Глава шестая. Производственные функции комплексных переменных

6.1. Общие положения теории производственных функций комплексных переменных

Функции комплексного аргумента представляют собой некоторое «усечение» свойств функций комплексных переменных – в них описывалась зависимость вещественной переменной от комплексной, которая выступала как комплексный аргумент функции. Уже только такая постановка задачи применительно к одному из разделов экономики – теории производственных функций, - привело к получению новых научных результатов. Естественно, следует ожидать ещё более многообразных и впечатляющих результатов, если использовать в экономике функции комплексных переменных - зависимость одной комплексной переменной от другой. Поскольку комплексная переменная по своей сути, представляет собой некоторую двухфакторную модель, то тем самым рассматривается зависимость одной пары экономических показателей от другой пары. Естественно предположить применительно к экономическим задачам, что одна пара – комплексный аргумент, - может представлять собой производственные ресурсы, а другая пара – комплексный результат, - может представлять собой показатели производства. Такая зависимость, связывающая производственные ресурсы с производственным результатом, будет являться производственной функцией.

Формально производственные функции представляют собой некоторую математическую зависимость производственного результата от производственных ресурсов при целом ряде исходных допущений. Из множества производственных ресурсов для построения производственных функций используют только два ресурса – производственный капитал K в самых разных его формах, и труд L. Эти два ресурса являются в определённой степени взаимозаменяемыми, поэтому используют в основном именно их.

В предыдущей главе мы использовали именно эти два ресурса как одну комплексную переменную. Если внимательно изучить материалы этой главы, можно убедиться в том, что особой разницы нет - какую переменную отнести к действительной, а какую к мнимой части комплексной переменной комплексного производственного ресурса (аргумента), чаще всего свойства моделей производственных функций комплексного аргумента при этом менялись «симметрично», не меняя сути моделей.

В моделях производственных функций комплексных переменных такой порядок отнесения показателей к действительной и к мнимой частям, как комплексного аргумента, так и комплексного результата, имеет выраженный экономический смысл.

Поэтому будем строго придерживаться такого правила формирования комплексного производственного аргумента – к действительной части будем относить капитал, а к мнимой – труд. Тогда комплексный производственный ресурс для таких функций будет записываться так:

$$K_t + iL_t. \qquad (6.1.1)$$

Поскольку все примеры, которые будут рассмотрены в этой главе, касаются исключительно социально-экономической динамики, то у всех переменных имеется индекс упорядочивания *t*. Если возникает задача построить некоторые производственные функции не на временном множестве, а на каком-то другом, индекс легко заменим на другой.

Результат производства может демонстрироваться самыми различными технико-экономическими показателями. В теории производственных функций используется в основном один показатель – объём произведённой и реализованной продукции Q_t. Очевидно, что в таком случае и высказываются все предположения относительно производственных функций: о том, что спрос ненасыщенный; о том, что цена неизменна и т.п.

Но в реальной экономической практике о производственных результатах никто не судит только по объёму производства (выпуску), важно понимать успешность экономической деятельности, а об этом свидетельствуют различные показатели экономической эффективности, в первую очередь такие, как валовая прибыль G_t, издержки производства C_t и базирующийся на них показатель рентабельности производства R_t.

Поскольку валовая прибыль, издержки производства и валовой объём производства связаны друг с другом элементарным соотношением:

$$Q_t = G_t + C_t,$$

то, вычисляя любую пару из этой «троицы», легко рассчитать третий показатель.

С их помощью легко вычисляется и ещё одни показатель экономической эффективности – рентабельность:

$$R_t = \frac{G_t}{C_t} = \frac{Q_t - C_t}{C_t}.$$

А для того, чтобы сформировать комплексную переменную производственного результата, нам как раз и необходима пара переменных, отражающая разные стороны одного процесса и имеющие одинаковую размерность и масштаб. Поскольку различное сочетание производственных ресурсов приводит к различному сочетанию издержек производства и валовой прибыли, и, как следствие этого, к разным объёмам валового производства и рентабельностям, то частями комплексной переменной производственного результата должны выступать именно переменные валовой прибыли G_t и издержек производства C_t.

Комплексная переменная производственного результата, в которую включаются валовая прибыль G_t и издержки производства C_t, предлагается представлять в таком виде:

$$G_t + iC_t. \qquad (6.1.2)$$

И здесь отнесение валовой прибыли в действительную часть, а издержек в мнимую часть комплексной переменной производственных ресурсов сделано не случайно. Этот порядок определяется тем, как мы сформировали комплексную переменную производственных ресурсов (6.1.1), и смысл такого порядка будет ясен при изучении соответствующих производственных функций. Кроме того, в первой главе монографии было введено правило – показатель, отражающий активную часть социально-экономического процесса будем относить к действительной части, а пассивную часть – к мнимой. Сравнивая друг с другом валовую прибыль и издержки производства, пожалуй, можно говорить, что валовой прибыли экономисты уделяют повышенное внимание по сравнению с затратами на производство, поэтому отнесение валовой прибыль к действительной части комплексной переменной с этих позиций представляется соответствующим введённому правилу.

На рис. 6.1 даны две структурные схемы, с помощью которых можно наглядно получить представление о том, в чём, собственно говоря, принципиальное различие между производственными функциями действительных переменных и производственными функциями комплексных переменных.

Производственные функции действительных переменных моделируют влияние производственных ресурсов на валовой объём, а производственные функции комплексных переменных – сначала моделируют влияние производственных ресурсов на валовую прибыль и на издержки производства, а уж затем, на основе этой информации – влияние на валовой объём. Соотношение валовой прибыли и издержек характеризует рентабельность.

Теперь становится очевидным, что производственные функции комплексных переменных более подробно описывают производственный процесс, нежели производственные функции действительных переменных, поэтому от комплекснозначных моделей следует ожидать большей точности и достоверности описания производственных процессов.

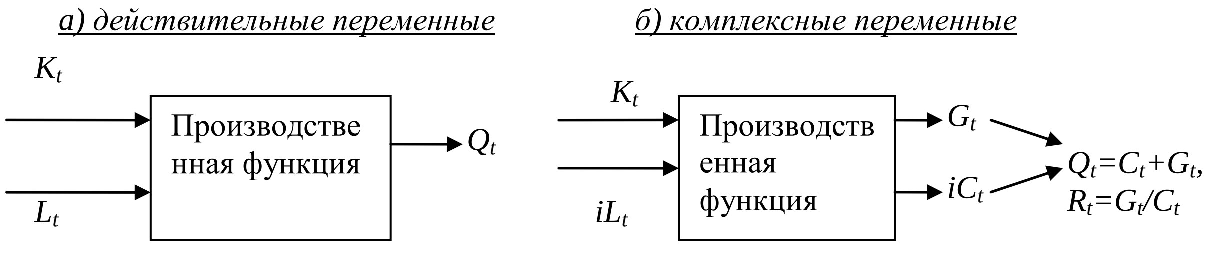

Рис. 6.1. Структурная схема производственных функций действительных переменных *а)* и комплексных переменных *б)*

Схема *б)* рис. 6.1 позволяет понять, что в общем виде производственная функция комплексных переменных может быть представлена так:

$$G_t + iC_t = F(K_t + iL_t)\,. \qquad (6.1.3)$$

Функций, с помощью которых можно связать зависимостью (6.1.3) две комплексные переменные $G_t + iC_t$ и $K_t + iL_t$, много. Мы будем использовать только те из них, которые были рассмотрены в третьей главе монографии – за исключением функции Жуковского и тригонометрических функций, поскольку представить себе производственный процесс, описываемый такими моделями, очень сложно.

Так как производственные процессы отличаются друг от друга:

- уровнем иерархии (предприятие, группа предприятий, региональное производство, национальное производство, мировое производство и т.п.),

- спецификой производства (сельскохозяйственное производство, машиностроение, лёгкая промышленность, нефтедобыча, производство электронергии и т.п.),

- национально-географическими особенностями (трудоизбыточное население или трудодефицитное; наличие источников сырья и транспортных узлов; тёплый, жаркий или холодный климат и т.п.),

то некоторой единой стандартной производственной функции комплексных переменных, которая наилучшим образом описывает все эти многообразные производственные процессы, меняя лишь в зависимости от ситуации значения своих коэффициентов, не существует. В каждом случае экономист должен выбрать из имеющегося множества возможных функций наилучшую. Поэтому в данной главе и будут изучены производственный функции комплексных переменных (ПФКП) самых разных видов из числа элементарных функций, конформное отображение которых было рассмотрено в третьей главе монографии.

Из (6.1.3) следует, что с помощью комплекснозначных функций моделируется сразу два экономических показателя – валовая прибыль и издержки производства, но как уже писалось, это модель трёх производственных результатов. Ведь сумма валовой прибыли и издержек производства представляет собой не что иное, как валовой выпуск:

$$G_t + C_t = Q_t\,. \qquad (6.1.4)$$

Функцию (6.1.3) можно представить и иначе, воспользовавшись представлением комплексного ресурса в экспоненциальной форме:

$$G_t + iC_t = R_t e^{i\theta_t}\,. \qquad (6.1.5)$$

Откуда легко получить:

$$\begin{cases} G_t = R_t \cos\theta_t, \\ C_t = R_t \sin\theta_t, \\ Q_t = R_t(\cos\theta_t + \sin\theta_t). \end{cases} \qquad (6.1.6)$$

Здесь полярный угол комплексной переменной находится так:

$$\theta_t = arctg\frac{C_t}{G_t} = arctg\frac{1}{R_t}.$$

То есть – он отражает рентабельность производства – чем выше значение полярного угла, тем менее эффективно работает производство. В том случае, когда предприятие работает бесприбыльно, но не убыточно, то есть – с нулевой рентабельностью, полярный угол устремляется в плюс бесконечность.

Чаще всего в современном инструментальном багаже экономико-математического моделирования ни одна из форм моделей (6.1.6) не используется. Тем более не используется в целом и вся система зависимости пары производственного результата от пары производственных ресурсов. Следует обратить внимание и на то, что нахождение оценок коэффициентов моделей (6.1.6), например, с помощью метода наименьших квадратов (МНК) чаще всего – чрезвычайно сложная задача. Для этого необходимо прибегать к численным методам решения систем нелинейных уравнений. Для современного учёного, вооружённого вычислительной техникой и программными продуктами, это не представляет каких-либо затруднений, но для экономиста, владеющего математикой в объёме университетского курса, эта задача является непреодолимой. Коэффициенты же комплекснозначных функций находятся весьма просто. О том, как использовать МНК для этих целей, было показано в четвёртой главе.

В производственных функциях комплексных переменных появляются новые экономические показатели, которые не встречаются в теории производственных функций, базирующейся на действительных переменных. Это модули комплексных переменных и их полярные углы. Если с полярными углами всё более-менее ясно, они характеризуют для ресурсов фондовооружённость труда (тангенс полярного угла, представляющий отношение труда к капиталу, очевидно равен фондовооружённости труда), а для производственного результата – рентабельность по себестоимости, то с характеристикой модулей этих комплексных переменных интерпретация затруднена. Действительно, модули этих переменных равны: $R_{GC} = \sqrt{G^2 + C^2}, R_{KL} = \sqrt{K^2 + L^2}$. Какой экономический смысл они имеют? Они отражают масштаб производства и масштаб ресурсов соответственно.

Ещё одно уникальное свойство, помимо вышеизложенных, присуще производственным функциям комплексных переменных. Из зависимости (6.1.3) легко следует и обратная ей:

$$K_t + iL_t = f(G_t + iC_t). \qquad (6.1.7)$$

То есть, если некоторый производственный процесс описать с помощью производственной функции комплексных переменных, можно построить обратную функцию (6.1.7), с помощью которой можно решать задачу, даже не возникавшую в современной теории производственных функций – как достичь желаемого уровня валовой прибыли, издержек производства, или объёма производства? Какие трудовые и капитальные ресурсы необходимо привлечь для получения заданного уровня рентабельности производства? Функция (6.1.7) позволяет получить ответы на эти вопросы довольно просто, функции действительных переменных для ответа на эти вопросы должны быть существенно усложнены и сведены в некоторую систему уравнений.

6.2. Линейная производственная функция комплексных переменных

Самая простая – линейная, - функция комплексных переменных будет выглядеть так:

$$G_t + iC_t = \left(b_0 + ib_1\right)\left(K_t + iL_t\right). \qquad (6.2.1)$$

Поскольку эта простейшая функция комплексной переменной имеет только один комплексный коэффициент, а именно - коэффициент пропорциональности (b_0+ib_1), то именно он и является предметом исследования этой функции. Из равенства (6.2.1) легко получить:

$$b_0 + ib_1 = \frac{G_t + iC_t}{K_t + iL_t}.$$

Теперь, умножая числитель и знаменатель правой части равенства на сопряжённый знаменателю сомножитель, получим:

$$b_0 + ib_1 = \frac{G_t + iC_t}{K_t + iL_t} \times \frac{K_t - iL_t}{K_t - iL_t} = \frac{G_tK_t + C_tL_t + i\left(C_tK_t - G_tL_t\right)}{L_t^2 + K_t^2}.$$

Откуда после группировки вещественной и мнимой частей легко вывести каждый из коэффициентов b_0 и b_1 этой формы производственной функции комплексных переменных:

$$b_0 = \frac{G_tK_t + C_tL_t}{L_t^2 + K_t^2}, \qquad (6.2.2)$$

$$b_1 = \frac{C_tK_t - G_tL_t}{L_t^2 + K_t^2}. \qquad (6.2.3)$$

В отличие от коэффициентов производственной функции комплексного аргумента дать экономическую интерпретацию каждого из коэффициентов функции комплексных переменных (6.2.1) непросто. Знаменатель у этих коэффициентов одинаков – он отражает масштаб ресурсов, но числители (6.2.2) и (6.2.3) существенно отличаются друг от друга и не имеют чётких экономических параллелей.

Коэффициент b_0 будет линейно расти с ростом как объёма производства ($G+C$), так и с ростом валовой прибыли и издержек производства при постоянстве затрат ресурсов. Если и ресурсы, и результаты растут прямо пропорционально друг другу, то этот коэффициент остаётся постоянным. Во всех остальных случаях его динамика носит более сложный характер.

Что можно сказать относительно второго коэффициента b_1, так это то, что он будет увеличиваться с ростом себестоимости и в некоторой степени с увеличением количества занятых в производстве. Последняя зависимость носит нелинейный характер. Рост валовой прибыли однозначно будет отражаться уменьшением значений этого коэффициента.

Если за точку отсчёта принять первое наблюдение, а все остальные значения привести к относительным значениям, то коэффициент b_0 при первом наблюдении будет равен единице, а коэффициент b_1 – равен нулю. Впрочем, за точку отсчёта можно взять не только начальное, но и любое другое значение, например, последнее. Тогда именно для этого года наблюдения за производственным процессом коэффициент b_0 будет равен единице, а коэффициент b_1 будет равен нулю. Поскольку в реальной экономике ситуации моделирования линейной зависимости некоторого комплексного показателя от комплексного фактора при нулевом значении свободного члена встречаются крайне редко, к такому виду модель можно привести, осуществив предварительное центрирование исходных переменных относительно их средних арифметических.

Если раскрыть скобки равенства (6.2.1) и сгруппировать вещественную и мнимую части полученного равенства, то:

$$G_t + iC_t = (b_0 + ib_1)(K_t + iL_t) \leftrightarrow G_t + iC_t = b_0K_t - b_1L_t + i(b_0L_t + b_1K_t)$$

Откуда для вещественной части равенства:

$$G_t = b_0K_t - b_1L_t, \tag{6.2.4}$$

а для мнимой части:

$$C_t = b_0L_t + b_1K_t. \tag{6.2.5}$$

Полученные выражения имеют простой экономический смысл и определяют в каких случаях моделирования производства может использоваться линейная производственная функция комплексных переменных (если считать, что коэффициенты модели являются положительными). (6.2.4) однозначно указывает на то, что с ростом капитального ресурса валовая прибыль увеличивается, а с ростом трудовых ресурсов – уменьшается. При этом, как следует из (6.2.5), издержки производства увеличиваются. Это свидетельствует о том, что моделируется процесс с постоянной отдачей по прибыли капитального ресурса и убывающей отдачей по прибыли трудовых ресурсов.

Впрочем, если коэффициент b_1 будет отрицательным, то рост трудовых ресурсов ведёт к росту и прибыли, и издержек, а рост капитальных ресурсов ведёт в этом случае к моделированию ситуации, когда валовая прибыль растёт, а издержки уменьшаются. То есть, имеет место постоянная отдача трудового ресурса и, в зависимости от соотношения коэффициентов b_0 и b_1 – возрастающая, постоянная или убывающая отдача капитального ресурса.

