Глава седьмая. Многофакторные комплекснозначные модели экономики

7.1. Общие положения классификационных комплекснозначных моделей

Рассмотренные в предыдущей главе модели производственных функций комплексных переменных, без всякого сомнения, существенно расширяют инструментальную базу теории производственных функций, а в ряде случаев дают более адекватные результаты моделирования, нежели существующие модели действительных переменных. Однако не следует абсолютизировать полученные результаты применения некоторых элементов теории функций комплексного переменного в экономике – комплекснозначная экономика не является альтернативой существующим моделям действительных переменных, она только расширяет арсенал экономико-математических методов и моделей, обогащая экономиста новым инструментом. Производственные функции комплексного аргумента и комплексных переменных обладают наряду с очевидными преимуществами и некоторыми недостатками, ограничивающими область их практического применения. Некоторые из них были показаны в соответствующих главах. Но есть ещё одно обстоятельство, которое можно рассматривать как недостаток тех комплекснозначных производственных функций, которые были рассмотрены выше.

Действительно, производственные функции комплексных переменных (а функции комплексного аргумента можно рассматривать как их упрощённый аналог) в общем виде могут быть записаны так:

$$G_t + iC_t = F(K_t + iL_t). \qquad (7.1.1)$$

Важным преимуществом такой модели по сравнению с моделями действительных переменных является то, что моделируется зависимость сразу двух экономических переменных от двух других переменных. Экономика как раз и отличается от предметов исследования естественных и точных наук тем, что здесь множество переменных определяется действием множества других переменных. В этом смысле модель (7.1.1) в экономике – шаг вперёд по сравнению с моделями действительных переменных. Но если мы попытаемся расширить, например, число производственных ресурсов в функции (7.1.1), то столкнёмся с очень непростой задачей – как это сделать? Ведь комплексная переменная по определению состоит из пары действительных переменных. А если нам необходимо учесть влияние на производство ещё одного ресурса, например, площади земли для сельскохозяйственного производства? Включить её как простую действительную переменную – значит не учесть её влияние на издержки производства, а если отнести её к мнимой части, то исключается тем самым влияние нового ресурса на валовую прибыль. Добавить дополнительную переменную в модель (7.1.1), не прибегая к специальным ухищрениям, довольно сложно. Это – первый существенный недостаток, ограничивающий сферу применения моделей типа (7.1.1).

Второй недостаток вызван необходимостью очень аккуратной работы с размерностью и масштабом каждой из переменных. И если относительно производственного результата можно быть более или менее спокойным, поскольку эти переменные измеряются в одних и тех же единицах и имеют одинаковый масштаб, то вот по отношению к производственным ресурсам оснований для беспокойства более чем достаточно – дело в неоднородности предлагаемых комплекснозначных функций.

Действительно, если взять степенную производственную функцию действительных переменных:

$$Q_t = aK_t^{\alpha} L_t^{\beta}, \qquad (7.1.2)$$

и изменить, например, масштаб капитальных ресурсов с помощью умножения ресурса на множитель λ, то получим:

$$Q_t = a(\lambda K_t)^{\alpha} L_t^{\beta} = a\lambda^{\alpha} K_t^{\alpha} L_t^{\beta}. \qquad (7.1.3)$$

То есть, в результате изменения масштаба переменной изменится только коэффициент пропорциональности – корректировать другие переменные и коэффициенты нет необходимости. Другое дело – комплекснозначные функции. Комплексная переменная ресурсов, представляемая как $(K_t + iL_t)$ при масштабировании какого-либо одного из двух ресурсов существенно меняет саму модель. Например, изменение масштаба переменной капитального ресурса на такой же множитель λ, приводит к существенному изменению самой комплексной переменной, в чём легко убедиться:

$$\lambda K_t + iL_t = \sqrt{(\lambda K_t)^2 + L_t^2}\, e^{iarctg\frac{L_t}{\lambda K_t}}.$$

Это значит, что комплексная переменная производственной функции не является однородной, а это значит, что любая комплекснозначная функция с изменением масштаба одной из переменных изменяет все свои коэффициенты и точность описания исходных переменных.

Рассмотрим для примера степенную производственную функцию с действительными коэффициентами:

$$G_t + iC_t = a(K_t + iL_t)^b. \qquad (7.1.4)$$

Валовая прибыль в этой функции описывается так:

$$G_t = a(\sqrt{K_t^2 + L_t^2})^b \cos(barctg\frac{L_t}{K_t}). \qquad (7.1.5)$$

Если изменить масштаб капитального ресурса в λ раз, то для валовой прибыли получим:

$$G_t = a(\sqrt{\lambda^2 K_t^2 + L_t^2})^b \cos(barctg\frac{L_t}{\lambda K_t}). \qquad (7.1.6)$$

Это значит, что корректировка переменной K_t вызывает неминуемое изменение и коэффициента пропорциональности a, и показателя степени b и точность описания валовой прибыли, значения которой в практических случаях «загрязнено» случайными ошибками. А поскольку в предыдущей главе указывалось на аналитические свойства именно этой модели и на интерпретацию показателя степени b, то становится понятным выдвигавшиеся в той главе требования очень бережного и тщательного отношения к размерности и масштабу переменных производственных функций комплексных переменных.

