций рассмотрим вначале функцию с действительными коэффициентами. Она будет иметь вид:

$$Q_t = a(K_t + iL_t)^b . \qquad (5.4.1)$$

Линеаризуя её, получим:

$$\ln Q_t = \ln a + b\ln(K_t + iL_t) . \qquad (5.4.2)$$

Выделяя действительную и мнимую части линеаризованной функции, и используя главное значение логарифма, получим следующие равенства:

$$\begin{cases} \ln Q_t = \ln a + b\ln\sqrt{L_t^2 + K_t^2}, \\ 0 = barctg\dfrac{L_t}{K_t} \end{cases} . \qquad (5.4.3)$$

Из второго равенства имеем обязательное условие: $L_t=0$, что означает невозможность использования этой модели в моделировании производственных процессов.

Усложним модель за счёт введения в неё комплексного коэффициента пропорциональности:

$$Q_t = (a_0 + ia_1)(K_t + iL_t)^b . \qquad (5.4.4)$$

Логарифмируем левые и правые части модели:

$$\ln Q_t = \ln\sqrt{a_0^2 + a_1^2} + iarctg\frac{a_1}{a_0} + b\ln(K_t + iL_t) . \qquad (5.4.5)$$

Теперь, приводя отдельно действительную и мнимую части полученных равенств, модель может быть представима в виде системы двух равенств:

$$\begin{cases} \ln Q_t = \ln\sqrt{a_0^2 + a_1^2} + b\ln\sqrt{L_t^2 + K_t^2}, \\ arctg\dfrac{a_1}{a_0} = -barctg\dfrac{L_t}{K_t}. \end{cases} \qquad (5.4.6)$$

Из полученной системы следует вывод о том, что степенная производственная функция комплексного аргумента (5.4.4) может использоваться в том случае, когда между ресурсами имеется линейная зависимость с постоянным углом наклона между ними, то есть – прямая линия проходит через нулевую точку.

При этом зависимость между производственными ресурсами и производственным результатом носит сложный характер, суть которого можно определить из экспоненциальной формы записи модели (5.4.4):

$$Q_t = \sqrt{a_0^2 + a_1^2}(L_t^2 + K_t^2)^b . \qquad (5.4.7)$$

Найдём теперь значения коэффициентов эластичности этой функции (5.4.4) по капиталу и труду.

Коэффициент эластичности производства по капиталу:

$$\varepsilon_K = \frac{\partial Q}{\partial K}\frac{K}{Q} = \frac{\partial Q}{\partial K}\frac{K}{(a_0 + ia_1)(K + iL)^b} \quad (5.4.8)$$

может быть определён, если известна частная производная функции комплексного аргумента по капиталу:

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = b(a_0 + ia_1)(K + iL)^{b-1}. \quad (5.4.9)$$

Тогда коэффициент эластичности производства по капиталу будет таким:

$$\varepsilon_K = \frac{bK}{K + iL}. \quad (5.4.10)$$

Аналогично определяется и коэффициент эластичности функции (5.4.4) по труду:

$$\varepsilon_L = \frac{ibL}{K + iL}. \quad (5.4.11)$$

В том случае если не отдельный ресурс будет меняться на один процент, а весь комплексный ресурс изменится на один процент, то производственный результат изменится на

$$\varepsilon = \varepsilon_K + \varepsilon_L = b. \quad (5.4.12)$$

Таким образом, показатель степени рассматриваемой функции выступает коэффициентом общей эластичности производства по комплексному аргументу.

Теперь определим уравнение изокванты. Полагая $Q=Q_c=const$, можно получить уравнение изокванты для модели (5.4.4):

$$L_t^2 + K_t^2 = \left(\frac{Q_c}{\sqrt{a_0^2 + a_1^2}}\right)^{\frac{1}{b}}, \quad (5.4.13)$$

Из чего следует, что изокванты модели (5.4.4) представляют собой окружности на плоскости производственного ресурса с разными диаметрами, величина которых определяется производственным результатом Q_c – с его ростом радиус окружностей растёт.

Рассмотрим теперь модель производственной функции комплексного аргумента с комплексным коэффициентом пропорциональности и мнимым показателем степени:

$$Q_t = (a_0 + ia_1)(L_t + iK_t)^{ib}. \quad (5.4.14)$$

Логарифмируя и выделяя действительные и мнимые части, получим:

$$\begin{cases} \ln Q_t = \ln\sqrt{a_0^2 + a_1^2} - b\,arctg\,\dfrac{K_t}{L_t}, \\ arctg\,\dfrac{a_1}{a_0} = b\ln\sqrt{L_t^2 + K_t^2}. \end{cases} \quad (5.4.15)$$

Здесь мы видим из второго равенства, что зависимость между ресурсами представляет собой окружность. В трёхмерном пространстве это означает модель одной четверти цилиндра, перпендикулярного к плоскости ресурсов.