Это означает, что линейная ПФКП обладает некоторыми аналитическими свойствами, с помощью которых можно изучать суть производственных процессов разных уровней иерархии. Конечно, делать это можно только в том случае, когда линейная ПФКП хорошо описывает моделируемое производство.

Поскольку все переменные приведены к безразмерным величинам делением на свои первые значения (G_t/G_1, C_t/C_1, K_t/K_1, L_t/L_1), возникает несколько важных моментов, на которые следует обратить внимание. Полученные значения позволяют определить некий аналог валовой выручки:

$$G_t + C_t = \left(b_0 K_t - b_1 L_t\right) + \left(b_0 L_t + b_1 K_t\right) = (b_0 + b_1)K_t + (b_0 - b_1)L_t. \qquad (6.2.6)$$

Мы называем полученную сумму не валовой выручкой, а её аналогом вот почему. Все исходные переменные отмасштабированы. Это значит, что валовая прибыль G_t поделена на начальное значение прибыли в первый год наблюдения G_1, и издержки производства C_t, поделены на первый год наблюдения C_1. Их сумма не равна делению валовой выручки в год t к значению валовой выручки в первый год:

$$\frac{G_t}{G_1} + \frac{C_t}{C_1} = \frac{G_t C_1 + C_t G_1}{G_1 C_1} \neq \frac{G_t + C_t}{G_1 + C_1} = \frac{Q_t}{Q_1}.$$

Поэтому (6.2.6) выступает именно аналогом выручки. Для того чтобы (6.2.6) имело искомый смысл, необходимо валовую прибыль и себестоимость привести к безразмерным величинам относительно валовой выручки:

$$\frac{G_t}{Q_1}, \frac{C_t}{Q_1}. \qquad (6.2.7)$$

В таком случае (6.2.6) имеет смысл валовой выручки в относительных значениях.

Точно также некоторым аналогом рентабельности выступает в модели и отношение:

$$\frac{G_t}{C_t} = \frac{b_0 K_t - b_1 L_t}{b_0 L_t + b_1 K_t}. \qquad (6.2.8)$$

Опять-таки, вычисляется не сама рентабельность, а её некоторый аналог, поскольку с учётом приведения к безразмерным величинам:

$$\frac{G_t / G_0}{C_t / C_0} = \frac{R_t}{R_0}$$

Но если переменные производственного результата приведены к безразмерным величинам приведением к начальному значению валовой выручки, то (6.2.8) будет характеризовать рентабельность по себестоимости.

Поэтому для практических целей необходимо все исходные переменные этой и других моделей производственных функций комплексных переменных приводить к безразмерным величинам, делением их значений на валовой выпуск в начальный момент времени Q_0:

$$\frac{G_t}{Q_1}, \frac{C_t}{Q_1}, \frac{K_t}{Q_1}, \frac{L_t}{Q_1}.$$

Формулы (6.2.2) и (6.2.3) дают возможность для каждого момента наблюдения найти соответствующие коэффициенты линейной производственной функции комплексных переменных (6.2.1). Для этого следует только подставить в них имеющиеся статистические данные. Покажем как эти коэффициенты могут быть посчитаны на примере реально действующего предприятия.

Руководство Инзенского Диатомового комбината (Ульяновская область России) любезно предоставило нам необходимые статистические данные по своему предприятию. Их первичная обработка и систематизация была проведена И.Е.Никифоровой. Абсолютные значения производства на этом комбинате приведены в табл. 6.1.

Беглый анализ предоставленных данных показывает их большую дисперсию относительно тенденций, а иного ожидать от реального производства и не возможно – на результаты производственной деятельности оказывает влияние множество различных факторов, большинство из которых и выявить не всегда возможно.

Табл. 6.1.

Производственная деятельность Диатомового комбината по месяцам

Месяц	Прибыль, тыс .руб.	Издержки, тыс.руб.	ФОТ, тыс.руб.	Трудозатраты, чел-час	Численность, чел.	ОПФ, тыс.руб.
февраль	59	2604	213,5	52100	354	4263
март	72	3178	231,3	51347	357	4263
апрель	26	1146	289,1	57095	364	4263
май	47	2059	246,1	62898	401	4263
июнь	21	897	266,6	62742	400	4263
июль	73	3202	294,1	57005	404	5684
август	47	2045	396,4	61662	437	5684
сентябрь	49	2152	310,2	64484	457	5684
октябрь	41	1804	402,4	63071	454	5684
ноябрь	60	2615	511,9	64599	465	5684
декабрь	107	4736	439,4	63905	460	5684

Обращает на себя внимание и тот факт, что изменение капитального ресурса происходит ступенчато – в июле были освоены новые производственные мощности, отдача от которых наступает, судя по таблице, постепенно и к декабрю проявилась в максимальной степени.

Все эти обстоятельства убеждают нас в том, что ни одна модель не сможет описать производственный процесс с ошибкой, меньше 10 – 20%. Но нас интересует, во-первых, сама возможность построения комплекснозначных производственных функций, а во-вторых, моделирование общих взаимосвязей между ресурсами и производственным результатом, пусть и с некоторой погрешностью.

Используя значения выручки, издержек производства, фонда оплаты труда и величины основных производственных фондов, построим производственную функцию типа (6.2.1). Для этого приведём вначале все значения к безразмерным относительным величинам. За основу возьмём данные за февраль года по каждому из экономических показателей. Мы не будем на этом этапе приводить переменные к единому масштабу их делением на выпуск за первый месяц, а просто будем рассматривать безразмерные переменные, значения которых за февраль месяц взяты за единицу.

Поскольку труд характеризуется тремя показателями – фондом оплаты труда, трудозатратами и численностью занятых, необходимо выбрать один из них, наиболее точно отражающий затраты ресурса. Для того, чтобы привести значения трудового ресурса к одинаковой размерности и одинаковому масштабу с капиталом будем использовать только показатель фонда оплаты труда – он характеризует затраты трудового ресурса в денежных единицах.

Табл. 6.2.

Безразмерные центрированные данные по Диатомовому комбинату

Месяц	Прибыль	Издержки	ФОТ	ОПФ
февраль	0,072419	0,077014	-0,53332	-0,18182
март	0,292758	0,297444	-0,44995	-0,18182
апрель	-0,4869	-0,48289	-0,17922	-0,18182
май	-0,13097	-0,13228	-0,38063	-0,18182
июнь	-0,57165	-0,57852	-0,28461	-0,18182
июль	0,309707	0,306661	-0,1558	0,151515
август	-0,13097	-0,13766	0,323355	0,151515
сентябрь	-0,09707	-0,09656	-0,08039	0,151515
октябрь	-0,23267	-0,23021	0,351458	0,151515
ноябрь	0,089368	0,081239	0,864339	0,151515
декабрь	0,885978	0,895755	0,52476	0,151515

Поскольку необходимо центрировать исходные переменные для того, чтобы не использовать свободный коэффициент, а непосредственно использовать модель (6.2.1), в табл. 6.2 приведены безразмерные центрированные относительно средних арифметических переменные. Так как формулы (6.2.2) и (6.2.3) предоставляют возможность находить соответствующие коэффициенты для каждого наблюдения, воспользуемся ими и получим в результате два ряда коэффициентов, динамика которых представлена в табл. 6.3.

Видно, что коэффициенты функции не остаются постоянными, что и следовало ожидать при таких исходных данных. Но для того, чтобы ответить на вопрос: является ли эта модель приемлемой для целей исследования производственных процессов на комбинате, необходимо посмотреть – имеется ли тенденция в изменениях коэффициентов. Если тенденция изменения хотя бы одного из коэффициентов имеется, это свидетельствует о том, что модель смещена и плохо описывает производственную взаимосвязь. В таком случае необходимо либо менять модель, либо её существенно модифицировать.

Табл. 6.3.
Коэффициенты производственной функции (6.2.1)
по данным производства Диатомового комбината

Месяц	Коэффициент b_0	Коэффициент b_1
февраль	-0,17084	0,077546
март	-0,79429	0,329688
апрель	2,686068	0,008219
май	0,416793	-0,145
июнь	2,354795	-0,50422
июль	-0,01806	2,005393
август	-0,50469	0,168554
сентябрь	-0,23606	-0,76258
октябрь	-0,79301	0,320131
ноябрь	0,108772	-0,08433
декабрь	2,025593	-1,10349

Изменяются коэффициенты модели хаотически, разброс их значений довольно высок, никаких тенденций изменения коэффициентов не выявляется. Это означает, что модель линейной производственной функции комплексного аргумента может быть использована для описания рассматриваемого производственного процесса, но точность аппроксимации реальных данных будет очень маленькой.

Поскольку для более корректной экономической интерпретации вычисляемых экономических переменных следует отнести валовую прибыль и издержки производства к безразмерным величинам путём деления их значений на валовую выручку, как об этом было сказано выше (6.2.7), сделаем это, и сравним полученный результат с предыдущим.

Приведённые к валовой выручке безразмерные величины переменных, вновь центрированные относительно их средних арифметических, сведены в табл. 6.4.

Табл. 6.4.
Безразмерные данные по Диатомовому комбинату,
когда прибыль и издержки приведены к валовой выручке

Месяц	Прибыль	Издержки	ФОТ	ОПФ
февраль	0,001604	0,075308	-0,53332	-0,18182
март	0,006486	0,290854	-0,44995	-0,18182
апрель	-0,01079	-0,47219	-0,17922	-0,18182
май	-0,0029	-0,12935	-0,38063	-0,18182
июнь	-0,01267	-0,5657	-0,28461	-0,18182
июль	0,006862	0,299867	-0,1558	0,151515
август	-0,0029	-0,13461	0,323355	0,151515
сентябрь	-0,00215	-0,09443	-0,08039	0,151515
октябрь	-0,00515	-0,2251	0,351458	0,151515
ноябрь	0,00198	0,079439	0,864339	0,151515
декабрь	0,019629	0,875909	0,52476	0,151515

С изменением исходных переменных изменились и значения коэффициентов модели (6.2.1). Для того чтобы более наглядно увидеть это изменение, в табл. 6.5 приведены два ряда значений комплексного коэффициента - как значения коэффициентов из табл. 6.3, так и значения коэффициентов, пересчитанные по данным табл. 6.4.

Табл. 6.5.
Коэффициенты производственной функции (6.2.1)
по данным производства Диатомового комбината

Месяц	По данным табл. 6.2		По данным табл. 6.4	
	Коэффициент b_0	Коэффициент b_1	Коэффициент b_0	Коэффициент b_1
февраль	-0,17084	0,077546	-0,12742	-0,04043
март	-0,79429	0,329688	-0,56069	-0,21215
апрель	2,686068	0,008219	1,328494	1,287556
май	0,416793	-0,145	0,279659	0,125965
июнь	2,354795	-0,50422	1,431754	0,87016
июль	-0,01806	2,005393	-0,96716	0,984596
август	-0,50469	0,168554	-0,34478	-0,15258
сентябрь	-0,23606	-0,76258	0,246949	-0,49218
октябрь	-0,79301	0,320131	-0,54544	-0,22047
ноябрь	0,108772	-0,08433	0,089557	0,013408
декабрь	2,025593	-1,10349	1,550685	0,410326

Изменение масштаба переменных привело к изменению значений коэффициентов модели (6.2.1), но не к изменению их тенденций, поскольку и в первом и во втором случаях используется линейная модель, но с другим правилом масштабирования. Новые коэффициенты также хаотически изменяются, как и прежде, практически повторяя динамику изменения коэффициентов, вычисленных по данным табл. 6.2.

То, что для данного производства линейная ПФКП использоваться не должна, подтверждается и вычислением комплексного коэффициента парной корреляции (4.6.17), который для используемых данных Диатомового комбината равен:

$$r_{xy} = 0,301931 + i0,055403.$$

Поскольку действительная часть комплексного коэффициента парной корреляции мала, то можно говорить о том, что линейная комплекснозначная зависимость использоваться для моделирования производства на Диатомовом комбинате не может. Близость к нулю мнимой части коэффициента свидетельствует о том, что некоторая нелинейная зависимость между двумя комплексными переменными всё же имеется, но о её характере можно судить только после проведения дополнительных исследований.

Посмотрим теперь, может ли эта функция использоваться на примере экономики России? В табл. 6.6 приведены данные по стоимости основных фондов в России, величине экономически активного населения и конечному продукту, который делится на конечное потребление и валовое накопление. Конечное потребление выступает на макроуровне некоторым аналогом валовой прибыли, поэтому будем использовать этот показатель как действительную часть комплексного производственного результата.

Прежде, чем строить модель, вычислим комплексный коэффициент парной корреляции (4.6.17) между двумя комплексными переменными - комплексным ресурсом (основные фонды и активное население) и комплексным результатом (конечное потребление и валовое накопление):

$$r_{xy} = 0,991963 - i0,005319.$$

Поскольку действительная часть комплексного коэффициента парной корреляции близка к единице, а мнимая – близка к нулю, то следует вывод о том, что линейная комплекснозначная функция будет вполне приемлемой для моделирования рассматриваемой зависимости.

Найдём коэффициенты линейной модели (6.2.1) по данным этой таблицы так, как это делали прежде – то есть, изменяющиеся во времени комплексные коэффициенты модели (6.2.4) и (6.2.5). Результаты вычислений сведены в табл. 6.7.

Табл. 6.6.

Общие показатели развития экономики России

Год	Основные фонды, K_t		Численность экономически активного населения, L_t		Конечное потребление, G_t		Валовое накопление, C_t	
	Абсолютные значения, млн.руб.	Относительные значения	Абсолютные значения, тыс. чел.	Относительные значения	Абсолютные значения, млн. руб.	Относительные значения	Абсолютные значения, млн. руб.	Относительные значения
1995	5182040	1,000000	70740	1,000000	1095820,9	1,000000	391588,4	1,000000
1996	13072378	2,522632	69660	0,984733	1544658,8	1,409591	528694,9	1,350129
1997	13286272	2,563908	68079	0,962383	1891846,7	1,72642	564244,2	1,440911
1998	14125670	2,72589	67339	0,951923	2100663,3	1,916977	443978,2	1,133788
1999	14246427	2,749193	72176	1,020300	3303947,9	3,015044	729214,5	1,862196
2000	16605251	3,204385	72332	1,022505	4476851,0	4,085386	1365734,0	3,487677
2001	20241428	3,906073	71411	1,009485	5886861,0	5,372101	1963110,0	5,013198
2002	24430544	4,714465	72421	1,023763	7443199,0	6,79235	2169314,0	5,539781
2003	30329106	5,852735	72835	1,029615	9024756,0	8,235612	2755048,0	7,035571

2004	32541444	6,279659	72909	1,030662	11401444,0	10,40448	3558952,0	9,088502
2005	38366273	7,403701	73811	1,043412	14318964,0	13,06688	4338731,0	11,07983
2006	43822840	8,456677	74156	1,048290	17629743,0	16,08816	5748727,0	14,68053
2007	54251541	10,46915	75060	1,061069	21785787,0	19,88079	8031682,0	20,51052
2008	64552706	12,45701	75892	1,072830	27237356,0	24,85566	10642560,0	27,17792

Из таблицы видно, что коэффициенты меняются относительно некоторых средних. Исключение составляют коэффициенты, вычисленные для 2001 года. Они существенно отличаются от всего ряда.

Табл. 6.7.
Коэффициенты производственной функции (6.2.1)
по данным табл. 6.6

Год	Комплексный коэффициент пропорциональности	
	Коэффициент b_0	Коэффициент b_1
1995	1,163592	-1,43889
1996	2,230591	-2,70000
1997	2,270221	-2,50794
1998	2,87264	-2,64283
1999	2,15053	-1,90593
2000	1,224434	-1,60172
2001	140,9579	34,74048
2002	1,484029	-1,94932
2003	1,386099	-1,54839
2004	2,007539	-2,17582
2005	1,940288	-2,23109
2006	2,285952	-2,37343
2007	2,476524	-2,21761
2008	2,683951	-2,27884
2009	1,163592	-1,43889

Вызвано это не какими-то особенностями этого года для России, а тем, что для вычисления комплексного коэффициента пропорциональности все исходными данные были центрированы относительно средних арифметических. Средние арифметические исходных данных табл. 6.6 приходятся как раз на 2001 год, и отклонения от средней арифметической именно для этого года близки к нулю, а это значит, что близки к нулю центрированные значения переменных именно для 2001 года. А поскольку в (6.2.4) и в (6.2.5) наличествует операция деления, то при знаменателе, близком к нулю, частное приобретает высокие значения, что и наблюдается в таблице.

Если перед исследователем стоит задача построить комплекснозначную модель не для каждого наблюдения, а для всего ряда, то необходимо найти коэффициенты модели с помощью МНК. В четвёртой главе монографии были выполнены соответствующие построения, воспользовавшись которыми, получим такую комплекснозначную модель зависимости конечного продукта России от трудовых ресурсов и основных фондов:

$$G_t + iC_t = (-1,4095 - i5,3207) + (2,2105 + i1,9415)(K_t + iL_t)\,. \qquad (6.2.9)$$

Эта модель хорошо описывает рассматриваемый процесс и может быть использована, например, для целей многовариантного прогнозирования развития экономики России. Для этого необходимо в дополнение к полученным значениям коэффициентов определить доверительные значения изменения полученных точечных значений. Правда, рассматриваемый процесс ни в коем случае нельзя отнести к стационарному и методы математической статистики в данном случае не следует использовать формально в полном объёме. Впрочем, в данной монографии не рассматриваются вопросы моделирования с помощью комплекснозначных моделей необратимых процессов социально-экономической динамики. Цель монографии – разработка основ применения методов и моделей теории функций комплексного переменного применительно к экономическим задачам.

6.3. Модель степенной производственной функции комплексных переменных с действительными коэффициентами

В экономике линейные зависимости, как известно, встречаются очень редко, да и то лишь в отдельные достаточно короткие промежутки времени. В первую очередь это относится к динамическим процессам. В подавляющем большинстве случаев превалируют нелинейные зависимости, которые, кстати, также действуют в относительно небольшой промежуток времени, поскольку одна нелинейная тенденция сменяет другую. Смена тенденций развития экономических объектов, которые мы наблюдаем применительно к любым из них, объясняется тем, что любой экономический объект эволюционирует, меняя свою структуру, состав элементов, взаимосвязи между ними и взаимодействие с другими экономическими объектами. Точно также и производственный процесс, развиваясь по сложной циклической траектории, в отдельные промежутки времени может быть описан разными нелинейными моделями. Поэтому чаще всего экономист должен оперировать с нелинейными комплекснозначными моделями.

Из огромного множества возможных комплекснозначных моделей степенные производственные функции комплексных переменных занимают особое место. Как и в теории производственных функций действительных переменных, где степенные функции превалируют, поскольку обладают выдающимися свойствами, так и в теории комплекснозначной экономики степенные модели занимают особое место. Они универсальны, просты в использовании и на редкость хорошо описывают отдельные реальные производственные ситуации. В предыдущей главе монографии, в которой рассматривались производственные функции комплексного аргумента, было показано, что степенная функция обладает наиболее интересными свойствами из всех изученных функций.

В общем виде степенные производственные функции комплексных переменных можно записать так:

$$G_t + iC_t = (a_0 + ia_1)(K_t + iL_t)^{b_0 + ib_1}. \qquad (6.3.1)$$

Рассмотрим вначале самый простой из возможных случаев – случай, когда мнимые части комплексных коэффициентов этой функции равны нулю, и функция (6.3.1) является степенной производственной функцией с действительными коэффициентами:

$$G + iC = a\left(K + iL\right)^{b}. \qquad (6.3.2)$$

Основное исследование свойств модели степенной производственной функции комплексных переменных с действительными коэффициентами осуществил И.С.Светуньков. Здесь уместно указать лишь на самые важные свойства этой модели.

Применительно к нашей задаче отображения комплексной переменной производственных ресурсов на комплексную плоскость производственных результатов, существуют ограничения, вызванные экономической сутью переменных. Эти ограничения, естественно, действуют и на линейные комплекснозначные производственные функции, но в рассмотренном выше примере выход за эти ограничения был вряд ли возможен, но применительно к нелинейным моделям – весьма вероятен.

Итак, первая группа ограничений вызвана тем, что комплексные переменные производственных ресурсов лежат в первом квадранте, поскольку $K>0$ и $L>0$, то есть аргумент φ комплексной переменной ресурсов меняется в пределах от 0 до $\pi/2$. Если он равен нулю, то это означает, что ни одной единицы трудовых ресурсов для производства не привлекается. Если же он становится равным $\pi/2$, то это означает, что для производства привлекаются только трудовые ресурсы, а капитальные ресурсы равны нулю. Очевидно, что в реальности эти случаи встречаться не могут и оси координат мы должны исключить из области определения задачи.

Комплексные переменные производственных результатов по своему экономическому смыслу также не могут быть определены на всей комплексной плоскости и хотя лежат на ней в более широких пределах, определяемых полярным углом, находящемся в пределах от 0 до $3/4\,\pi$, но за эти пределы выходить не могут. Таким образом производственные результаты определены в первом и частично во втором квадрантах комплексной плоскости.

Если полярный угол θ комплексной переменной производственных результатов равен нулю, это означает, что издержки производства равны нулю, а валовая прибыль максимальна. Вряд ли можно вспомнить подобные ситуации в реальной экономической практике, поэтому ограничение в этой части следует записать как строгое неравенство. Поскольку во втором квадранте комплексной плоскости производственных результатов валовая прибыль, откладываемая по оси действительных чисел, становится отрицательной, то это означает работу предприятия в убыток – отрицательная валовая прибыль численно равна валовому убытку предприятия. Отрицательная валовая прибыль (убыток) по своему экономическому смыслу не может быть выше издержек производства: $-G \le C$. В том случае, когда ни одна единица произведённого товара не реализована, валовая прибыль G численно равна сумме понесённых на производство затрат C, а по знаку становится отрицательной. Именно в этом случае полярный угол производственных результатов становится равным $\frac{3}{4}\pi$. Случай, когда $-G=C$ является редким, но всё же возможным явлением хозяйственной практики.

Поэтому любая модель производственной функции комплексных переменных, в том числе и степенная, должна быть дополнена условиями, налагаемыми на полярные углы комплексных переменных:

$$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \theta \le \frac{3\pi}{4}. \qquad (6.3.3)$$

Однако, в силу периодичности полярных углов, более точно с позиций теории функций комплексного переменного это условие должно выглядеть так:

$$2\pi k < \varphi < 2\pi k + \frac{\pi}{2}, \qquad 2\pi k < \theta \le 2\pi k + \frac{3\pi}{4}.$$

Из всего множества чисел k в силу экономического смысла переменных, будем использовать только $k=0$. К тому же степенная производственная функция комплексных переменных должна быть однолистной, иначе модель перестаёт отражать реальную экономическую ситуацию. Это означает, что показатель степени b должен быть ограничен так, чтобы крайнему допустимому значению полярного угла производственных ресурсов φ соответствовало крайнее допустимое значение полярного угла производственных результатов θ. Так как для рассматриваемой степенной функции выполняется равенство $\theta=b\varphi$, то показатель степени должен удовлетворять условию:

$$0 < b\varphi \le \frac{3\pi}{4}. \qquad (6.3.4)$$

Если показатель степени будет отрицательным $b<0$, то любое увеличение производственных ресурсов неминуемо приводит к уменьшению производственных результатов и наоборот – уменьшение трудовых и капитальных ресурсов приводит к увеличению результатов производства. При этом полярный угол производственных результатов становится отрицательным, что означает отрицательность издержек производства – ситуация в экономике невозможная. Поэтому мы рассматриваем только функции с положительными показателями степени.

Для степенной функции с действительными коэффициентами, используемой в качестве модели производственных процессов, рост радиуса и полярного угла комплексной переменной производственных ресурсов (что означает рост трудовых ресурсов в большей степени, чем капитала) будет означать увеличение производственных результатов с опережающим ростом издержек производства над валовой прибылью. Если рассмотреть обратный экономический процесс – рост капитала в большей степени, чем трудовых ресурсов (что на комплексной плоскости производственных ресурсов означает уменьшение полярного угла с одновременным ростом радиуса переменной), то будем иметь вариант увеличения производственных результатов с опережающим ростом валовой прибыли над издержками производства.

Поскольку в большинстве реальных производственных процессов инвестиции в основной капитал ведут к усовершенствованию технологии производства и росту производительности труда, снижению процента брака и отходов производства, то это означает снижение издержек с одновременным увеличением валовой прибыли. А именно такой процесс и моделирует производственная степенная комплекснозначная функция с действительными коэффициентами. Если вдруг на таком производстве необходимо добиться быстрого увеличения объёмов производства, то тогда при сохранении капитальных ресурсов привлекается дополнительная рабочая сила, производство начинает работать не в одну, а в две или три смены. Понятно, что при таком использовании ресурсов необходимо установить дополнительные надбавки за работу во вторую и третью смену, значит, затраты на единицу труда увеличиваются, что ведёт к росту общих издержек производства. При этом валовая прибыль начинает уменьшаться. И этот процесс моделируется с помощью рассматриваемой производственной функции.

Следовательно, производственная степенная комплекснозначная функция с действительными коэффициентами по своим свойствам соответствует реальным производственным процессам. В ситуации стагнации производства эта модель также может быть использована, но это будет показано далее, а теперь рассмотрим свойства самой модели.

Производственную функцию (6.3.2) можно представить в тригонометрической форме:

$$G+iC=a\left(\sqrt{K^2+L^2}\right)^b\left(\cos(b\,arctg\,\frac{L}{K})+i\sin(b\,arctg\,\frac{L}{K})\right).\quad(6.3.5)$$

Это позволяет нам вывести две простые формулы для расчёта валовой прибыли G и издержек производства C:

$$G=a\left(\sqrt{K^2+L^2}\right)^b\cos(b\,arctg\,\frac{L}{K}).\qquad(6.3.6)$$

$$C=a\left(\sqrt{K^2+L^2}\right)^b\sin(b\,arctg\,\frac{L}{K}).\qquad(6.3.7)$$

Эти формулы позволяют понять, как именно будут моделироваться прибыль и издержки при различных сочетаниях производственных ресурсов. Если производственные технологии остаются неизменными, а только увеличивается привлекаемые ресурсы, то это означает сохранение пропорций между ресурсами и постоянство полярного угла на комплексной плоскости производственных ресурсов (*arg(K+iL)=const*). При этом будет расти модуль комплексной переменной. Для такого случая, как следует из (6.3.6) и (6.3.7), валовая прибыль и валовые издержки растут вместе с ростом ресурсов с одинаковым темпом. Степень этого роста определяется действительными коэффициентами модели.

Одним из примечательных свойств степенной производственной функции комплексных переменных с действительными коэффициентами является то, что для нахождения значений коэффициентов функции (6.3.2) достаточно иметь лишь одно наблюдение за производственным процессом, поскольку (6.3.6) и (6.3.7) представляют собой систему двух уравнений с двумя неизвестными *a* и *b*, найти значения которых можно, используя формулы:

$$b=\frac{arctg\,\frac{C}{G}}{arctg\,\frac{L}{K}}.\qquad(6.3.8)$$

$$a=\exp\left(\ln\left(\sqrt{G^2+C^2}\right)-\frac{arctg\,\frac{C}{G}}{arctg\,\frac{L}{K}}\ln\left(\sqrt{K^2+L^2}\right)\right).\qquad(6.3.9)$$

Как можно заметить из (6.3.8), коэффициент *b* характеризует отношение двух общеизвестных экономических показателей - рентабельность по себестоимости G/C и фондовооружённость труда K/L. Это обстоятельство даёт возможность рассматривать показатель степени модели в качестве одной из аналитических характеристик предлагаемой модели.

Обозначим крайнее положительное значение, которое может принимать коэффициент b для выполнения условия (6.3.4) как b_{NQ}:

$$b_{NQ} = \frac{3\pi}{4arctg\frac{L}{K}}. \qquad (6.3.10)$$

При $b=b_{NQ}$ доход организации становится равным нулю ($Q=G+C=0$) за счёт того, что в этой точке валовая прибыль отрицательна $G<0$, то есть характеризует убыток, который по своей величине равен издержкам производства $|G|=C$. Это возможно в ситуации, когда ни одна из произведённых единиц изделия не продаётся.

Рассматривая показатель степени b как переменную, лежащую в пределах $0<b<b_{NG}$, можно исследовать влияние этой переменной на производственные результаты при фиксированных затратах производственных ресурсов, например, найти, при каких условиях достигается максимум валовой прибыли, максимум дохода или максимум издержек производства – то есть максимум действительных показателей при изменении действительных переменных. Вычисляя первую производную функции (6.3.2) по переменной b, можно найти эти и некоторые другие условия[1].

Валовая прибыль G становится максимальной, когда выполняется следующее условие:

$$b = b_G = \frac{\mathrm{arctg}\left(\frac{\ln\sqrt{K^2+L^2}}{arctg\frac{L}{K}}\right)}{arctg\frac{L}{K}}. \qquad (6.3.11)$$

Валовая прибыль G равна издержкам C (то есть рентабельность по себестоимости равна 100%), когда показатель степени становится равным:

$$b = b_{prof} = \frac{\pi}{4arctg\frac{L}{K}}. \qquad (6.3.12)$$

Валовая прибыль G равна нулю, то есть имеется безубыточное, но и не доходное производство, в ситуации, когда:

$$b = b_{NG} = \frac{\pi}{2arctg\frac{L}{K}}. \qquad (6.3.13)$$

Доход от производства Q становится максимальным в том случае, если показатель степени равен:

---

[1] С.Г.Светуньков, И.С.Светуньков. Производственные функции комплексных переменных. – М.: Изд-во ЛКИ, 2008, – 136 с.

$$b = b_Q = \frac{\dfrac{3\pi}{4} - \mathrm{arctg}\left(\dfrac{arctg\,\dfrac{L}{K}}{\ln\sqrt{K^2+L^2}}\right) - \pi l}{arctg\,\dfrac{L}{K}}, \qquad (6.3.14)$$

где $l=1$, если $\sqrt{K^2+L^2} < 1$ и $l=0$ во всех остальных случаях.

Издержки производства C становятся максимальными, когда:

$$b = b_C = \frac{\pi m - \mathrm{arctg}\left(\dfrac{arctg\,\dfrac{L}{K}}{\ln\sqrt{K^2+L^2}}\right)}{arctg\,\dfrac{L}{K}}, \qquad (6.3.15)$$

где $m=0$, если $\sqrt{K^2+L^2} < 1$ и $m=1$ во всех остальных случаях.

Теперь, зная эти характерные точки, можно выделить 13 зон и точек изменения показателя степени b, характеризующих разные варианты эффективности производства (рис.6.2). По оси коэффициента b отложены численные значения, которые были рассчитаны на условном примере при значениях ресурсов, равных единице. Рассмотрим характерные точки и состояние модели по мере возрастания показателя степени, начиная с нулевого значения, следуя логике рис.6.2.

$b \in [0; b_G)$ – зона высокорентабельного производства. При росте коэффициента b от нуля до b_G, рост издержек производства C, сопровождается ещё большим ростом прибыли G. Рентабельность возрастает, доход Q также растёт.

$b = b_G$ – точка максимальной валовой прибыли. В ней валовая прибыль G достигает наибольшего значения.

$b \in (b_G; b_{prof})$ – производство эффективно, но прибыль G снижается, а издержки C растут. Доход Q продолжает увеличиваться. Рентабельность по себестоимости G/C снижается.

$b = 1$ – точка, интересная тем, что в ней K не влияет на C, а L не влияет на G, как видно из формулы (6.3.2), $G = aK$, $C = aL$. При этом, как можно заметить, доход организации будет находиться по формуле: $Q = a(K+L)$.

$b = b_{prof}$ - точка, в которой рентабельность по себестоимости равна ста процентам.

$b \in \left(b_{prof};b_Q\right)$ – прибыль G снижается, но доход организации Q всё ещё продолжает расти за счёт боле высокого роста издержек производства. Рентабельность меньше 100% и продолжает снижается.

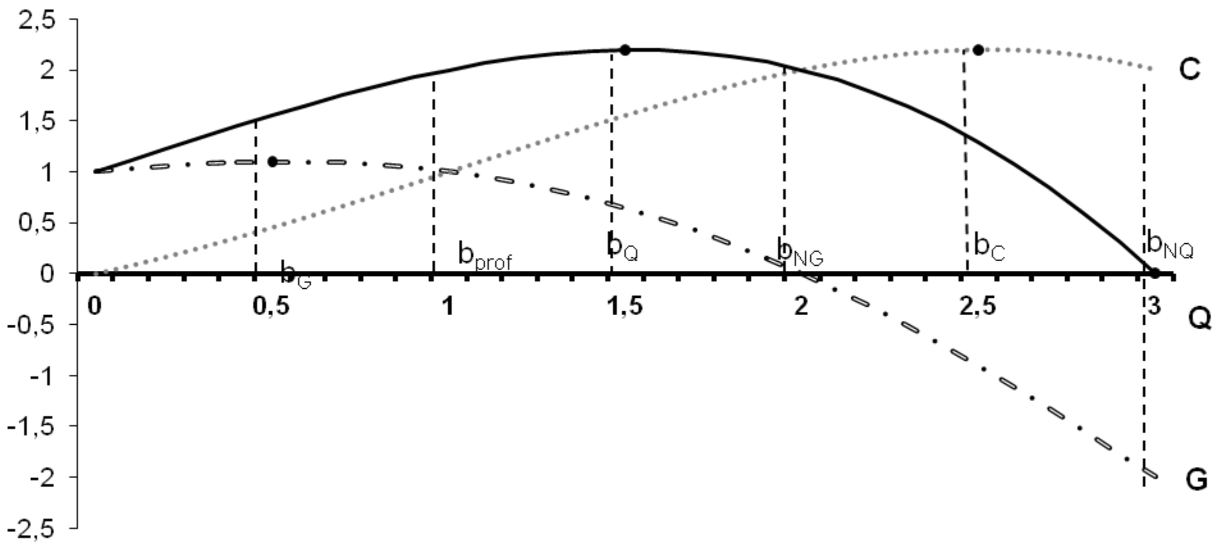

Рис.6.2. Значения коэффициента b

$b = b_Q$ – точка максимального дохода организации.