Между производственными ресурсами и производственным результатом имеется сложная нелинейная зависимость такой формы:

$$Q_t = \sqrt{a_0^2 + a_1^2} e^{-barctg\frac{K_t}{L_t}}. \qquad (5.4.16)$$

Дополнительную информацию о функции и её свойствах дают коэффициенты эластичности. Коэффициент эластичности производственного результата по комплексному аргументу применительно к функции (5.4.14) будет вычисляться так:

$$\varepsilon_K = \frac{dQ}{d(K+iL)} \frac{(K+iL)}{Q}. \qquad (5.4.17)$$

Для того чтобы его найти, следует вычислить производную данной функции по комплексному аргументу:

$$\frac{dQ}{d(K+iL)} = \frac{(a_0 + ia_1)(K+iL)^{ib}}{d(K+iL)}$$

Для этого представим функцию (5.4.14) в экспоненциальной форме:

$$Q_t = \sqrt{a_0^2 + a_1^2} e^{iarctg\frac{a_1}{a_0}} [\sqrt{L^2 + K^2} e^{iarctg\frac{L}{K}}]^{ib} = \sqrt{a_0^2 + a_1^2} e^{iarctg\frac{a_1}{a_0}} (\sqrt{L^2 + K^2})^{ib} e^{-barctg\frac{L}{K}}. \qquad (5.4.18)$$

Согласно условию Даламбера-Эйлера (Римана-Коши) производную комплекснозначной функции можно найти, вычисляя производную действительной части по каждой из составляющей комплексного аргумента. Действительная часть функции комплексного аргумента будет иметь вид:

$$Q_t = R\cos\theta = ae^{-barctg\frac{L}{K}} \cos(\alpha + b\ln\sqrt{L^2 + K^2}), a = \sqrt{a_0^2 + a_1^2}, \alpha = arctg\frac{a_1}{a_0}. \qquad (5.4.19)$$

Первая производная будет определена так:

$$\frac{dQ}{d(K+iL)} = \frac{\partial Q}{\partial K} - i\frac{\partial Q}{\partial L}. \qquad (5.4.20)$$

Первая частная производная объёма по капиталу:

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{\partial (ae^{-barctg\frac{L}{K}} \cos(\alpha + b\ln\sqrt{L^2 + K^2}))}{\partial K} \qquad (5.4.21)$$

может быть определена как производная сложной функции:

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{\partial (ae^{-barctg\frac{L}{K}})}{\partial K} \cos(\alpha + b\ln\sqrt{L^2 + K^2}) + \frac{\partial (\cos(\alpha + b\ln\sqrt{L^2 + K^2}))}{\partial K} ae^{-barctg\frac{L}{K}}. \qquad (5.4.22)$$

Её первая часть будет равна:

$$\frac{\partial (ae^{-barctg\frac{L}{K}})}{\partial K} \cos(\alpha + b\ln\sqrt{L^2 + K^2}) = \frac{\partial (-barctg\frac{L}{K})}{\partial K} ae^{-barctg\frac{L}{K}} \cos(\alpha + b\ln\sqrt{L^2 + K^2}). \qquad (5.4.23)$$

Поскольку

$$\frac{\partial(-barctg\,\frac{L}{K})}{\partial K} = -b\frac{\frac{\partial\frac{L}{K}}{\partial K}}{1+(\frac{L}{K})^2} = \frac{b\,\frac{L}{K^2}}{1+(\frac{L}{K})^2}, \quad (5.4.24)$$

первая часть производной (5.4.22) будет записана так:

$$\frac{b\,\frac{L}{K^2}}{1+(\frac{L}{K})^2} ae^{-barctg\frac{L}{K}}\cos(\alpha + b\ln\sqrt{L^2+K^2}) = \frac{b\,\frac{L}{K^2}}{1+(\frac{L}{K})^2} R\cos\theta = b\frac{bL}{K^2+L^2}R\cos\theta,$$

(5.4.25)

Рассмотрим теперь вторую часть производной сложной функции (5.4.22):

$$\frac{\partial(\cos(\alpha + b\ln\sqrt{L^2+K^2}))}{\partial K} ae^{-barctg\frac{L}{K}} = -R\sin\theta\frac{bK}{L^2+K^2}. \quad (5.4.26)$$

С учётом (5.4.25) и (5.4.26) первая частная производная объёма по капиталу:

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{bL}{K^2+L^2}R\cos\theta - \frac{bK}{K^2+L^2}R\sin\theta = \frac{bR}{K^2+L^2}(L\cos\theta - K\sin\theta), \quad (5.4.27)$$

Найдём теперь первую частную производную по труду, поскольку она составляет второе слагаемое искомой производной:

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{\partial(ae^{-barctg\frac{L}{K}}\cos(\alpha + b\ln\sqrt{L^2+K^2}))}{\partial L}. \quad (5.4.28)$$

Рассмотрим её как производную сложной функции:

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{\partial(ae^{-barctg\frac{L}{K}})}{\partial L}\cos(\alpha + b\ln\sqrt{L^2+K^2}) + \frac{\partial(\cos(\alpha + b\ln\sqrt{L^2+K^2}))}{\partial L} ae^{-barctg\frac{L}{K}}. \quad (5.4.29)$$