$b \in \left(b_Q;b_{NG}\right)$ – производство всё ещё эффективно, несмотря на то, что прибыль G продолжает уменьшаться, а издержки продолжают расти. Доход Q в этом отрезке начинает уменьшаться.

$b = b_{NG}$ – точка бесприбыльного производства (известная в экономической теории как «критическая точка»). Здесь $G = 0$, доход Q равен издержкам C.

$b \in \left(b_{NG};b_C\right)$ – неэффективное убыточное производство. Прибыль отрицательна (убыток), но по модулю меньше издержек. В реальном производстве это может соответствовать ситуации, когда товар приходится продавать по цене, ниже себестоимости. Дальнейшее увеличение показателя степени означает, что издержки C растут, а доход Q уменьшается.

$b = b_C$ – точка наибольших издержек. Это точка-экстремум, в которой издержки принимают наибольшее значение, валовая прибыль является отрицательной и по модулю меньше издержек, то есть продаётся всё меньшая часть продукции, поэтому убыток по своей величине всё ещё меньше затрат на производство, но стремительно растёт.

$b \in \left(b_C; b_{NQ}\right)$ – производство крайне неэффективно. Издержки, валовая прибыль и доход снижаются, убыток возрастает.

$b = b_{NQ}$ – точка отсутствия дохода – точка прекращения производства, так как валовая прибыль G по модулю равна издержкам C, а доход Q равен нулю. То есть, весь объём производства убыточен, не продаётся ни одной единицы продукции.

Поскольку экономика многообразна, то в реальной практике возможны самые разные варианты, отличающиеся от рассмотренного выше, в частности:

- возможен вариант, когда производственные ресурсы принимают такое значение:

$$\sqrt{K^2 + L^2} = 1.$$

В этом случае $b_G = 0$;

- если же производственные ресурсы такие, что

$$\sqrt{K^2 + L^2} < 1,$$

то b_G становится отрицательной – в данных условиях достичь максимума прибыли невозможно;

- когда для производственных ресурсов выполняется такое равенство как

$$arctg\frac{L}{K} = \ln\sqrt{K^2 + L^2},$$

становятся равными друг другу значения точек:

$b_{NG}=b_Q$, $b_C=b_{NQ}$;

- когда же

$$arctg\frac{L}{K} < \ln\sqrt{K^2 + L^2},$$

меняются местами точки:

b_{NG} с b_Q и b_C с b_{NQ}.

Это означает, что максимальный доход достигается в убыток организации.

Эта дополнительная информация позволяет исследователю лучше понять характер производства, если ресурсы принимают одно из этих значений.

Наличие точки максимума прибыли b_G даёт возможность получить аналитическую характеристику предлагаемой степенной функции комплексных переменных, а именно – определить уровень эффективности производства, воспользовавшись расстоянием фактического значения b до точки b_G. И.С.Светуньков предлагает использовать показатель, отражающий этот уровень, который может быть найден по формуле:

$$S = 1 - \frac{b - b_G}{b_{NG} - b_G}. \qquad (6.3.16)$$

Как видно, коэффициент S положителен, когда $b<b_{NG}$, то есть, когда прибыль предприятия положительна. Коэффициент близок к нулю, если значение b близко к b_{NG}, то есть, когда прибыль близка к нулю. S равен нулю только в случае бесприбыльного производства, когда $b=b_{NG}$. S равен единице, когда значение показателя степени b совпадает со значением b_G. В зоне «высокорентабельного производства» (когда b лежит в границах $\left(0; b_G\right)$) коэффициент S становится больше единицы. Если $b>b_{NG}$, то предлагаемый коэффициент становится отрицательным, что отражает убыточность производства. Коэффициент S для удобства восприятия также можно представить в процентном выражении, просто умножив его значение на 100%.

Исследования на многочисленных условных и фактических примерах показали, что этот коэффициент коррелирует с динамикой рентабельности по себестоимости, причём чем выше рентабельность, тем ближе значение показателя к единице и наоборот. В табл. 6.8 в качестве примера приведены расчеты коэффициента S для экономики России по данным Госкомстата России с 1998 по 2003 год и отношение G/C как отражение средней по стране рентабельности[2].

Как видно из таблицы, коэффициент S действительно может использоваться как одна из характеристик оценки уровня эффективности производства, поскольку в определённой степени он отражает среднюю рентабельность производства (коэффициент парной корреляции между S и G/C на этом множестве значений равен 0,71).

Табл. 6.8.

Результаты расчёта уровня эффективности экономики России

Год	1998	1999	2000	2001	2002	2003
S	8,3%	20,7%	23,4%	20,4%	17,8%	18,8%
G/C	12,7%	25,5%	24,7%	18,5%	14,4%	13,5%

Поскольку предложенная модель имеет ярко выраженный экономический смысл и отражает реально происходящие производственные процессы, следует более тщательно изучить её аналитические свойства, в том числе и на примерах различных производств.

[2] Расчёты выполнены И.С.Светуньковым.

6.4. Степенные производственные комплекснозначные функции с действительными коэффициентами Диатомового комбината и промышленности России

Замечательные свойства степенной производственной функции комплексных переменных, о которых «авансом» говорилось в предыдущей главе, требуют своего подтверждения на реальных экономических примерах. Поскольку данные по Диатомовому комбинату являются с этих позиций весьма представительными, следуя вышеизложенной в предыдущем параграфе логике, И.С.Светуньков рассчитал значения a, b, b_G, b_{NG}, b_Q и S для каждого наблюдения. Эти значения приведены в табл. 6.9. К сожалению требования соблюдения коммерческой тайны не позволяют привести здесь исходные данные по этому комбинату за рассматриваемый период с 2004 по 2007 год, поэтому приводятся лишь результаты вычислений.

Вспомнив интерпретацию значений приведённых характеристик модели и предложенного коэффициента S, можно сделать вывод о том, что эффективность работы предприятия довольно низкая. Показатель степени b расположен в восьмой зоне из тринадцати, рассмотренных ранее, и близок к граничному значению b_{NG}, которое характеризует бесприбыльную деятельность. Об этом же свидетельствует и низкое значение коэффициента S. Поскольку нашей задачей является проверка аналитических свойств степенной производственной функции с действительными коэффициентами, в таблице справочно приведен показатель рентабельности G/C.

Табл. 6.9

Характеристики степенной производственной функции комплексных переменных с действительными коэффициентами для Диатомового комбината

Квартал	a	b	b_G	b_Q	b_{NG}	S	G/C
1кв. 2004	0,939	1,241	0,032	0,658	1,251	**0,80%**	**1,23%**
2кв. 2004	1,928	1,294	0,009	0,644	1,270	**-1,92%**	**-2,99%**
3кв. 2004	1,643	1,332	0,053	0,683	1,260	**-6,02%**	**-9,08%**
4кв. 2004	1,558	1,288	0,066	0,708	1,284	**-0,28%**	**-0,41%**
1кв. 2005	1,127	1,283	0,069	0,713	1,288	**0,40%**	**0,59%**
2кв. 2005	1,344	1,332	0,016	0,682	1,332	**-0,01%**	**-0,01%**
3кв. 2005	1,335	1,273	0,060	0,715	1,309	**2,86%**	**4,29%**
4кв. 2005	1,728	1,329	0,086	0,756	1,339	**0,78%**	**1,14%**
1кв. 2006	1,272	1,308	0,092	0,760	1,336	**2,30%**	**3,36%**
2кв. 2006	1,476	1,348	0,061	0,742	1,362	**1,06%**	**1,59%**
3кв. 2006	1,403	1,349	0,091	0,782	1,383	**2,60%**	**3,82%**
4кв. 2006	1,218	1,326	0,092	0,799	1,415	**6,75%**	**9,94%**
1кв. 2007	1,383	1,397	0,062	0,787	1,449	**3,72%**	**5,60%**
2кв. 2007	1,502	1,385	0,105	0,829	1,449	**4,77%**	**6,96%**

Легко заметить, что показатель S коррелирует с показателем рентабельности, подтверждая пригодность комплекснозначной модели для экономического анализа.

Из таблицы видно, что и коэффициент пропорциональности и показатель степени подвержены изменению во времени, но это изменение не является существенным. Очевидно, что любая модель социально-экономической динамики, как бы хорошо она не описывала ряд наблюдений, в некоторый момент времени перестанет делать это удовлетворительно, поскольку социально-экономические динамические процессы подвержены эволюционному развитию. Поэтому и возникает, например, в задаче прогнозирования необходимость адаптации модели – то есть, корректировки коэффициентов модели при появлении изменений в тенденциях. Комплекснозначная степенная производственная функция с действительными коэффициентами, для которой коэффициенты рассчитываются на каждом наблюдении, отражает это в полном объёме.

Помимо того, что изучаемая модель позволяет судить об эффективности производства, на её основе можно получить и рекомендации о том, как повысить эффективность производства. Ориентируясь на последнее наблюдение по Диатомовому комбинату и вычисленные для него значения коэффициентов степенной производственной функции комплексных переменных, которая имеет вид:

$$G + iC = 1{,}502\left(K + iL\right)^{1{,}385}, \qquad (6.4.1)$$

сформулируем рекомендации для руководства предприятия, которые следует из модели.

Прежде всего, определим, какие может получить комбинат прибыль и издержки, если производство усовершенствовать в максимально возможной степени. Конечно, это предложение является идеализированным, поскольку мы не учитываем все возможные факторы и условия. Поэтому рассматривается предельный случай. Итак, если усовершенствовать производство до этого недостижимого предельного случая, то в модели это отражается, когда S=100%, или

$$b = b_G = 0{,}105.$$

Возьмём те же самые значения ресурсов K и L за 2 квартал 2007 года и рассчитаем значения G и C при показателе степени $b = b_G = 0{,}105$. Получим в относительных величинах:

$$G^* = 1{,}512, \; C^* = 0{,}172. \qquad (6.4.2)$$

Заметим, что издержки производства при рассматриваемом случае существенно снизились, поскольку они отнесены к начальному их значению за 1 кв. 2004 года и весь рассматриваемый период увеличивались, начиная с единицы. А в (6.4.2) наблюдаем снижение себестоимости более чем в пять раз! Тип производства, при котором достижимы такие величины прибыли и затрат является идеальным, а полученные расчётные величины являются предельными. Эти недостижимые значения показывают направления для возможного развития предприятия, в частности, они свидетельствуют о том, что при существующей технологии производства и при более рациональном использовании имеющихся ресурсов, в том числе и трудовых, Диатомовый комбинат может получить значительно большую прибыль и понести меньшие издержки. Но что для этого надо сделать?

Для ответа на поставленный вопрос определим, как предприятие может добиться предельного сочетания прибыли и затрат на производство, равные $G^*=1,512$; $C^*=0,172$, если не осуществлять усовершенствование организационно-экономического механизма предприятия, какие ресурсы нужно для этого привлечь. Для этого в формулу (6.4.1), которая отражает существующее положение на предприятии, подставим эти предельные значения валовой прибыли и издержек, на основе чего вычислим необходимые размеры капитала и труда, с помощью которых, не меняя ничего другого на предприятии, можно достичь искомых значений прибыли и издержек. В абсолютных величинах они будут равны:

$$K = 5550 \text{ тыс. руб.}, \quad L = 455 \text{ тыс. руб.} \qquad (6.4.3)$$

Для сравнения отметим, что на 2 квартал 2007 года на Диатомовом комбинате стоимость основных производственных фондов составила 2919 тыс. руб., а фонд оплаты труда – 5517 тыс. руб.

О чём говорит это сравнение? Для перевода комбината в область более эффективного производства следует увеличить основные производственные фонды комбината в 5550/2919=1,9 раза, а фонд оплаты труда следует сократить в 5517/455=12 раз. Сделать это можно, сокращая излишние трудовые ресурсы и повышая производительность труда за счёт инвестиций в основной капитал.

А теперь можно дать экономическую интерпретацию полученным результатам.

Расчётные величины труда и капитала позволяют сделать вывод о том, что ресурсы на предприятии используются неэффективно: для увеличения эффективности производства стоит увеличить инвестиции в основные производственные фонды и сократить затраты труда. Приведённые пропорции не говорят о том, что именно в таких масштабах и следует осуществить изменение ресурсов, нет. Любая модель представляет собой результат абстрагирования, не учитываются многие реальные факторы, поэтому мы и назвали вычисленные значения валовой прибыли и издержек производства по идеальной модели «предельными». Полученные пропорции позволяют определить главное направление действий. Поскольку для достижения эффективного производства необходимо капитал увеличить в 1,9 раза, а трудовые ресурсы необходимо сократить в 12 раз, то очевидно, что главным направлением усовершенствования деятельности предприятия являются трудовые ресурсы. Именно они на комбинате используются неэффективно, поэтому рационализация труда персонала является важным фактором повышения эффективности производства. Инвестиции, как это видно из расчётов, также не следует сбрасывать со «счетов» экономического анализа, но главный объект внимания менеджмента комбината для повышения эффективности производства – трудовые ресурсы. Руководству комбината стоит заняться изучением пропорции между промышленно-производственным и прочим персоналом комбината, организацией труда и заработной платы поскольку именно здесь кроются резервы повышения эффективности производства.

Следует отметить, что критерий максимума валовой прибыли является основным критерием работы предприятия, но иногда возникают такие конкурентные ситуации на рынке, при которых предприятию во что бы то ни стало необходимо занять лидирующие позиции на рынке по объёму продаж. Это означает, что основным критерием работы предприятия в этом случае является критерий максимума объёма производства. Отдавая себе отчёт в том, что объёмы производства и объёмы продаж – понятия хотя и взаимосвязанные, но всё же разные, мы, тем не менее, в целях упрощения задачи, делаем упор на их близости друг к другу, а не на отличиях, и предположим, что критерию максимума объёма производства соответствует максимум дохода. Тогда можно осуществить аналогичные расчёты по Диатомовому комбинату, но с использованием вместо b_G значения b_Q, то есть, когда

$$b = b_Q = 0,829 .$$

Получим следующие результаты.

Максимум дохода комбината будет составлять *Q=61747* тыс. руб., но при этом прибыль будет *G=27359* тыс. руб., а издержки составят *C=34387* тыс. руб. Это состояние достижимо при увеличении основных производственных фондов *K* до 4732 тыс. руб. и сокращении затрат на трудовые ресурсы *L* до 3590 тыс. руб. То есть, получается, что для достижения максимума дохода, надо также, как и для достижения максимума прибыли, увеличивать стоимость основных производственных фондов, но тольков *4732/2919=1,6* раза и несколько сократить затраты трудовых ресурсов - в *5517/3590=1,54* раза. Это означает, что Диатомовый комбинат работает в состоянии, близком к максимуму объёмов производства при данной технологии и организации производства. Если вспомнить о том, что Диатомовый комбинат является единственным в России поставщиком диатомовых теплоизоляционных кирпичей для цветной металлургии страны, но его конкурентом выступают производители из Китая, понятно, что комбинат стараясь не допустить конкурента на рынок, в максимальной степени обеспечивает потребителей своей продукцией.

Интересно теперь сравнить результаты и рекомендации, полученные с помощью степенной производственной функции комплексных переменных с действительными коэффициентами с результатами и рекомендациями, которые следуют при применении в данном случае производственной функции Кобба-Дугласа. Оценив с помощью МНК параметры степенной производственной функции комплексных переменных с действительными коэффициентами и производственной функции Кобба-Дугласа по данным Диатомового комбината, были получены модели следующего вида:

$$G + iC = 1{,}398\left(K + iL\right)^{1{,}319}. \tag{6.4.4}$$

$$Q = 2{,}348K^{0{,}457}L^{0{,}543}. \tag{6.4.5}$$

Ошибка аппроксимации дохода по первой модели (6.4.4) составила 15,3%, а по второй модели (6.4.5) – 14,8%. То есть, эти две модели практически с одинаковой степенью точности аппроксимируют исходные данные рассматриваемого производства.

Рекомендации, которые можно получить с помощью производственной функции Кобба-Дугласа, заключаются в том, что для увеличения дохода Диатомовому комбинату необходимо увеличивать инвестиции в основные производственные фонды, и увеличивать трудовые ресурсы (численность персонала), причём увеличение численности персонала более желательно, поскольку коэффициент эластичности (6.4.5) по труду больше, чем по капиталу. Вычисленное с помощью МНК значение показателя степени при трудовых ресурсах L функции Кобба-Дугласа, равное *0,543* говорит о том, что, увеличивая число занятых в производстве на один процент, можно получить увеличение дохода на *0,543*%.

Так, если оставить неизменной величину ОПФ за последний год наблюдения в размере *2919* тыс. руб., и увеличивать число работающих на комбинате, то, например, удвоения валового выпуска можно добиться, как следует из функции Кобба-Дугласа (6.4.5), увеличивая трудовые ресурсы до *2187* человек (сохраняя текущую заработную плату). Если теперь подставить эти значения капитальных и трудовых ресурсов в нашу функцию (6.4.4), то будет промоделирован иной результат, а именно: валовая прибыль будет отрицательной и равной (*-60499*)тыс. руб., а издержки производства – равны *191045* тыс. руб.. Валовой выпуск составит *130546* тыс. руб. Из чего следует очевидный вывод – ни в коем случае не увеличивать численность занятых на комбинате, а наоборот, сократить их число, оптимизируя организацию их труда.

Поскольку две производственные функции (6.5.4) и (6.5.5) обладают почти одинаковой степенью точности аппроксимации прошлых значений моделируемого производства (15,3% и 14,8% соответственно), а предлагают диаметрально противоположные рекомендации касательно развития производства, возникает естественная альтернатива – выбора той модели, которая действительно описывает ситуацию, а не искажает её.

Для получения ответа на вопрос: рекомендации какой из двух моделей ближе к истинному положению дел на комбинате и какая модель адекватно описывает производственную ситуацию, - мы обратились к руководству самого Диатомового комбината. Генеральный директор комбината к.э.н. Е.А.Никифоров объяснил, что количество занятых на комбинате действительно является излишним. Вызвано это тем, что комбинат является градообразующим предприятием, поэтому для снижения уровня социальной напряжённости и уменьшения безработицы в городе руководство и приняло решение обеспечить работой максимально возможное число жителей Инзы, используя трудовые ресурсы не самым эффективным образом. По мнению директора комбината, трудовые ресурсы на предприятии избыточны. Относительно капитальных ресурсов комбината ситуация на нём такая. После кризиса 90-х годов XX века, когда комбинат практически остановился, его материально-техническая база пришла в упадок и частично была разрушена (в условиях безработицы жители Инзы начали растаскивать основные средства комбината на продажу в виде металлолома). Только с конца 90-х годов прошлого века начались работы по восстановлению комбината, в первую очередь – инвестиции в основной капитал. Поэтому стратегическим направлением развития Диатомового комбината считается ускоренное увеличение инвестиций в основной капитал при сохранении численности занятых (в силу социально-экономических причин), что как видно из приведённого примера, полностью соответствует выводам и рекомендациям степенной производственной функции комплексных переменных с действительными коэффициентами (6.5.4) и противоречит рекомендациям производственной функции Кобба-Дугласа (6.5.5).

Из данного примера вовсе не следует делать вывод о том, что наша функция всегда лучше, чем функция Кобба-Дугласа. Но поскольку в данном примере она адекватно описала производственный процесс, а функция Кобба-Дугласа – не адекватно, следует однозначный вывод о том, что могут встретиться и другие производственные ситуации, когда комплекснозначная производственная функция будет лучше, чем производственная функция действительных переменных.

Проверим возможность применения степенных производственных функций комплексных переменных с действительными переменными на примере экономики макроуровня. Воспользуемся для этого статистическими данными по промышленности России за 1998-2004 года, представленные в табл. 6.10.

Для построения степенной производственной функции комплексных переменных нужны данные по валовой прибыли и издержкам производства, которые в статистических сборниках Госкомстата РФ в целом для страны не приводятся. Впрочем, необходимые расчётные значения прибыли и издержек можно получить, исходя из величин рентабельности производства, которые приведены в таблице. Вместо основных производственных фондов будем использовать величину инвестиций в основной капитал.

Табл. 6.10

Исходные статистические данные по промышленности России[3]

[3] http://www.gks.ru

Год	Объем промышленной продукции, млрд. руб.	Среднегодовая численность промышленно-производственного персонала, тыс. человек	Инвестиции в основной капитал в отрасли, производящие товары, млн. руб.	Уровень рентабельности проданных товаров, продукции (работ, услуг)
1998	1707	13173	165092	0,127
1999	3150	13077	297278	0,255
2000	4763	13294	527544	0,247
2001	5881	13282	699366	0,185
2002	6868	12886	817504	0,144
2003	8498	12384	980188	0,135
2004	11209	11977	1179744	0,179

Приведя полученные данные к относительным величинам (к 1998 году), с помощью МНК найдены расчётные значения коэффициентов модели:

$$G + iC = 0{,}001(K + iL)^{3{,}457}. \qquad (6.4.6)$$

Высокое значение показателя степени не должно пугать – ведь за рассматриваемый период полярный угол комплексного ресурса уменьшился почти в восемь раз! Полярный угол комплексного производственного результата остался почти неизменным. Именно поэтому показатель степени в модели (6.4.6) оказался столь велик. Как следует из рекомендаций модели, способствовать росту эффективности производства будет увеличение инвестиций в основной капитал.

Расчёт контрольных точек для этой модели не имеет смысла, поскольку вместо основных фондов в модели используются инвестиции.

6.5. Coefficients of elasticity of the complex exponential production function with real coefficients

Elasticity is one of the most important indices used in the practice of socio-economic process simulation. By definition, elasticity is calculated as follows:

$$\varepsilon_{\acute{o}\tilde{o}} = \frac{\Delta y}{y} \Big/ \frac{\Delta x}{x} \qquad (6.5.1)$$

Elasticity (6.5.1) has clear interpretation showing in terms of percentage the change of the result with one percent factor change. For example, in the economic theory, characterizing the demand behavior often involves the price elasticity of the demand volume, with elasticity showing

consumer reaction (change of the consumption volume) at slight changes of the price per product unit.
Moving from discrete values to constants, we can represent the elasticity as follows:

$$\varepsilon_{\acute{o}\tilde{o}} = \frac{dy}{y} \bigg/ \frac{dx}{x} = \frac{dy}{dx}\frac{x}{y} \quad (6.5.2)$$

This form of notation allows for calculating elasticity for various differentiable functions including production ones. Since we are discussing the properties of production functions of complex variables, then, after getting acquainted with the peculiarities of the behavior of the exponential complex function with real coefficients, we would like to focus on the resource elasticity for this function. For that, as follows from (6.5.2), it is necessary to calculate the first derivatives of this function with respect to its variables - labour and capital.
First of all, to calculate the derivatives, let us represent the model of the production function (5.3.2) in the exponential form:

(6.5.3)
$$G + iC = a(K + iL)^b = a(Re^{i\theta})^b$$
Where:

$$R = \sqrt{K^2 + L^2}\ , \ \theta = arctg\,\frac{L}{K}$$
Now it is easy to group the model module and its polar angle:

$$G + iC = aR^b e^{ib\theta} \quad (6.5.4)$$

With this in mind, the model of the exponential complex production function may be represented in the trigonometric form:

$$G + iC = aR^b[\cos(b\theta) + i\sin(b\theta)] \qquad (6.5.5)$$

This makes it possible to calculate the first and the second (if necessary) partial derivatives of the complex function with respect to resources – labour and capital. According to Dalamber-Eiler (Rieman-Koschi) condition for finding complex function derivatives, it will be enough to take derivatives of its real and imaginary parts. The real part of the model (6.5.5) may be represented in the following form:

$$\mathrm{Re}(G + iC) = aR^b\cos(b\theta) = U \quad (6.5.6)$$

This is why the derivative of the function (5.3.2) with respect to resources may be calculated as follows:

$$\frac{\partial(G+iC)}{\partial(K+iL)} = \frac{\partial U}{\partial K} - i\frac{\partial U}{\partial L} = \frac{\partial(aR^b\cos(b\theta))}{\partial K} - i\frac{\partial(aR^b\cos(b\theta))}{\partial L} \quad (6.5.7)$$

Let us calculated the first component of the derivative (6.5.7), namely $\frac{\partial(aR^b\cos(b\theta))}{\partial K}$ as a derivative of a complex function:

$$\frac{\partial(aR^b\cos(b\theta))}{\partial K}=\frac{\partial(aR^b)}{\partial K}\cos b\theta+\frac{\partial\cos(b\theta)}{\partial K}(aR^b) \quad (6.5.8)$$

The first part of (6.5.8) takes the form:

$$\frac{\partial(aR^b)}{\partial K}\cos(b\theta)=abR^{b-1}\frac{K}{\sqrt{K^2+L^2}}\cos(b\theta) \qquad (6.5.9)$$

Or

$$\frac{\partial(aR^b)}{\partial K}\cos(b\theta)=abR^{b-2}K\cos(b\theta) \quad (6.5.10)$$

The second form of (6.5.8) is a derivative of the cosine of argument in *K*. It may also be calculated as follows:

$$\frac{\partial\cos(b\theta)}{\partial K}(aR^b)=-aR^b\sin(b\theta)\frac{\partial(b\theta)}{\partial K}=-aR^b\sin(b\theta)\frac{\partial(arctgb\frac{L}{K})}{\partial K}.$$

After applying the formula for calculation of the derivative of the arctangent we have:

$$\frac{\partial\cos(b\theta)}{\partial K}(aR^b)=-abR^b\sin(b\theta)\frac{-L}{K^2(1+\frac{L^2}{K^2})}=abR^b\sin(b\theta)\frac{L}{R^2}=abR^{b-2}L\sin(b\theta) \quad (6.5.11)$$

Then the partial derivative of the exponential complex production function with real coefficients (6.5.8) for capital will be recorded as follows:

$$\frac{\partial(aR^b\cos(b\theta))}{\partial K}=abR^{b-2}K\cos(b\theta)+abR^{b-2}L\sin(b\theta)=abR^{b-2}(K\cos(b\theta)+L\sin(b\theta)) \quad (6.5.12)$$

The same procedure can be applied for partial derivative of the exponential production function (5.3.2) for labour: $\frac{\partial(aR^b\cos(b\theta))}{\partial L}$.
Since it is a complex function derivative, it should be calculated as follows:

$$\frac{\partial(aR^b\cos(b\theta))}{\partial L}=\frac{\partial(aR^b)}{\partial L}\cos(b\theta)+\frac{\partial\cos(b\theta)}{\partial L}(aR^b) \quad (6.5.13)$$

The summand (6.5.13) with the account of the module derivative may be represented as follows:

$$\frac{\partial(aR^b)}{\partial L}\cos(b\theta)=abR^{b-1}\frac{L}{\sqrt{K^2+L^2}}\cos(b\theta)=abR^{b-2}L\cos(b\theta) \quad (6.5.14)$$

The addend (6.5.13) includes the derivative of the cosine of argument for labour. This derivative may also be determined as follows:

$$\frac{\partial\cos(b\theta)}{\partial L}(aR^b)=-abR^b\sin\theta\frac{\partial(arctg\frac{K}{L})}{\partial L}.$$

After calculating the derivative of the arctangent we finally obtain for this component:

$$\frac{\partial\cos(b\theta)}{\partial L}(aR^b)=-abR^b\sin(b\theta)\frac{K}{K^2(1+\frac{L^2}{K^2})}=-abR^{b-2}K\sin(b\theta) \quad (6.5.15)$$

Then the derivative with respect to labour will look like:

$$\frac{\partial(aR^b\cos(b\theta))}{\partial L}=abR^{b-2}L\cos(b\theta)-abR^{b-2}K\sin(b\theta)=abR^{b-2}(L\cos(b\theta)-K\sin(b\theta)) \quad (6.5.16)$$

Now we can obtain the required formula of the first derivative of the production function in question for the complex resource (6.5.7):

$$\frac{\partial(G+iC)}{\partial(K+iL)}=abR^{b-2}(K\cos(b\theta)+L\sin(b\theta))-iabR^{b-2}(L\cos(b\theta)-K\sin(b\theta))$$

This huge expression can easily be simplified:

$$\frac{\partial(G+iC)}{\partial(K+iL)}=abR^{b-2}[(K\cos(b\theta)+L\sin(b\theta)-iL\cos(b\theta)+iK\sin(b\theta)]= \quad (6.5.17)$$
$$=abR^{b-2}[(K-iL)(\cos(b\theta)+i\sin(b\theta)].$$

Since $\cos(b\theta)+i\sin(b\theta)=e^{ib\theta}$ and $R^{-2}(K-iL)=\frac{K-iL}{K^2+L^2}=\frac{1}{K+iL}$ (6.5.17) can be recorded much simpler:

$$\frac{\partial(G+iC)}{\partial(K+iL)}=abR^be^{ib\theta}(K+iL)^{-1}=b(K+iL)^{-1}[aR^be^{ib\theta}] \quad (6.5.18).$$

If we know the value of the first derivative of the exponential complex function with real coefficients for the complex argument, we can determine the elasticity of this function. It will have the following form:

$$\varepsilon=\frac{\partial(G+iC)}{\partial(K+iL)}\frac{K+iL}{G+iC}=b(K+iL)^{-1}[aR^be^{ib\theta}]\frac{K+iL}{G+iC}=b\frac{aR^be^{ib\theta}}{G+iC}\frac{K+iL}{K+iL}=b \quad (6.5.19)$$

Thus, the elasticity of the exponential complex function with real variables for the complex resource is equal to the function exponent. This means that the model under study possesses the

following property – with simultaneous increase of production resources by one percent, the production result will increase by *b* percent.
Remarkable properties of models of complex variables disclosing additional advantages thereof compared to models of real variables are demonstrated in the fact that using an exponential complex production function we can determine the contribution of each of the components of the complex resource per each component of the production result – the gross margin *G* and the production costs *C*. Since real economy admits the increase of, for example, only labour resources with capital resources unchanged, it is important to find out how the gross margin and the production costs will change. To answer this question we should calculate the elasticity coefficients of the complex result for each of the resources – the labour and the capital.
First let us calculate the first partial derivative of the complex function for capital, using the same symbols:

$$\frac{\partial(G+iC)}{\partial K}=\frac{\partial(aR^b\cos(b\theta))}{\partial K}+i\frac{\partial(aR^b\sin(b\theta))}{\partial K} \quad (6.5.20)$$

For the first summand it was previously obtained in (6.5.12):

$$\frac{\partial(aR^b\cos(b\theta))}{\partial K}=abR^{b-2}(K\cos(b\theta)+L\sin(b\theta))$$

Omitting huge calculations like those given above (6.5.20), we have the following for the addend:

$$\frac{\partial(aR^b\cos(b\theta))}{\partial K}=abR^{b-2}(K\sin(b\theta)-L\cos(b\theta)) \quad (6.5.21)$$

Substituting the results obtained into (6.5.20) we find the form of the first partial derivative of the required function for capital :

$$\frac{\partial(G+iC)}{\partial K}=abR^{b-2}[(K\cos(b\theta)+L\sin(b\theta))+i(K\sin(b\theta)-L\cos(b\theta))] \quad (6.5.22)$$

The expression in square brackets may be easily transformed:

$$K\cos(b\theta)+iK\sin(b\theta)-i(L\sin(b\theta)+L\cos(b\theta))=(K-iL)(\cos(b\theta)+i\sin(b\theta))=(K-iL)e^{ib\theta}.$$

The factor before the square brackets (6.5.22) may be presented as follows:

$$abR^{b-2}=ab\frac{R^b}{K^2+L^2}$$

With the account of the above-mentioned, it is easy to obtain a convenient formula of the first partial derivative of the complex production result for capital:

$$\frac{\partial(G+iC)}{\partial K}=ab\frac{R^b}{K^2+L^2}(K-iL)e^{ib\theta}=b(aR^be^{ib\theta})\frac{K-iL}{K^2+L^2} \quad (6.5.23)$$

Hence we have the elasticity coefficient of the exponential production function of complex variables for capital:

$$\varepsilon_K = \frac{\partial(G+iC)}{\partial K}\frac{K}{G+iC} = b(aR^b e^{ib\theta})\frac{K-iL}{K^2+L^2}\frac{K}{aR^b e^{ib\theta}} = b(\frac{K^2}{K^2+L^2} - i\frac{LK}{K^2+L^2}) \quad (6.5.24)$$