Первая часть этой суммы будет равна:

$$\frac{\partial(ae^{-barctg\frac{L}{K}})}{\partial L}\cos\theta = \frac{\partial(-barctg\,\frac{L}{K})}{\partial L} ae^{-barctg\frac{L}{K}}\cos\theta. \quad (5.4.30)$$

А так как

$$\frac{\partial(-barctg\,\frac{L}{K})}{\partial L} = -b\frac{\frac{\partial\frac{L}{K}}{\partial L}}{1+(\frac{L}{K})^2} = -\frac{\frac{b}{K}}{1+(\frac{L}{K})^2} = -\frac{bK}{K^2+L^2}, \quad (5.4.31)$$

получим для первого слагаемого (5.4.29):

$$-\frac{bK}{K^2+L^2}R\cos\theta, \quad (5.4.32)$$

Вторая часть производной сложной функции

$$\frac{\partial(\cos(\alpha + b\ln\sqrt{L^2+K^2}))}{\partial L} R = -R\sin\theta\frac{bL}{L^2+K^2}. \quad (5.4.33)$$

Тогда первая производная рассматриваемой функции объёма по труду можно записать с учётом (5.4.32) и (5.4.33) так:

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = -\frac{bK}{K^2+L^2} R\cos\theta - R\sin\theta \frac{bL}{L^2+K^2} = -\frac{bR}{K^2+L^2}(K\cos\theta + L\sin\theta). \quad (5.4.34)$$

Теперь можно получить и общую формулу для первой производной комплексной функции по комплексному аргументу, подставляя в (5.4.20) значение первого (5.4.27) и второго (5.4.34) слагаемых. Получим:

$$\frac{\partial Q}{\partial(K+iL)} = \frac{bR}{K^2+L^2}(L\cos\theta - K\sin\theta) - i(-\frac{bR}{K^2+L^2}(K\cos\theta + L\sin\theta)), \quad (5.4.35)$$

Группируя, можно получить такую формулу:

$$\frac{\partial Q}{\partial(K+iL)} = \frac{bR}{K^2+L^2}[L(\cos\theta + i\sin\theta) - iK(\cos\theta + i\sin\theta)], \quad (5.4.36)$$

которая легко преобразуется к виду:

$$\frac{\partial Q}{\partial(K+iL)} = \frac{(L-iK)}{K^2+L^2} = \frac{bRe^{i\theta}}{L+iK}, \quad (5.4.37)$$

Теперь может быть найден коэффициент эластичности рассматриваемой функции по комплексному аргументу:

$$\varepsilon_{K+iL} = \frac{dQ}{d(K+iL)} / \frac{Q}{K+iL} = \frac{bRe^{i\theta}}{L+iK}\frac{K+iL}{Re^{i\theta}} = ib. \quad (5.4.38)$$

Коэффициент эластичности рассматриваемой функции есть величина мнимая!

Коэффициент эластичности рассматриваемой функции по капиталу можно вычислить, воспользовавшись полученной формулой первой частной производной функции по капиталу (5.4.27):

$$\varepsilon_K = \frac{\partial Q}{\partial K} / \frac{Q}{K} = \frac{bR}{K^2+L^2}(L\cos\theta - K\sin\theta) / \frac{Re^{i\theta}}{K} = \frac{bK(L\cos\theta - K\sin\theta)}{(K^2+L^2)(\cos\theta + i\sin\theta)}. \quad (5.4.39)$$

Также легко, воспользовавшись выведенными ранее значениями частной производной функции по труду (5.4.34), найти эластичность объёма по этому ресурсу:

$$\varepsilon_L = \frac{\partial Q}{\partial L} / \frac{Q}{L} = -\frac{bR}{K^2+L^2}(K\cos\theta + L\sin\theta) / \frac{Re^{i\theta}}{L} = -\frac{bL(K\cos\theta + L\sin\theta)}{(K^2+L^2)(\cos\theta + i\sin\theta)}. \quad (5.4.40)$$

Если предположить, что производственный результат является величиной постоянной, то можно найти уравнение изокванты такой производственной функции.

Из (5.4.16) при условии постоянства результата имеем очевидное равенство:

$$-barctg\frac{K_t}{L_t} = const. \quad (5.4.41)$$

То есть, изокванта представляет собой прямую линию на плоскости ресурсов, выходящую из начала координат.

Легко заметить, что смена показателя степени с действительного на мнимый симметрично поменяла свойства действительной и мнимой частей.

Следовательно, вместе с ограничением на форму изменения ресурсов (цилиндрическую) зависимость производственного результата от ресурсов, изображённая в пространстве, представляет собой нелинейную кривую, располагающуюся на поверхности цилиндра. Форма этой модели значительно сложнее, чем форма модели с действительным показателем степени.