Since this elasticity coefficient is complex, its real part characterizing capital influence on the gross margin and its imaginary part – capital influence on the production costs, the former and the latter should be considered separately:

$$\varepsilon_K = \varepsilon_{GK} + i\varepsilon_{CK} \quad (6.5.25)$$

The real part of the complex elasticity coefficient ε_{GK} characterizes the value by which the gross margin will change with the increase of the capital by one per cent:

$$\varepsilon_{GK} = b\frac{K^2}{K^2+L^2} \quad (6.5.26)$$

In the denominator of the real part of the complex elasticity coefficient (6.5.25) there is a value that was previously called the scale of production resources. It is evident that the fraction of an expression (6.5.26) is always lower than one that is why the real part of the elasticity for capital showing the growth of the gross margin is determined by the exponent *b* value. Since exponent *b* for this function characterizes overall elasticity of the complex production result for a complex production resource (6.5.19), then (6.5.26) may be recorded as follows:

$$\varepsilon_{GK} = \varepsilon\frac{K^2}{K^2+L^2} \to \varepsilon = \varepsilon_{GK}(1+\frac{L^2}{K^2}) \quad (6.5.27)$$

This means that the gross margin elasticity coefficient for capital of the production function in question is always lower than the elasticity.
It follows from (6.5.26) that the increase of the capital resource will always, in this model, result in the increase of the gross margin – more or less subject to the exponent *b* value.
Let us consider now the imaginary component of the complex elasticity of the production function for capital. It shows influence of the capital on production costs and is equal to:

$$\varepsilon_{CK} = -b\frac{LK}{K^2+L^2} = -\varepsilon\frac{LK}{K^2+L^2} \quad (6.5.28)$$

The fraction of this expression is always positive like coefficient b, this is why the imaginary component of the complex elasticity for capital is always negative. This means that the model under consideration describes production processes under which any increase in the capital results in the reduction of the production costs, i.e. to the reduction of the unit cost. Most real production processes do behave this way as capital increase leads mainly to the increase of labour productivity which results in cost reduction. It is evident from (6.5.28) that the degree of reduction of the production costs is determined by exponent b of the production function and labour and capital values.
Since elasticity of the complex production result for capital is a complex number, it may be presented in exponential form. For that, we should calculate the module of the complex number and its polar angle.
The module of the complex elasticity coefficient (6.5.24) is equal to:

$$R_{\varepsilon K} = bK \quad (6.5.29),$$

And its polar angle:

$$\varphi_{\varepsilon K} = arctg\frac{L}{K} \quad (6.5.30).$$

Since the sum of the gross margin and costs represents the sales volume, then when both the gross margin and the production costs are adjusted to the gross output as a result of preliminary scaling, the sum of the real and the imaginary parts of the elasticity coefficient for capital will characterize elasticity of the output for capital in the following way:

$$\varepsilon_{QK} = \varepsilon_{rk} + \varepsilon_{ik} = b\frac{K^2 - LK}{K^2 + L^2} \quad (6.5.31)$$

It then follows that elasticity of the output for capital may also be negative if the numerator (6.5.31) is negative – for labour intensive processes. However, with the increasing capital resource and stable labour resource the elasticity of the output for capital becomes positive. Similarly, we can calculate the first derivative of the exponential production function for labour and determine on its bases the formula for calculation of the elasticity of the complex production result for this resource. If we omit the calculations similar to those above-mentioned, we will have the following resulting formula:

$$\varepsilon_L = \frac{\partial(G+iC)}{\partial L}\frac{L}{G+iC} = b(\frac{L^2}{K^2+L^2} + i\frac{LK}{K^2+L^2}) \quad (6.5.32)$$

The complex elasticity coefficient may be given economic interpretation. Since it is complex, it is more convenient to consider its real and imaginary parts:

$$\varepsilon_L = \varepsilon_{GL} + i\varepsilon_{CL} \quad (6.5.33)$$

The real part of the complex elasticity of the complex production result for labour, which shows labour contribution in the change of the gross margin is:

$$\varepsilon_{GL} = b\frac{L^2}{K^2+L^2} = \varepsilon\frac{L^2}{K^2+L^2} \quad (6.5.34)$$

Elasticity of the gross margin for labour is always positive and always lower than the total elasticity ε, since the fraction of the expression (6.5.34) is always lower than one. Positive character of the gross margin elasticity coefficient for labour means that this function may be used when growth of labour resources leads to growth of the gross margin.

The imaginary component of complex elasticity of the production result for labour (6.5.32), which shows influence of labour on the production costs looks like the following:

$$\varepsilon_{CL} = b\frac{LK}{K^2+L^2} \quad (6.5.35)$$

Since all the components of this part of the elasticity coefficient are positive, it is evident that growth of labour resources will inevitably lead to growth of the production costs. This also corresponds exactly to the real production situation – involvement of additional human resources or growth of payment costs to stimulate the employed personnel will increase the total production costs.

Now, it is necessary to consider contribution of the labour resource in the change of production on the whole, i.e. in the change of the output volume. For that let us sum up the two parts of the coefficient (6.5.32) and evaluate the contribution of the labour resource in the combined growth of both gross margin and production costs, with the assumption that the variables are properly scaled:

$$\varepsilon_{QL} = \varepsilon_{GL} + \varepsilon_{CL} = b\frac{L(L+K)}{K^2+L^2} \quad (6.5.36)$$

This means that growth of labour resources per one per cent increases the production volume by the above mentioned value.

If now we consider the complex elasticity of the production result for labour (6.5.32) in exponential form, the module of this complex value will be:

$$R_{\varepsilon L} = bL \quad (6.5.37)$$

And the polar angle:

$$\varphi_{\varepsilon K} = arctg\frac{K}{L} \quad (6.5.38).$$

In the conclusion to our study of elasticity of the exponential production function of complex variable with real coefficients we should mention one more important property of complex coefficients of elasticity of the production result for resources. If we sum up elasticity for capital (6.5.24) and elasticity for labour (6.5.32), we will obtain the total elasticity (6.5.19):

$$\varepsilon = \varepsilon_K + \varepsilon_L = b(\frac{K^2}{K^2+L^2} - i\frac{LK}{K^2+L^2}) + b(\frac{L^2}{K^2+L^2} + i\frac{LK}{K^2+L^2}) = b\,.$$

The result that we obtain on the basis of this chapter means that the exponential complex production function with real coefficients possesses much more extensive analytical capacities for studying production processes than the production functions with real variables. If a similar model of exponential production function with real coefficients has only two elasticity coefficients, being exponents of resource indices, the complex model allows for the following calculations:

- total elasticity (6.5.19);
- complex elasticity of the production result for capital (6.5.25), which consists of two real elasticity coefficients (6.5.26) and (6.5.28);
- elasticity of the output *Q* for capital (6.5.31);
- complex elasticity of the production result for labour (6.5.32) with two components (6.5.34) and (6.5.35);
- output elasticity *Q* for labour (6.5.39).

Totally there are seven different elasticity coefficients showing the most various influences of the two resources on the complex production result and the gross output.

Let us show a possibility of calculating the above-mentioned elasticity coefficients of the complex production function with real coefficients for real data. Here we are going to use previously mentioned data on the Russian economy from 1998 to 2008. The results of calculation of the coefficients are given in table 5.11.

Table 6.11

Elasticity coefficients of complex production function for the economy of Russia

Year	$b=\varepsilon$	ε_{GK}	ε_{CK}	ε_{GL}	ε_{CL}	ε_{K}	ε_{L}
1998	12,674	12,574	-1,124	0,018	1,124	11,449	1,225
1999	8,114	7,968	-1,081	0,068	1,081	6,886	1,228
2000	6,264	6,074	-1,074	0,205	1,074	4,999	1,264
2001	6,088	5,875	-1,118	0,365	1,118	4,757	1,331
2002	5,758	5,520	-1,146	0,674	1,146	4,375	1,384
2003	5,789	5,555	-1,141	1,009	1,141	4,414	1,375
2004	4,922	4,652	-1,120	1,910	1,120	3,532	1,390
2005	4,842	4,565	-1,123	2,822	1,123	3,442	1,400
2006	4,472	4,167	-1,129	4,893	1,129	3,038	1,435
2007	4,397	4,080	-1,137	8,101	1,137	2,943	1,454
2008	4,255	3,927	-1,135	12,821	1,135	2,792	1,463

The obtained elasticity values show the following specifics of the development of the Russian economy for the period under consideration.

First of all, it should be noted that in 1998 Russia experienced d default which resulted in ruble depreciation, crucial price reduction for home made goods, considerable growth of the demand for them, essential recovery of production and the economy in general. This is why the data for 1998 and 1999 are so different from the data for the subsequent years.

The 90-ies of the XX-th century are characterized by a sharp drop of the production volumes. Labour and capital resources were underloaded, basic production assets were mostly “frozen”, earnings of the residents were extremely low. This is why involvement of additional capital resources in the economy after the default of 1998, growth of material incentives resulted in a considerable increase of both production volumes and gross margin and production costs. This is reflected in all the elasticity values.

It should be noted that investments in the basic capital aimed at production recovery but not modernization. For Russian entrepreneurs investments in implementation of innovations were senseless with no competition among the national producers and high competitiveness of Russian products in price compared to the exported ones

These specifics of the economic growth after the default of 1998 are reflected in the dynamics of the elasticity coefficients. It is evident from table 5.11 that influence of capital on the reduction of production costs is quite low – elasticity coefficient $\varepsilon_{CK,}$ reflecting it, ddoes not demonstrate any pronounced dynamics, efficiency of capital in GDP growth reflected by output elasticity for capital ε_K decreasing. Investments in basic capital of the Russian economy which in 1998 and 1999 led to high results in getting the gross margin, shown by elasticity values ε_{GK} for these years start playing less important role in the Russian economy.

Since at that time elasticity coefficient of the gross margin for labour ε_{GL} increases considerably, basic contribution of labour resources in the growth of the efficiency of the state economy becomes evident. It should also be noted that GDP elasticity for labour ε_L grows but not as fast as that of the gross margin for labour ε_{GL}. This means that labour productivity for the Russian economy in general in this period of time increases but the rates of this increase are not significant.

We do not intend here to make a thorough analysis of the economic situation of the economy of Russia. Calculation of elasticity coefficients with the example of Russian economy aims at demonstrating a possibility of such calculations of and interpretation of the values of elasticity coefficients.

6.6. Степенная производственная функция комплексных переменных с комплексными коэффициентами

Степенная производственная функция комплексного переменного с действительными коэффициентами, как было показано в предыдущих параграфах, обладает замечательными свойствами соответствия реальным производственным процессам. Её семь коэффициентов эластичности существенно расширяют аналитический инструментарий экономиста. Но всё многообразие производств, наблюдаемое в экономике, не может быть описано только одной этой степенной функцией. Реальная действительность значительно богаче и многообразнее, и это многообразие только частично описывается степенной моделью комплексной переменной с действительными коэффициентами. Как следует из выводов предыдущего параграфа, эта модель описывает процессы и с возрастающей отдачей ресурсов, и с убывающей отдачей ресурсов, и с постоянной их отдачей. Но ведь встречаются ситуации кризисного производства или цикличного производства и др. Поэтому, несмотря на то, что модель (6.3.2) во многом является универсальной, но она не всегда может давать лучшие результаты моделирования производства.

Модель с действительными коэффициентами (6.3.2) является одной из самых простых в классе степенных производственных функций комплексных переменных. Наиболее общей в этом классе возможных степенных производственных функций комплексных переменных является функция с комплексными переменными (6.3.1):

$$G+iC=\left(a_0+ia_1\right)\left(K+iL\right)^{\left(b_0+ib_1\right)}. \qquad (6.6.1)$$

Из этой, наиболее общей функции, варьируя составом четырёх коэффициентов, можно выделить самые разнообразные подвиды, одним из которых является степенная производственная комплекснозначная функция с действительными коэффициентами (если мнимые части комплексных коэффициентов равны нулю), а другим – линейная функция комплексных переменных (когда показатель степени равен действительному числу – единице).

Моделируемые производственные процессы многообразны, поэтому можно предполагать, что в различных случаях наилучшим может быть один из подвидов степенных функций. В этой связи возникает вопрос: как в каждом конкретном случае выбрать из указанного многообразия производственных функций одну, наилучшую? Для этого мы рекомендуем следующую процедуру. С помощью МНК находятся параметры общей степенной функции с комплексным коэффициентом пропорциональности и комплексным показателем степени (6.6.1). Исходя из того, чему равны найденные с помощью МНК коэффициенты a_0, a_1, b_0 и b_1, исследователь может выбирать, какую производственную функцию ему использовать при моделировании. Например, если $b_1 \to 0$ и $a_1 \to 0$, то, исходя из принципа простоты, в моделировании стоит использовать степенную производственную функцию комплексного переменного с вещественными коэффициентами вида:

$$G + iC = a_0\left(K + iL\right)^{b_0}.$$

Если значения коэффициентов степени близки к нулю, стоит использовать простую линейную функцию комплексных переменных:

$$G + iC = \left(a_0 + ia_1\right)\left(K + iL\right).$$

По приведённым выше статистическим данным можно построить, например, степенную производственную функцию с комплексными коэффициентами для Диатомового комбината. Расчёты придают ей следующий вид:

$$G + iC = (0{,}534 + i0{,}363)(K + iL)^{0{,}459 - i0.355}.$$

Как видно, все составляющие комплексных коэффициентов у этой функции (и действительные, и мнимые части) имеют значительные величины, поэтому для целей аппроксимации и экономического анализа другие, более упрощённые модели использовать не стоит. Следует отметить, что эта модель неплохо аппроксимирует реальные данные (средняя ошибка аппроксимации 20%) с учётом того, что инвестиции K в основной капитал Диатомового комбината за рассматриваемый промежуток времени меняются ступенчато, а их последствия пролонгированы во времени, что не может не снижать точности описания промышленной динамики любыми моделями.

Несколько иначе обстоит дело со степенной производственной функцией с комплексными коэффициентами для промышленного производства России. МНК позволил получить по имеющимся статистическим данным модель такого вида:

$$G + iC = \left(1{,}732 - i0{,}213\right)\left(K + iL\right)^{0{,}896 + i0{,}351}$$

Здесь мнимая составляющая коэффициента пропорциональности мала и более близка к нулю по сравнению с величиной её вещественной части. Действительно, мнимая часть комплексного коэффициента пропорциональности, равная (-0,213) по модулю в восемь раз меньше, чем действительная часть этого коэффициента (1,732). Эта модель хорошо аппроксимирует реальные данные - средняя ошибка аппроксимации производственного результата составила (4,6%). Но для упрощённых расчётов, в силу малости значений a_1, можно использовать для описания промышленного производства России модель следующего вида:

$$G+iC=a\left(K+iL\right)^{b_0+ib_1}$$

Таким образом, расчеты по статистическим данным, проведённые в соответствии с предложенными подходами, даёт возможность выбора степенных производственных функций с разными коэффициентами – комплексными или действительными для того, чтобы в каждом случае использовать модель адекватной сложности.

Поскольку степенные комплекснозначные функции с комплексными коэффициентами могут оказаться наилучшими для моделирования каких-нибудь производственных процессов, то следует более тщательно изучить её свойства, для чего выделим из равенства (6.6.1) действительную и мнимую части:

$$G=f\left(K,L\right),$$

$$C=g\left(K,L\right)$$

В формуле (6.6.1) комплексную переменную $\left(K+iL\right)^{(b_0+ib_1)}$ можно представить в виде: $e^{(b_0+ib_1)\ln(K+iL)}$. Теперь формула (6.6.1) примет вид:

$$G+iC=\left(a_0+ia_1\right)e^{b_0\ln\left(K+iL\right)+ib_1\ln\left(K+iL\right)}. \qquad (6.6.2)$$

Сумму произведений в степени можно преобразовать с учётом свойств логарифмов комплексных чисел, используя их главные значения:

$$G+iC=\left(a_0+ia_1\right)e^{b_0\ln\left(\sqrt{K^2+L^2}\right)+ib_0\operatorname{arctg}\left(\frac{L}{K}\right)+ib_1\ln\left(\sqrt{K^2+L^2}\right)-b_1\operatorname{arctg}\left(\frac{L}{K}\right)}. \qquad (6.6.3)$$

Теперь, группируя действительную и мнимую части степени комплексной переменной, можно получить удобную для дальнейшего исследования формулу:

$$G+iC=\left(a_0+ia_1\right)e^{b_0\ln\left(\sqrt{K^2+L^2}\right)-b_1\operatorname{arctg}\left(\frac{L}{K}\right)}e^{i\left(b_0\operatorname{arctg}\left(\frac{L}{K}\right)+b_1\ln\left(\sqrt{K^2+L^2}\right)\right)}, \qquad (6.6.4)$$

в правой части которой перемножаются комплексный коэффициент $\left(a_0+ia_1\right)$ и комплексная переменная, обозначаемая для простоты записи как $Re^{i\varphi}$. То есть:

$$G+iC=\left(a_0+ia_1\right)Re^{i\varphi}, \qquad (6.6.5)$$

где:

$$R=e^{b_0\ln\left(\sqrt{K^2+L^2}\right)-b_1\operatorname{arctg}\left(\frac{L}{K}\right)}, \qquad (6.6.6)$$

$$\varphi=b_0\operatorname{arctg}\left(\frac{L}{K}\right)+b_1\ln\left(\sqrt{K^2+L^2}\right). \qquad (6.6.8)$$

Теперь, если представить модель (6.6.5) в тригонометрической форме и раскрыть скобки, после группировки действительной и мнимой частей, получим:

$$G+iC=R\left(\left(a_0\cos\varphi-a_1\sin\varphi\right)+i\left(a_0\sin\varphi+a_1\cos\varphi\right)\right). \qquad (6.6.9)$$

Что означает выполнение двух равенств:

$$G = R\left(a_0 \cos\varphi - a_1 \sin\varphi\right), \tag{6.6.10}$$

$$C = R\left(a_0 \sin\varphi + a_1 \cos\varphi\right). \tag{6.6.11}$$

Таким образом, для вычисления прибыли G и издержек производства C исследователю достаточно воспользоваться формулами (6.6.10) и (6.6.11).