Степенная форма производственной функции комплексного аргумента может иметь и более сложный вид, если использовать комплексный показатель степени:

$$Q_t = a_0(K_t + iL_t)^{(b_0+ib_1)}. \qquad (5.4.42)$$

Логарифмируя левую и правую части функции, получим:

$$\ln Q_t = \ln a_0 + (b_0+ib_1)\ln(K_t+iL_t) = \ln a_0 + (b_0+ib_1)(\ln\sqrt{L_t^2+K_t^2} + iarctg\frac{L_t}{K_t}). \qquad (5.4.43)$$

Откуда, выделяя действительную и мнимую части:

$$\begin{cases} \ln Q_t = \ln a_0 + b_0\ln\sqrt{L_t^2+K_t^2} - b_1 arctg\dfrac{L_t}{K_t}, \\ 0 = b_0 arctg\dfrac{L_t}{K_t} + b_1\ln\sqrt{L_t^2+K_t^2}. \end{cases} \qquad (5.4.44)$$

Из второго равенства этой системы уравнений следует, что модель (5.4.42) пригодна для моделирования производственных процессов, для которых зависимость между ресурсами носит сложный нелинейный характер, представление которой в явном виде проблематично. Поскольку при разных значениях коэффициентов b_0 и b_1 эта зависимость принимает самый различный вид, то она имеет больше оснований для практического применения, нежели модели степенных производственных функций комплексного аргумента, рассмотренные ранее.

Универсальной следует признать степенную производственную функцию комплексного аргумента с комплексными коэффициентами:

$$Q_t = (a_0+ia_1)(K_t+iL_t)^{(b_0+ib_1)}, \qquad (5.4.45)$$

поскольку, логарифмируя левую и правую части этой функции, и выделяя действительную и мнимую части, получим:

$$\begin{cases} \ln Q_t = \ln\sqrt{a_0^2+a_1^2} + b_0\ln\sqrt{L_t^2+K_t^2} - b_1 arctg\dfrac{L_t}{K_t}, \\ 0 = arctg\dfrac{a_1}{a_0} + b_0 arctg\dfrac{L_t}{K_t} + b_1\ln\sqrt{L_t^2+K_t^2}. \end{cases} \qquad (5.4.46)$$

Разные сочетания коэффициентов этой модели позволяет моделировать самые различные нелинейные зависимости производственного результата от ресурсов, зависимость между которыми меняется от линейной (при $b_1=0$) до сложных нелинейных. Коэффициенты такой модели следует находить с помощью МНК так, как об этом говорилось в четвёртой главе монографии.

Впрочем, использование комплексного показателя степени позволяет находить промежуточные значения этого показателя. Для этого возьмём отношения друг к другу левых и правых частей модели в рядом стоящие моменты времени. Получим:

$$\frac{Q_t}{Q_{t-1}} = (\frac{K_t+iL_t}{K_{t-1}+iL_{t-1}})^{b_0+ib_1}. \qquad (5.4.47)$$

Откуда легко найти комплексный показатель степени:

$$b_{t0} + ib_{t1} = \ln\frac{Q_t}{Q_{t-1}} / \ln(\frac{K_t + iL_t}{K_{t-1} + iL_{t-1}}).$$

Продемонстрируем изменение показателя степени для этой модели на примере экономики России. Для этого будем использовать более длинный ряд данных с 1995 по 2009 год. Результаты вычисления комплексного показателя степени приведены в табл. 5.6.

Таблица 5.6.

Исходные данные (в безразмерных величинах) для построения степенной ПФКА и расчётные значения комплексного показателя степени

Год	ВВП, Q_t	Основные фонды, K_t	Численность экономически активного населения, L_t	Коэффициенты	
				b_0	b_1
1995	1	1	1		
1996	1,406	2,523	0,983	0,373	0,238
1997	1,640	2,564	0,961	5,833	6,783
1998	1,841	2,726	0,950	1,836	0,801
1999	3,376	2,749	1,019	15,272	-19,114
2000	5,114	3,204	1,021	2,715	0,919
2001	6,261	3,906	1,008	1,016	0,312
2002	7,574	4,714	1,022	1,016	0,222
2003	9,246	5,853	1,028	0,924	0,176
2004	11,919	6,280	1,029	3,609	0,603
2005	15,127	7,404	1,042	1,450	0,204
2006	18,843	8,457	1,046	1,653	0,210
2007	23,274	10,469	1,059	0,990	0,105
2008	29,001	12,457	1,071	1,266	0,111
2009	27,371	14,371	1,056	-0,404	-0,035

На протяжении всего периода вычислений комплексный показатель степени менял свои значения. Особенно это заметно для ситуации времени дефолта – 1998-1999 годы. Расчётное значение коэффициента существенно изменилось. Если же рассматривать комплексный показатель степени за последующий период, то его действительная и мнимая части менялись не столь значительно. Следовательно, в этот период модель (5.4.42) может описать производство более или менее удовлетворительно.

Нет необходимости проводить сложные выкладки и доказывать, что коэффициент эластичности рассматриваемой функции комплексного аргумента (5.4.42) будет равен:

$$\varepsilon_{K+iL} = b_0 + ib_1, \quad (5.4.48)$$

поскольку эту функцию можно представить и в таком виде:

$$Q_t = (a_0 + ia_1)(K_t + iL_t)^{b_0}(K_t + iL_t)^{ib_1}, \qquad (5.4.49)$$

откуда со всей очевидностью вытекает (5.4.48).