По экономическому смыслу рассматриваемой задачи, издержки производства не могут быть отрицательными, а прибыль – может (работа в убыток).

Это означает, что (6.6.11) накладывает ограничения на пределы изменения коэффициентов комплексного коэффициента пропорциональности:

$$a_0 \sin\varphi + a_1 \cos\varphi > 0 \rightarrow tg\varphi > -\frac{a_1}{a_0}, \tag{6.6.12}$$

где φ вычисляется из (6.6.8).

Нахождение коэффициентов функции (6.6.1) – простая задача, о способах решения которой с помощью МНК говорилось в четвёртой главе монографии.

Приведём без доказательства (в силу значительной громоздкости вывода) следующее утверждение: коэффициент эластичности степенной комплекснозначной производственной функции с комплексными коэффициентами равен показателю степени этой функции:

$$\varepsilon = b_0 + ib_1. \tag{6.6.13}$$

Из (6.5.1) следует:

$$\Delta y = \varepsilon_{yx} y \frac{\Delta x}{x} . \tag{6.6.14}$$

Или:

$$\Delta(G + iC) = (b_0 + ib_1)(G + iC)\frac{\Delta(K + iL)}{K + iL}. \tag{6.6.15}$$

Откуда можно найти ответ на вопрос - какой процесс изменения валовой прибыли и издержек производства при изменении производственных ресурсов на один процент моделирует степенная производственная функция с комплексными коэффициентами:

$$\begin{cases} \Delta G = (b_0 G - b_1 C)\dfrac{\Delta KK + \Delta LL}{K^2 + L^2} + (b_0 C + b_1 G)\dfrac{\Delta KL - \Delta LK}{K^2 + L^2}, \\ \Delta C = (b_0 C + b_1 G)\dfrac{\Delta KK + \Delta LL}{K^2 + L^2} + (b_0 G - b_1 C)\dfrac{(\Delta LK - \Delta KL)}{K^2 + L^2}. \end{cases} \tag{6.6.16}$$

Как видно из полученных равенств, и валовая прибыль, и издержки производства при различных сочетаниях значений коэффициентов комплексного показателя степени, ресурсов и результатов могут как уменьшаться с ростом ресурсов, так и увеличиваться. В отличие от степенной функции с действительными коэффициентами, коэффициент эластичности функции с комплексным показателем степени мало что говорит о направлении изменения комплексного результата при увеличении производственных ресурсов на один процент. Всё определяется как сочетанием значений действительной и мнимой части комплексного показателя степени, так и величинами ресурсов и результатов.

Но поскольку это различное сочетание позволяет моделировать многообразные производственные процессы, то всё это говорит о том, что у степенной комплекснозначной функции с комплексными коэффициентами довольно высокие идентификационые свойства. Она описывает разнообразные производственные процессы – от эффективных, до убыточных; от процессов с возрастающей отдачей ресурсов, до процессов с убывающей отдачей ресурсов.

Если на практике требуется провести расчёты объёмов производства, а не прибыли и издержек организации, можно, помня, что при правильном масштабировании $Q = C + G$, вывести формулу нахождения объёма выпуска организации для данной производственной функции. Складывая для этой цели (6.6.7) и (6.6.8), получим:

$$Q = G + C = R\left(a_0\cos\varphi - a_1\sin\varphi\right) + R\left(a_0\sin\varphi + a_1\cos\varphi\right),$$

или, что то же самое:

$$Q = R\left(\left(a_0 - a_1\right)\sin\varphi + \left(a_0 + a_1\right)\cos\varphi\right). \qquad (6.6.17)$$

Эта функция будет иметь иные коэффициенты эластичности, чем те, которые вычислялись в предыдущем параграфе для степенной комплекснозначной модели с действительными коэффициентами. Поскольку они не имеют такой же ясный смысл, как те, что рассматривались в предыдущем параграфе, то их вычисление здесь не является уместным.

Всё, сказанное выше, показывает, что степенная комплекснозначная производственная функция с комплексными коэффициентами может выступать мощным инструментам анализа и моделирования производственных процессов.

6.7. Логарифмическая производственная функция комплексных переменных

В теории производственных функций из всего множества нелинейных моделей экономисты не случайно отдают предпочтение именно степенным моделям – они удобны в использовании и имеют простую экономическую интерпретацию. То же самое можно сказать и о производственных функциях комплексных переменных: степенные функции и удобны в использовании, и имеют простую интерпретацию своих параметров. Тем не менее, в реальной экономике возможны самые разные ситуации, когда и эти модели будут плохо аппроксимировать реальное производство. В таком случае необходимо будет использовать производственные функции иной формы. Одна из таких альтернативных моделей – это модель логарифмической производственной функции комплексных переменных. Рассмотрим в этом параграфе её свойства и особенности практического применения.

В общем виде производственная логарифмическая функция комплексных переменных может быть записана так:

$$G_t + iC_t = (a_0 + ia_1) + (b_0 + ib_1)\ln(K_t + iL_t). \qquad (6.7.1)$$

Свободный член этого равенства имеет простой смысл – он корректирует начальные условия модели к реальным значениям переменных. На этом его вклад в моделирование производственной ситуации и заканчивается. Поэтому рассмотрим без ущерба для общности модель без свободного члена:

$$G_t + iC_t = (b_0 + ib_1)\ln(K_t + iL_t). \qquad (6.7.2)$$

Свойства этой модели раскрываются полно, если привести логарифм комплексной переменной к арифметической форме и перемножить полученное значение на комплексный коэффициент пропорциональности:

$$G_t + iC_t = (b_0 + ib_1)(\ln\sqrt{K_t^2 + L_t^2} + iarctg\frac{L_t}{K_t}).$$

В результате будет получена такая форма записи:

$$G_t + iC_t = (b_0 \ln\sqrt{K_t^2 + L_t^2} - b_1 arctg\frac{L_t}{K_t}) + i(b_1 \ln\sqrt{K_t^2 + L_t^2} + b_0 arctg\frac{L_t}{K_t}), \qquad (6.7.3)$$

откуда легко получаются два равенства, характеризующие вещественные и мнимые части модели:

$$\begin{cases} G_t = b_0 \ln\sqrt{K_t^2 + L_t^2} - b_1 arctg\dfrac{L_t}{K_t}, \\ C_t = b_1 \ln\sqrt{K_t^2 + L_t^2} + b_0 arctg\dfrac{L_t}{K_t}. \end{cases} \qquad (6.7.4)$$

При положительных значениях коэффициентов с ростом трудовых затрат растут издержки производства, а валовая прибыль в зависимости от значений коэффициентов и масштаба переменных может также расти, но значительно меньше, чем издержки. Но возможен и другой вариант поведения этой функции в данных условиях, когда коэффициент $b_0 << b_1$ – тогда с ростом трудовых ресурсов валовая прибыль снижается.

При росте капитальных ресурсов и положительности коэффициентов модели растут и валовая прибыль, и издержки производства.

Но возможна ситуация, когда коэффициенты модели принимают и отрицательные значения. Например, при отрицательности коэффициента b_1 валовая прибыль будет расти, если наблюдается рост трудовых ресурсов, а влияние капитала неоднозначно – может вести к росту валовой прибыли, а может вести и к падению её значений. При этом также неоднозначно начинают вести себя издержки производства – с ростом затрат трудовых ресурсов они могут и увеличиваться, и уменьшаться. А вот рост капитальных ресурсов однозначно ведёт к снижению издержек производства.

Из чего следует вывод о том, что логарифмическая функция комплексных переменных может быть пригодна для описания нескольких различных производственных ситуаций.

Поскольку модель (6.7.2) имеет всего два коэффициента, то применительно к комплекснозначным функциям это означает возможность оценки их значений на одном статистическом наблюдении. Действительно, из (6.7.2) со всей очевидностью следует, что:

$$b_0 + ib_1 = \frac{G_t + iC_t}{\ln(K_t + iL_t)} = \frac{G_t + iC_t}{\ln\sqrt{K_t^2 + L_t^2} + iarctg\frac{L_t}{K_t}}. \quad (6.7.5)$$

Умножив числитель и знаменатель правой части равенства на величину, сопряжённую знаменателю, получим:

$$b_0 + ib_1 = \frac{G_t \ln\sqrt{K_t^2 + L_t^2} + C_t arctg\frac{L_t}{K_t} + i(C_t \ln\sqrt{K_t^2 + L_t^2} - G_t arctg\frac{L_t}{K_t})}{\ln^2\sqrt{K_t^2 + L_t^2} + arctg^2\frac{L_t}{K_t}}. \quad (6.7.6)$$

Поскольку левые и правые части комплексного равенства означает одновременное равенство друг другу вещественных и мнимых составляющих, получим формулы для вычисления каждого из коэффициентов на наблюдении t:

$$b_0 = \frac{G_t \ln\sqrt{K_t^2 + L_t^2} + C_t arctg\frac{L_t}{K_t}}{\ln^2\sqrt{K_t^2 + L_t^2} + arctg^2\frac{L_t}{K_t}},$$

$$b_1 = \frac{C_t \ln\sqrt{K_t^2 + L_t^2} - G_t arctg\frac{L_t}{K_t}}{\ln^2\sqrt{K_t^2 + L_t^2} + arctg^2\frac{L_t}{K_t}}. \quad (6.7.7)$$

Используя ранее приведённые статистические данные по Диатомовому комбинату г.Инзы, рассчитаем эти изменяющиеся во времени коэффициенты для логарифмической производственной функции комплексных переменных этого комбината. Предварительно для нивелирования влияния масштаба проведём центрирование относительно средних арифметических производственных результатов и логарифмов комплексного ресурса, что следует из (6.7.2). Результаты расчётов приведены в табл. 6.12.

Анализ динамики коэффициентов показывает, что оба эти коэффициенты имеют незначительную тенденцию к росту своих значения во времени. Динамика коэффициента b_0 может быть описана линейным трендом, уравнение которого легко находится с помощью МНК:

$$b_{0t} = 0{,}1051t - 0{,}8496.$$

Другой коэффициент b_1 имеет менее выраженную тенденцию роста. Тем не менее она также может быть представлена в виде тренда линейной формы. МНК позволяет найти оценки и этого тренда:

$$b_{1t} = 0,0044t + 0,6521.$$

Коэффициент пропорциональности последнего тренда очень близок к нулю, что отражает то, что динамика изменения мнимой составляющей b_1 комплексного коэффициента регрессии незначительна, поэтому можно считать этот коэффициент примерно постоянным.

Табл. 6.12

Коэффициенты логарифмической производственной функции комплексных переменных Диатомового комбината г.Инзы

t	b_0	b_1
1	-0,09084	-0,22095
2	-0,3334	-1,05475
3	-0,99276	3,642535
4	0,125047	0,568678
5	0,14192	3,308633
6	-3,03984	0,386848
7	-0,19265	-0,67284
8	1,018661	-0,58261
9	-0,32793	-1,0547
10	0,084627	0,177843
11	1,197226	2,964839

Следовательно, сама логарифмическая комплекснозначная модель (7.5.2) непосредственно для моделирования производства данного комбината не пригодна, на что указывает систематическое изменение одного из коэффициентов модели, но вполне для целей прогнозирования или многовариантного моделирования может быть использована с использование полученных трендов. С учётом линейного изменения во времени одного из коэффициентов логарифмическая комплекснозначная модель производства Диатомового комбината будет иметь вид:

$$G_t + iC_t = (0,1051t - 0,8496 + i0,6521)\ln(K_t + iL_t)$$

Теперь, задавая различные варианты экономического развития ресурсов комбината можно получать и различные варианты комплексного производственного результата.

Аналогичным образом были вычислены коэффициенты этой модели применительно к статистическим данным промышленного производства России. Для того, чтобы избежать необходимости вычисления свободного члена валовая прибыль и затраты на производство были центрированы относительно их средних арифметических. Точно также были центрированы главные значения логарифмов. Динамика изменения коэффициентов приведена в табл. 6.13, из которой наглядно видно, что их вариация существенна, некоторой явно выраженной тенденции коэффициентов не прослеживается, что свидетельствует о невозможности использования логарифмической модели применительно к этому случаю.

Если степенная комплекснозначная функция с комплексными коэффициентами может быть применима практически к каждому производственному процессу с той или иной степенью точности, то логарифмическая функция, как это видно из приведённого примера, более «капризна» и не столь универсальна.

Табл. 6.13

Коэффициенты логарифмической производственной функции комплексных переменных промышленности России

t	b_0	b_1
1998	2,150242	3,502649
1999	1,284403	3,327341
2000	-0,34767	9,019879
2001	0,783986	-0,1516
2002	-1,11559	1,390457
2003	0,08035	3,233731
2004	4,527272	5,703955

Удачным следует признать применение логарифмической производственной функции комплексных переменных на примере одного из предприятий Санкт-Петербурга – «СПб ЗПС». Сам пример был подобран, а вычисления были выполнены Д.Духаниной. Поскольку предприятие работает в условиях нестабильной конъюнктуры, а его производственный цикл довольно значительный, то результаты производственной деятельности по месяцам, а именно эти данные приведены в табл. 6.14, являются нестабильными. Предприятие является малым производством, что отражается и в незначительной вариации ресурсов.

Д.Духанина привела эти данные к безразмерной величине и центрировала их относительно средних арифметических, после чего вычислила динамику каждого коэффициента комплекснозначной логарифмической производственной функции.

Из этой таблицы заметно, что комплексный коэффициент пропорциональности меняется от наблюдения к наблюдению, но это изменение в отличие от рассмотренного выше случая с Диатомовым комбинатом не носит характер некоторой явно выраженной тенденции. Эти изменения в целом не значительны и характеризуют отклонения относительно некоторых средних значений. Исключение составляют последние три наблюдения, для которых вычисленные коэффициенты существенно отличаются от всего ряда.

Поэтому на имеющемся множестве производственных результатов комплекснозначная логарифмическая модель производственной функции будет удовлетворительно описывать производственный процесс. Отклонения по последним трём наблюдениям характеризуют либо влияние случайных факторов, либо о наличии некоторых изменений в тенденциях развития. Поскольку нашей задачей не является тщательное изучение ситуации на этом малом предприятии, удовольствуемся лишь формальной частью – изучением возможности моделирования производства с помощью исследуемой модели.

Табл. 6.14

Помесячные данные о производственной деятельности СПб ЗПС за 2005-2007 гг. и коэффициенты модели

Время,	Доход	Прибыль	Затраты	ОПФ	Коэффициенты модели (6.7.2)	
t	Q	G	C	K	b_0	b_1
1	2231714	-30930	2262644	3775895	0,0541	0,0301
2	2015300	-147251	2162551	3746729	0,0711	0,0329
3	1769635	-29932	1799567	3756818	0,0417	0,0190
4	8539410	-919909	9459319	3756818	0,2092	0,0683
5	3670696	-441546	4112242	3727652	0,0920	0,0170
6	2884686	-101970	2986656	3698485	0,0381	-0,0090
7	3004009	-105777	3109786	3669318	0,0378	-0,0099
8	4024720	29734	3994986	3640152	0,0165	-0,0048
9	2098340	146384	1951956	3610985	-0,0010	0,0000
10	5340695	580477	4760218	3581818	-0,0429	0,0025
11	1709550	351809	1357741	3552652	-0,0324	-0,0136
12	2923416	131948	2791468	3523485	0,0006	-0,0003
13	3247150	-60978	3308128	3494318	0,0404	-0,0237
14	4750283	56260	4694023	3465152	0,0197	-0,0130
15	1838114	223327	1614787	3508333	-0,0164	0,0090
16	8742325	783340	7958985	3479167	-0,1553	0,1147
17	7783112	887750	6895362	3450000	-0,2038	0,1420
18	1748450	437723	1310727	3420833	-0,1285	0,1000
19	4445690	94670	4351020	3391667	0,0234	-0,0194
20	2935020	366858	2568162	3362500	-0,1771	0,1582
21	1865884	455873	1410011	3333333	0,3221	-0,3457
22	534629	-671575	1206204	3304167	-0,4863	0,5474
23	4858625	1121220	3737405	3275000	0,4300	-0,5057

Для построения модели на имеющихся статистических данных, можно использовать значения табл. 6.14. Д.Духанина с помощью МНК оценила коэффициенты комплекснозначной логарифмической модели производственной функции. Эта модель имеет вид:

$$G_t + iC_t = (0,0909 - i0,1715) + (0,0436 - i0,0389)(K_t + iL_t). \qquad (6.7.8)$$

Для того чтобы сделать вывод о пригодности рассматриваемой модели к моделированию производства, сравним свойства этой модели со свойствами других моделей действительных переменных. Д.Духанина нашла с помощью МНК на этих же данных коэффициенты производственной функции Кобба-Дугласа, которая имеет вид:

$$Q_t = 1,2603 K_t^{0,3326} L_t^{0,6674}. \qquad (6.7.9)$$

Теперь можно провести сравнительный анализ пригодности моделей для описания производственного процесса.