Существенным преимуществом степенной ПФКА является то, что ареал её применения несравнимо более обширен, чем линейной модели, поскольку при $b_0=1$ и $b_1=0$ модель (5.4.42) превращается именно в модель линейной производственной функции комплексного аргумента, что говорит о том, что линейная модель ПФКА является частным случаем степенной модели. Кстати, при $b_0=1$ и $b_1=0$ моделируется обратно пропорциональная комплекснозначная зависимость, которая моделирует ситуацию стагнации - увеличение производственных ресурсов в этой модели приводит к уменьшению производственного результата.

5.5. Показательная производственная функция комплексного аргумента

Из семейства возможных моделей показательных производственных функций комплексного аргумента рассмотрим показательную функцию по натуральному основанию, понимая, что с таким же успехом могут быть применены и другие основания – десятичные, двоичные и т.п.

Исследование этой функции начнём, как и прежде по принципу: от простого – к сложному. Самой простой в этом семействе представляется модель показательной функции с действительными коэффициентами:

$$Q_t = ae^{b(K_t+iL_t)}. \qquad (5.5.1)$$

Эта функция легко может быть преобразована к такому виду:

$$Q_t = ae^{bK_t}e^{ibL_t}. \qquad (5.5.2)$$

В силу того, что для комплексных переменных об их равенстве друг другу можно говорить только в том случае, когда равны друг другу действительные и мнимые части, можно убедиться в том, что эта модель означает систему двух равенств:

$$\begin{cases} Q_t = ae^{bK_t}, \\ 2\pi k = bL_t. \end{cases} \qquad (5.5.3)$$

Здесь $k=0,1,2,3,\ldots$

Удобнее, конечно, считать, что $k=0$. В любом случае второе уравнение системы (5.5.3) свидетельствует только об одном – трудовые ресурсы здесь рассматриваются как величина постоянная. А из первого равенства системы, видно, что эта модель представляет собой однофакторную степенную зависимость объёма производства от капитальных ресурсов. И первое, и второе уравнения системы показывают, что эта модель описывает влияние капитала на объём производства при постоянной величине затрат труда, никак не влияющего ни на результат, ни на капитал.

Точно такой же, но «симметричный» относительно производственных ресурсов смысл имеет показательная функция с мнимым показателем степени:

$$Q_t = ae^{ib(K_t + iL_t)}. \tag{5.5.4}$$

Эта функция легко может быть преобразована к такому виду:

$$Q_t = ae^{ibK_t}e^{-bL_t}. \tag{5.5.5}$$

Откуда:

$$\begin{cases} Q_t = ae^{-bL_t}, \\ 2\pi k = bK_t. \end{cases} \tag{5.5.6}$$

Что вновь свидетельствует о том, что моделируется однофакторная зависимость производственного результата от труда при постоянстве капитальных ресурсов.

Не особо изменится практическая значимость этой модели, если использовать теперь не действительный, а мнимый коэффициент пропорциональности:

$$Q_t = iae^{b(K_t + iL_t)}. \tag{5.5.7}$$

И эта функция может быть преобразована к удобному для понимания её сути виду:

$$Q_t = ae^{i(\pi/2)}e^{bK_t}e^{ibL_t}. \tag{5.5.8}$$

Аргумент мнимого коэффициента пропорциональности определён с точностью до одного периода. Теперь легко получить систему двух уравнений, характеризующих действительную и мнимую части модели (5.5.7):

$$\begin{cases} Q_t = ae^{bK_t}, \\ \dfrac{\pi}{2} = -bL_t. \end{cases} \tag{5.5.9}$$

И это означает, что модель (5.5.7) предполагает априорное постоянство капитального ресурса.

Усложним модель за счёт использования комплексного коэффициента пропорциональности, оставляя вещественный коэффициент пропорциональности при показателе степени:

$$Q_t = (a_0 + ia_1)e^{b(K_t + iL_t)}. \tag{5.5.10}$$

Эта модель комплексного аргумента может быть представлена в виде равенств друг другу модуля и аргумента, что составляет следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} Q_t = \sqrt{a_0^2 + a_1^2}\,e^{bK_t}, \\ 2\pi k = arctg\,\dfrac{a_1}{a_0} + bL_t. \end{cases} \tag{5.5.11}$$

И вновь мы видим, что эта модель предполагает априорное выполнение постоянства трудового ресурса (второе уравнение системы (5.5.11)) и однофакторную зависимость производственного результата от капитальных ресурсов.

Таким образом, в отличие от модели степенной производственной функции комплексного аргумента модель показательной производственной функции комплексного аргумента лишена многообразия и может быть представлена для практических целей исключительно в форме с комплексным показателем степени:

$$Q_t = (a_0 + ia_1)e^{(b_0+ib_1)(K_t+iL_t)}. \qquad (5.5.12)$$

Выделяя её модуль и аргумент, получим такую систему уравнений:

$$\begin{cases} Q_t = \sqrt{a_0^2 + a_1^2}\,\dfrac{e^{b_0K_t}}{e^{b_1L_t}}, \\ 2\pi k = arctg\,\dfrac{a_1}{a_0} + b_0L_t + b_1K_t. \end{cases} \qquad (5.5.13)$$

Из второго уравнения системы следует, что модель показательной степенной функции комплексного аргумента предполагает априорное наличие линейной зависимости между производственными ресурсами.