Логарифмическая производственная функция позволяет вычислить как валовую прибыль, так и издержки производства. Ошибка аппроксимации валовой прибыли составила G = 58,07%. Из табл. 6.14 видно, что прибыль подвержена высокой дисперсии, поэтому такая ошибка аппроксимации не должная вводить в заблуждение. Значительно точнее модель описывает динамику издержек производства. Средняя ошибка аппроксимации этого показателя по исходному ряду составила C = 8,2%.

Поскольку сумма валовой прибыли и издержек производства даёт величину выпуска, то с помощью логарифмической производственной функции комплексных переменных можно аппроксимировать и этот показатель. Средняя ошибка аппроксимации выпуска Q составила 33,14%.

Если использовать для целей моделирования функцию Кобба-Дугласа, то средняя ошибка аппроксимации по выпуску Q для функции Кобба-Дугласа равна 62,49%, что почти в два раза больше ошибки аппроксимации комплекснозначной модели.

Опять-таки, мы не будем здесь останавливаться на вопросе выбора лучшей модели для описания данного производственного процесса. Нам это не интересно. Важно, что из приведённого примера следует вывод о том, что для некоторых производственных процессов логарифмическая комплекснозначная функция может быть с успехом применена.

Мы не будем вычислять коэффициенты эластичности логарифмической комплекснозначной производственной функции, поскольку они не имеют такой простой вид и такую яркую экономическую интерпретацию, как в случае со степенной производственной функцией с действительными коэффициентами. А раз так, то коэффициент эластичности не даст ничего нового для понимания свойств этой модели.

6.8. Показательная производственная функция комплексных переменных

Завершая рассмотрение элементарных комплекснозначных функций, которые могут использоваться как модели производственных функций, обратим внимание на свойства и особенности применения показательной производственной функции. Эта функция может иметь самые различные основания при показателе степени, но свойства функции при этом не меняются. Меняется лишь степень сложности использования каждой модели. Очевидно, что меньше всего хлопот доставит показательная функция, основанием которой выступает число e – ведь практически всегда мы использовали экспоненциальную форму записи комплексных перемененных для того, чтобы понять свойства модели. Поэтому без особого ущерба для общности постановки задачи будем рассматривать как пример показательной функции модель экспоненциальной комплекснозначной функции. Эта модель в общем виде будет записана так:

$$G_t + iC_t = (a_0 + ia_1)e^{(b_0+ib_1)(K_t+iL_t)}. \tag{6.8.1}$$

Самый простой вариант этой модели – с действительными коэффициентами, представляет собой довольно простую функцию, не вызывающую особого интереса:

$$G_t + iC_t = a_0 e^{b_0(K_t+iL_t)}. \tag{6.8.2}$$

Действительно, группируя переменные, составляющие модуль и полярный угол правой части равенства, получим:

$$G_t + iC_t = a_0 e^{b_0 K_t} e^{ib_0 L_t}. \tag{6.8.3}$$

Обращаясь теперь к тригонометрической форме записи, получим для вещественной и мнимой частей равенства:

$$\begin{cases} G_t = a_0 e^{b_0 K_t} \cos(b_0 L_t), \\ C_t = a_0 e^{b_0 K_t} \sin(b_0 L_t). \end{cases} \tag{6.8.4}$$

То есть, при положительных значениях коэффициента b_0, с ростом капитала от нулевого значения растёт масштаб производства, а значит, будут расти и валовая прибыль, и издержки производства, причём этот рост будет сохранять пропорции между ними. Иначе говоря, рост объёмов производства сохраняет неизменной рентабельность производства. На реальном производстве это возможно в ситуации, когда фондовооружённость труда мала, и её рост существенно влияет на производительность труда. При этом существует некоторый контроль за ценообразованием.

С ростом же от нуля трудового ресурса увеличивается полярный угол, а масштаб производства меняться не будет, если капитал неизменен. Это означает рост издержек производства и уменьшение валовой прибыли. Нельзя забывать и о том, что периодические функции могут принимать как положительные, так и отрицательные значения. Это говорит о том, что для моделирования производственной ситуации необходимо либо центрировать исходные переменные, тогда они будут принимать и отрицательные, и положительные значения, либо налагать ограничения на коэффициент b_0, исходя из экономического смысла задачи. Вот, пожалуй, и всё, что можно сказать об этой функции.

Если теперь вместо действительного коэффициента пропорциональности в степени рассмотреть ситуацию, когда коэффициент пропорциональности мнимый, т.е. $b_0=1,b_1\neq 0$, то произойдут некоторые в определённой части «симметричные» изменения свойств функции. Производственная функция для этого случая примет вид:

$$G_t + iC_t = a_0 e^{ib_1(K_t + iL_t)}. \tag{6.8.5}$$

Тогда тригонометрическая форма записи этой модели будет такой:

$$\begin{cases} G_t = a_0 e^{-b_1 L_t} \cos(b_1 K_t), \\ C_t = a_0 e^{-b_1 L_t} \sin(b_1 K_t). \end{cases} \tag{6.8.6}$$

Рост трудовых ресурсов неминуемо ведёт к уменьшению масштаба производства (если коэффициент $b_1>0$) и уменьшению значений как валовой прибыли, так и издержек производства. Рост капитала от нулевых значений приводит к снижению валовой прибыли и росту издержек производства. В целом такая модель может описывать кризисное состояние производства, когда для достижения производственного результата необходимо сокращать количество занятых на производстве, и отказываться от непрофильного производства, избавляясь от капиталов в этой части производства.

Понятно, что использование комплексных коэффициентов позволяет синтезировать эти разные свойства в единую сложную производственную зависимость. Для того чтобы понять влияние в модели с комплексными коэффициентами (6.8.1) производственных ресурсов на производственный результат, которые моделирует эта производственная функция, следует в правой части равенства выделить модуль и полярный угол. Для этого необходимо раскрыть скобки в показателе степени, а комплексный коэффициент пропорциональности привести к экспоненциальной форме.

Получим с учётом ранее введенных обозначений:

$$G_t + iC_t = a e^{b_0 K_t - b_1 L_t} e^{i(b_0 L_t + b_1 K_t + \alpha)}. \tag{6.8.7}$$

Теперь легко получить два равенства действительных переменных, которые моделируют вещественную и мнимую часть модели, то есть - описывают влияние производственных ресурсов на валовую прибыль и на издержки производства:

$$\begin{cases} G_t = a e^{b_0 K_t - b_1 L_t} \cos(b_0 L_t + b_1 K_t + \alpha), \\ C_t = a e^{b_0 K_t - b_1 L_t} \sin(b_0 L_t + b_1 K_t + \alpha). \end{cases} \tag{6.8.8}$$

При положительности всех коэффициентов модели она обладает такими свойствами. С ростом капитала растут и валовая прибыль, и издержки производства. Но сам этот рост неодинаковый. Так для валовой прибыли её экспоненциальный рост, вызванный увеличением K_t в показателе степени, в определённой мере нивелируется тем, что косинус полярного угла с ростом капитала уменьшается, и их произведение даёт сложную нелинейную динамику.

Издержки с ростом капитала растут более интенсивно, поскольку экспоненциальному росту с ростом капитала соответствует и рост синуса. Их перемножение даёт соответствующий мультипликативный эффект.

Впрочем, эта общая характеристика корректируется аргументом коэффициента пропорциональности $\alpha = arctg\frac{a_1}{a_0}$. Он характеризует сдвиг по фазе косинусоиды и синусоиды. Этот сдвиг может быть таким, что приведёт и к обратным зависимостям.

Точно такой же сложный характер в данной модели имеет зависимость производственных результатов от трудовых ресурсов. В первом приближении с ростом трудовых ресурсов моделируется снижение валовой прибыли, причём довольно активное – снижению экспоненты в первом равенстве (6.8.8) соответствует и уменьшение косинуса. Их перемножение усиливает тенденцию.

Поведение издержек не столь однозначно – с ростом трудового ресурса уменьшается экспоненциальная составляющая второго равенства (6.8.8), но растёт его гармоническая составляющая – синусоидальная.

И опять-таки, этот сложный характер зависимости в весьма существенной степени корректируется аргументом коэффициента пропорциональности – его разные значения способствуют сдвигу по фазе гармонических сомножителей, и сами эти сомножители могут повести себя противоположно первоначальному представлению.

Поэтому показательная комплекснозначная модель с комплексными коэффициентами способна описать разнообразные производственные типы.

По данным промышленного производства России, которые уже неоднократно использовались в этой главе как основания для проверки свойств производственных функций комплексных переменных, А.М.Чуважов построил показательную модель производственной функции, коэффициенты которой были оценены с помощью МНК. Модель имеет вид:

$$G_t + iC_t = (1,656 + i0,534)e^{(0,265+i0,015)(K_t + iL_t)} \quad (6.8.9)$$

Она описывает исходные данные довольно точно – ошибки аппроксимации прибыли равны 7,06%, а издержек производства – 2,64%. Следовательно, показательная комплекснозначная модель производственной функции имеет право на её включение в арсенал моделей производственных функций, поскольку наверняка встретятся случаи, когда эта модель окажется лучшей из всех возможных.

6.9.Обобщение главы

Если сравнивать модели комплексного аргумента (пятая глава монографии) и модели комплексных переменных, то легко можно убедиться в том, что последние значительно интереснее для исследователя экономики и более универсальны. В этой главе функции комплексной переменной использовались как модели производственных функций и в ряде случаев они демонстрируют своё очевидное преимущество перед моделями действительных переменных. Каждая из функций комплексного переменного, обладая своими оригинальными свойствами, может использоваться как модель производственной функции для самых разных ситуаций. Выбор наилучшей модели из них – дело исследователя, который изучает конкретный производственный процесс.

Принципиально важно то, что модели комплексных переменных, являясь компактными по форме, позволяют моделировать сразу несколько производственных показателей – объём производства, валовую прибыль и издержки производства. Это – очевидное преимущество предлагаемых моделей.

Наиболее интересными свойствами из рассмотренных в данной главе моделей производственных функций обладает степенная комплекснозначная производственная функция с действительными коэффициентами, которая отлично отражает реальные производственные процессы. К тому же, для этой функции легко вычисляются такие важные характеристики, как коэффициенты эластичности – валовой прибыли, издержек производства, объёмов производства по каждому из ресурсов, да и по комплексному ресурсу в том числе. То есть эта функция имеет значительный аналитический потенциал.

Завершая данную главу необходимо отметить ещё одно важное свойство производственных функций комплексной переменной. Модели комплексных переменных, используемые как модели производства, позволяют решать некоторые задачи, постановка которых в области моделей действительных переменных затруднительна. Стандартной является такая постановка задачи – определение объёма выпуска при разных сочетаниях ресурсов. Модели комплексного переменного расширяют эту задачу, поскольку появляется возможность не только вычислять величину выпуска, но и находить при разном сочетании ресурсов значения валовой прибыли и затрат на производство.

В исследовании производственных процессов и планировании производства также иногда стоят более сложные задачи: например, понять, насколько эффективно производство, выяснить каким образом можно получить тот или иной объём производства, как сократить затраты на производстве и каким образом можно получить наибольшую прибыль.

В моделях действительных переменных для решения этой задачи необходимо варьировать ресурсами и вычисляя результаты, находить наилучшее сочетание ресурсов по заданному критерию.

Производственные функции комплексных переменных позволяют решить эти задачи просто с помощью обратной функции. По определению, построение обратной функции – это выведение такой зависимости $x = F^{-1}\left(y\right)$, при которой выполняется: $y = F\left(x\right)$.

Построение обратной функции действительной переменной возможно в случае однофакторной зависимости. А все производственные функции, даже такая простая, как функция Кобба-Дугласа, являются многофакторными и обратную функцию вычислить не возможно.

Применительно к моделям комплексной переменной или комплексного аргумента это довольно простая и выполнимая задача, ведь рассматривается зависимость одной комплексной переменной от другой, то есть - однофакторная зависимость. А, значит, к таким зависимостям можно применить и обратную функцию.

Для производственной функции комплексной переменной

$$G+iC=F\left(K+iL\right), \tag{6.9.1}$$

надо вывести функцию

$$K+iL=F^{-1}\left(G+iC\right). \tag{6.9.2}$$

Подставляя в полученную обратную функцию требуемые значения валовой прибыли и издержек, легко определить – какие капитальные и трудовые ресурсы необходимы ля достижения поставленных значений производственного результата.

Выведем виды обратных функция для рассмотренных выше моделей:

1) степенной,
2) логарифмической,
3) показательной.

Степенная комплекснозначная производственная функция (6.3.1) имеет вид:

$$G_t+iC_t=(a_0+ia_1)(K_t+iL_t)^{b_0+ib_1}.$$

Обратная к ней функция находится так:

$$K+iL=\left(\frac{G+iC}{a_0+ia_1}\right)^{\frac{1}{b_0+ib_1}}. \tag{6.9.3}$$

Логарифмическая комплекснозначная производственная функция (6.7.1) имеет вид:

$$G_t+iC_t=(a_0+ia_1)+(b_0+ib_1)\ln(K_t+iL_t).$$

Обратная функция (6.9.2) к этой будет иметь несколько более сложную форму. В логарифмах она будет записана так:

$$\ln(K_t+iL_t)=\frac{G_t+iC_t-(a_0+ia_1)}{b_0+ib}, \tag{6.9.4}$$

хотя при необходимости она может быть представлена и в таком виде:

$$K_t+iL_t=e^{\frac{G_t+iC_t-(a_0+ia_1)}{b_0+ib}}, \tag{6.9.5}$$

Последняя форма записи позволяет сразу вычислять потребные значения капитала и труда.

Показательная комплекснозначная функция (6.8.1), рассмотренная в последнем параграфе главы, была представлена в такой форме:

$$G_t + iC_t = (a_0 + ia_1)e^{(b_0+ib_1)(K_t+iL_t)}.$$

И с её помощью можно представить обратную функцию:

$$K_t + iL_t = \frac{\ln \dfrac{G_t + iC_t}{a_0 + ia_1}}{b_0 + ib_1}. \qquad (6.9.6)$$

Вычисление ни по одной из этих функций не представляет особых затруднений. Вначале с помощью любого метода эконометрии находятся коэффициенты исходной производственной функции комплексных переменных, после чего они подставляются в соответствующую обратную функцию (6.9.4), (6.9.5) или (6.9.6). Теперь, задавая желаемые величины прибыли, издержек или объёма производства, можно оценить требуемые для этого значения капитальных и трудовых ресурсов.

Можно решать и задачу поддержания одного и того же уровня рентабельности производства, а также другие задачи.

Следует указать и на одно предположение, которого мы априорно придерживались, не озвучивая его. Предложенные производственные функции моделировали издержки производства и прибыль – экономическая интерпретация получаемых результатов как раз и соответствует этим показателям. Но валовая прибыль предприятия или отрасли определяется в рыночной экономике не столько собственными усилиями предприятия и величиной привлекаемых ресурсов – капитала и труда, - сколько конъюнктурой рынка. А она в рассматриваемых моделях не учитывалась, как не учитывается и в моделях действительных переменных. При таком подходе предполагается, что всё, что будет произведено на предприятии, найдёт своего покупателя и будет продано с той рентабельностью, которая моделируется.

Для более тщательных научных исследований необходимо учитывать это обстоятельство.

Однако, не смотря на это, мы убедились на конкретных примерах реально хозяйствующих субъектов, что комплекснозначные производственный функции могут служить эффективным инструментом моделирования и анализа производственных процессов, а потому могут быть включены в арсенал теории производственных функций.