Первое уравнение показывает, что аналогом комплекснозначной функции (5.5.12) в области действительных переменных (при линейном изменении ресурсов) выступает экспоненциальная модель:

$$Q_t = \sqrt{a_0^2 + a_1^2}\,\frac{e^{b_0L_t}}{e^{b_1K_t}} = ae^{b_0L_t - b_1K_t}.$$

Эта же функция в логарифмах будет выглядеть так:

$$\ln Q_t = A + b_0L_t - b_1K_t. \qquad (5.5.14)$$

Графически модель будет представлять собой экспоненту, расположенную на плоскости, перпендикулярной оси ресурсов, все точки на которой удовлетворяют второму равенству системы (5.5.13).

Найти коэффициенты такой модели с помощью МНК не представляет особых затруднений.

Впрочем, есть возможность, не прибегая к МНК, определить - насколько модель может быть пригодна для описания реальной экономической производственной ситуации.

Для этого разделим левые и правые части равенства (5.5.12) в момент времени *t* на левые и правые части этого же равенства в предыдущий момент. Получим:

$$\frac{Q_t}{Q_{t-1}} = e^{(b_0+ib_1)(\Delta K_t + i\Delta L_t)}. \qquad (5.5.15)$$

Тогда комплексный показатель степени можно определить по двум значениям исходных переменных:

$$b_0 + ib_1 = \frac{\ln\dfrac{Q_t}{Q_{t-1}}}{\Delta K_t + i\Delta L_t}. \qquad (5.5.16)$$

Для демонстрации такой возможности вновь будем использовать пример экономики России. Исходные данные и результаты сведены в табл. 5.7

Таблица 5.7
Показательная ПФКА и
расчётные значения комплексного показателя степени

Год	ВВП, Q_t	Основные фонды, K_t	Численность экономически активного населения, L_t	Коэффициенты	
				b_0	b_1
1995	1	1	1		
1996	1,406	2,523	0,983	2,891	0,002
1997	1,640	2,564	0,961	0,711	1,562
1998	1,841	2,726	0,950	2,717	0,046
1999	3,376	2,749	1,019	0,912	-7,959
2000	5,114	3,204	1,021	0,288	-0,004
2001	6,261	3,906	1,008	0,235	0,005
2002	7,574	4,714	1,022	0,175	-0,004
2003	9,246	5,853	1,028	0,595	-0,001
2004	11,919	6,280	1,029	0,212	-0,001
2005	15,127	7,404	1,042	0,209	-0,002
2006	18,843	8,457	1,046	0,105	-0,001
2007	23,274	10,469	1,059	0,111	-0,001
2008	29,001	12,457	1,071	-0,030	-0,001
2009	27,371	14,371	1,056	0,000	0,000

Как видно из таблицы, комплексный показатель степени показательной ПФКА меняется, особенно его действительная часть. Это свидетельствует о том, что такая модель для моделирования протекающего производственного процесса не пригодна.

Как видно, степенная модель комплексного аргумента, рассмотренная в параграфе 5.4, обладает значительно более интересными для практического применения свойствами, чем показательная модель. Нельзя, конечно, исключать, что в некоторых случаях показательная функция комплексного аргумента лучше опишет некоторый производственный процесс, чем степенная, но таких случаев будет очень не много. Именно поэтому в этом параграфе не изучаются коэффициенты эластичности данной производственной функции.

5.6.Логарифмическая производственная функция комплексного аргумента

Логарифмическая функция комплексной переменной является периодической функцией, и мы будем, как и договаривались в начале монографии, использовать исключительно главное значение логарифма. В этом случае логарифмическая производственная функция комплексного аргумента примет следующий вид:

$$Q_t = (a_0 + ia_1) + (b_0 + ib_1)\ln(K_t + iL_t). \quad (5.6.1)$$

В этой функции влияние свободного члена очевидно – вещественная часть этого коэффициента a_0 характеризует сдвиг производственного результата при начальных значениях переменных, а мнимая часть коэффициента a_1 характеризует корректировку мнимой части равенства. Поскольку иных интерпретаций и влияний на результаты моделирования производства этот комплексный коэффициент не оказывает, для рассмотрения свойств модели им вначале можно пренебречь. Тогда без ущемления общности задачи модель логарифмической производственной функции комплексного аргумента может быть представлена так:

$$Q_t = (b_0 + ib_1)\ln(K_t + iL_t). \quad (5.6.2)$$

Эту функцию легко привести к форме, удобной для исследования, а именно – к системе двух равенств, действительных частей и мнимых частей. Эта система будет иметь вид:

$$\begin{cases} Q_t = b_0 \ln\sqrt{L_t^2 + K_t^2} - b_1 arctg\dfrac{L_t}{K_t}, \\ 2\pi k = b_1 \ln\sqrt{L_t^2 + K_t^2} + b_0 arctg\dfrac{L_t}{K_t}. \end{cases} \quad (5.6.3)$$

Второе равенство этой системы показывает взаимосвязь между производственными ресурсами, а первое равенство представляет собой аналог комплекснозначной модели на множестве вещественных чисел.

Как можно заметить из второго равенства данная модель предполагает наличие самых разных форм зависимости между производственными ресурсами. Эти формы определяются, в первую очередь значениями коэффициентов b_0 и b_1 . Так, если например, равен нулю коэффициент b_0, то зависимость между ресурсами должна описываться уравнением окружности. А если равен нулю коэффициент b_1, то зависимость между ресурсами описывается прямой линией. В том случае, когда эти коэффициенты не равны нулю, то зависимость между производственными ресурсами может принимать самые разные формы, в том числе, и так, как изображаются изокванты «неоклассических производственных функций». С этих позиций модель логарифмической производственной функции комплексного аргумента является универсальной. Аналитические свойства самой логарифмической функции комплексного аргумента были изучены во второй главе монографии, поэтому останавливаться более подробно на этих результатах здесь будет неуместно.

Поскольку и первое равенство системы, моделирующее зависимость между производственными ресурсами и производственным результатом, также представляет собой комбинацию уравнения окружности и уравнение арктангенса, то и оно в зависимости от значений и знаков коэффициентов может описывать довольно разнообразное сочетание прямой линии и окружности. Кривая в пространстве, которая в итоге получается как пересечение этих двух нелинейных поверхностей, имеет сложный характер и модель в состоянии описывать сложные траектории развития производственных систем.

Существенным достоинством этой модели является то очевидное обстоятельство, что (5.6.5) представляет собой систему двух уравнений с двумя неизвестными, поэтому коэффициенты модели могут быть найдены с помощью всего одного наблюдения за производственным процессом. То есть, практическое применение такой модели представляется простым.

Действительно, из (5.6.2) следует формула для нахождения комплексного коэффициента пропорциональности:

$$b_0 + ib_1 = \frac{Q_t}{\ln(K_t + iL_t)}. \qquad (5.6.4)$$

Вновь применим эту формулу к данным по экономике России за последние годы. В табл. 5.8 приведены только результаты вычисления комплексного коэффициента пропорциональности.

Таблица 5.8.

Комплексный коэффициент пропорциональности логарифмической ПФКА

Год	Коэффициенты	
	b_0	b_1
1995	0,470	-1,066
1996	1,239	-0,462
1997	1,445	-0,514
1998	1,578	-0,499
1999	2,831	-0,934
2000	3,961	-1,007
2001	4,346	-0,787
2002	4,726	-0,641
2003	5,139	-0,501
2004	6,392	-0,561
2005	7,483	-0,520
2006	8,766	-0,504
2007	9,871	-0,423
2008	11,468	-0,389
2009	10,252	-0,282

Результаты вычислений коэффициентов логарифмической модели показывают, что обе части комплексного коэффициента возрастают во времени. Причём, начиная с 2001 года почти линейно. Поэтому, например, логарифмическую функцию можно использовать для практики, описав изменение коэффициентов во времени с помощью трендов. Тогда модель, хорошо описывающая исходный ряд производства в России будет записан так:

$$Q_t = [(0{,}9281t + 2{,}9644) + i(0{,}0498t - 0{,}7611)]\ln(K_t + iL_t)$$

Очевидно, что более адекватной реальным производственным процессам будет логарифмическая модель со свободным членом (5.6.1):

$$Q_t = (a_0 + ia_1) + (b_0 + ib_1)\ln(K_t + iL_t).$$

Для проверки возможности использования этой модели на примере производства на макроуровне в России, вновь вычислим коэффициенты модели. Для этого воспользуемся разностями между левыми и правыми частями показателей, отличающихся друг от друга на единицу времени:

$$Q_t - Q_{t-1} = (b_0 + ib_1)\ln\frac{K_t + iL_t}{K_{t-1} + iL_{t-1}}. \qquad (5.6.5)$$

Откуда легко вычислить комплексный коэффициент пропорциональности для логарифмической ПФКА с комплексным свободным членом (5.6.1):

$$b_0 + ib_1 = \frac{Q_t - Q_{t-1}}{\ln\dfrac{K_t + iL_t}{K_{t-1} + iL_{t-1}}}. \qquad (5.6.6)$$

Подставляя в (5.6.1) эти коэффициенты, легко вычислить и значение свободного комплексного члена. Продемонстрируем саму возможность такой процедуры на том же примере России. Расчёты комплексного коэффициента пропорциональности приведены в табл. 5.9.

Таблица 5.9.
Комплексный коэффициент пропорциональности логарифмической ПФКА со свободным членом

Год	Коэффициенты	
	b_0	b_1
1995	0,444122	0,282994
1996	8,863934	10,30833
1997	3,191134	1,391758
1998	38,66129	-48,387
1999	11,36293	3,844329
2000	5,759372	1,769688
2001	7,008043	1,528732
2002	7,741272	1,471488
2003	37,98628	6,349217
2004	19,5134	2,739132
2005	27,95692	3,559588
2006	20,77293	2,194427
2007	32,95931	2,880673
2008	-11,3934	-0,99884
2009	0,444122	0,282994

Оба коэффициента, представленные в таблице, меняют во времени как свои значения, так и знаки. Причём это изменение носит мало предсказуемый характер с очень высокой дисперсией, поэтому следует однозначный вывод – для моделирования данного процесса логарифмическая ПФКА со свободным членом использоваться не может.

И вновь можно убедиться в том, что степенная ПФКА более интересна для исследователя и практикующего экономиста, нежели логарифмическая функция комплексного аргумента.

В завершение параграфа следует отметить, что логарифмическая функция – это функция периодическая, а, следовательно, при её практическом использовании следует это иметь всегда в виду.

5.7. Обобщение главы

Теория функций комплексного переменного не рассматривает модели комплексного аргумента – когда действительная переменная зависит от комплексной. Возможно, что это и сделано где-то в специальных главах ТФКП, но они не доступны для анализа. Поскольку комплексный аргумент сам по себе представляет двухфакторную зависимость, то аналогия между двухфакторными производственными функциями действительных переменных и моделями комплексного аргумента напрашиваются сами собой.

В этой главе было показано – как модели комплексного аргумента могут выступать в виде моделей производственных функций, как они могут моделировать разнообразные производственные процессы. Как продемонстрировали примеры, приведённые в данной главе, в некоторых случаях отдельные модели вполне прилично описывают реальные производственные процессы на макроуровнях, другие модели к описанию этих процессов не пригодны. Но ведь разнообразие производственных процессов вовсе не сводится к тем примерам с реальными данными, которые приведены в этой главе. Их значительно больше. Реальные производственные процессы имеют столь разнообразный характер взаимосвязей, что «втискивание» их в «прокрустово ложе» неоклассических функций, которое повсеместно осуществляют экономисты, приводит к очевидным результатам – с помощью этих моделей искажается отображение реальности, и зачастую, весьма существенно.

Поэтому задача расширения инструментария теории производственных функций является весьма актуальной. И здесь, как нельзя кстати, появляется аппарат ПФКА. Исследование, результаты которого приведены в пятой главе, свидетельствует о том, что каждая из рассмотренных моделей комплексного аргумента будет наилучшей для описания какого-то своего, оригинального производственного процесса. Вычисление траекторий производственного процесса для каждой из рассмотренных производственных функций комплексного аргумента на условных примерах показывает, что они генерируют самые разнообразные формы – выпуклые, вогнутые, возрастающие, убывающие, с асимптотой и без неё… Каждый читатель может получить эти траектории самостоятельно, подставляя в формулы моделей собственные ряды и задавая при этом разные значения коэффициентов. Приводить поэтому в этой главе всё это многообразие не было смысла, главное было – показать саму принципиальную возможность использования в экономике моделей комплексного аргумента. Их использование в моделировании производственных процессов обогащает инструментальную базу экономиста.

Принципиально важным новым результатом, который в этой главе выявил новые стороны математического аппарата теории функций комплексных переменных применительно к решению экономических задач, оказалась возможность построения линейной двухфакторной модели в условиях мультиколлинеарности. Как было показано в этой главе, методы действительных переменных не позволяют удовлетворительно решить такую задачу, а ТФКП даёт весьма обнадёживающие результаты. Двухфакторная линейная модель действительных переменных представляет собой уравнение плоскости в трёхмерном пространстве. Поэтому в ситуации, когда точки, лежащие на этой плоскости, находятся на прямой линии (мультиколлинеарность), МНК демонстрирует свою беспомощность в нахождении уравнения этой плоскости. Линейная функция комплексного аргумента описывает именно эту прямую линию в трёхмерном пространстве. Поэтому МНК, применённый к этой функции, даёт устойчивые оценки двухфакторной модели в условиях мультиколлинеарности.

Поскольку нелинейные функции комплексного аргумента зачастую означают наличие линейной зависимости между ресурсами, то проблема влияния мультиколлинеарности на результаты построения двухфакторных нелинейных моделей может проявиться и в этом случае. Нелинейные модели комплексного аргумента в этом случае будут давать устойчивые значения коэффициентов модели, поскольку они только в этом случае и имеют право на существование.

И вообще, следует указать на важную особенность, отличающую модели комплексного аргумента от двухфакторных моделей действительных переменных. Модели действительных переменных описывают плоскость (в линейном случае) или нелинейные поверхности в трёхмерном пространстве, а модели комплексного аргумента описывают прямую линию, лежащую на плоскости (в линейном случае) или кривую, лежащую на поверхностях, перпендикулярных плоскости производственных ресурсов.

Это обстоятельство свидетельствует о том, что ПФКА имеют довольно узкий ареал применения по сравнению с моделями действительных переменных, но они описывают именно те процессы, описание которых моделями действительных переменных осуществляется плохо.

Вся мощь теории функций комплексной переменной, существенные преимущества моделей, использующих элементы ТФКП, проявляется при построении моделей зависимости одной комплексной переменной от другой. В этом смысле модели комплексного аргумента представляются лишь «введением» в новый аппарат теории производственных функций, а именно – в аппарат производственных функций комплексных переменных.