Итак, две важные проблемы (помимо множества прочих, менее значительных), требуют развития комплекснозначных производственных функций:

1) необходимость включения новых экономических переменных, что невозможно в модели типа (7.1.1),
2) нивелирование влияния изменения масштаба исходных переменных на результаты моделирования.

Прежде, чем показать, как сформировать экономические модели комплексных переменных, свободных от вышеуказанных недостатков, следует обратить внимание на саму суть экономических показателей, которая как нельзя лучше демонстрируется на примере производства.

Все показатели, используемые для моделирования любых экономических процессов, представляют собой результат некоторого агрегирования (и абстрагирования, что само собой разумеется!).

Действительно, валовая прибыль G_t, например, фактически складывается из многих составляющих, совокупность которых можно разделить на две группы – часть прибыли уходит в государственный бюджет в виде налога на прибыль, а другая часть остаётся в распоряжении предприятия.

Издержки же производства C_t также складываются из множества слагаемых, но и они могут быть представимы в виде двух составляющих - постоянные затраты (амортизация, оплата труда ИТР и служащих и т.п.) и переменные затраты (на сырьё и материалы, полуфабрикаты и энергию на производственные нужды и т.п.).

Капитал K_t в любой его форме также представим в виде двух слагаемых – основного и не основного (например, основные и неосновные фонды).

Точно также и трудовые ресурсы L_t складываются из двух больших групп – промышленно-производственный персонал и прочий персонал.

Конечно, и эти классификации можно продолжить, но не в этом дело, а в том, что практически каждый экономический показатель, и не только производственный, может быть представлен как сумма двух слагаемых, которые выступают как результат некоторой классификации. И опять-таки, чаще всего по тем или иным основаниям эти два класса представляют собой активную и пассивную части, каждая из которых по-разному влияет на производство или отражает его.

Действительно, трудовые ресурсы в целом, которые используются в теории производственных функций, и были использованы в предыдущих главах, очень грубо отражают влияние этого ресурса на производственный результат. Ведь увеличение промышленно-производственного персонала влияет на производственный результат совсем иначе, чем увеличение прочего персонала. Их сумма нивелирует это влияние и неминуемо ведёт к ухудшению свойств модели – аналитических и прогнозных.

Точно также и величина активной части основных производственных фондов (станки, механизмы, технологические линии и т.п.) иначе влияет на производственный вариант, чем их пассивная часть (здания, сооружения, подъездные пути и др.).

Поскольку классификация практически каждой экономической переменной предусматривает разделение на активную и пассивную группы, то напрашивается сам собой вывод – представить их в комплекснозначной экономике в виде комплексной переменной, к действительной части которой следует отнести активную часть, а к мнимой – пассивную. Этого правила и будем придерживаться в дальнейшем.

Тогда капитальный ресурс можно записать так:

$$K_0 + iK_1 , \qquad (7.1.7)$$

где K_0 – основные производственные фонды, K_1 – основные непроизводственные фонды.

Трудовой ресурс будем представлять так:

$$L_0 + iL_1 . \qquad (7.1.8)$$

Здесь L_0 – промышленный производственный персонал, а L_1 - непроизводственный персонал.

Выпуск можно представлять как и ранее в виде комплексной переменной, включающей в себя валовую прибыль и издержки производства, а можно представлять и как некоторую классифицированную переменную, например, валовой выпуск (реализованная и нереализованная продукция):

$$Q_0 + iQ_1 . \qquad (7.1.9)$$

При такой постановке моделирования производства легко решается первая проблема – проблема добавления новой переменной. Если возникает необходимость добавить в модель очередной производственный ресурс S, то его можно представить в таком же виде как комплексную переменную, состоящую из активной и пассивной частей:

$$S_0 + iS_1 . \qquad (7.1.10)$$

Например, для моделирования сельскохозяйственного производства земельная площадь может быть представлена как площадь для растениеводства и животноводства и п.т.

С учётом всего этого, общая производственная модель будет иметь такой вид:

$$Q_0 + iQ_1 = F\left[(K_0 + iK_1),(L_0 + iL_1),(S_0 + iS_1)\right]. \qquad (7.1.11)$$

Развивая этот подход на любые экономические модели, не обязательно производственные, в общем виде модели такого типа представим так:

$$y_0 + iy_1 = F(x_{0j} + ix_{1j}) . \qquad (7.1.12)$$

Здесь j – номер экономической переменной, включённой в модель.

Модель (7.1.12) является многофакторной. Поскольку модель (7.1.12) открывает новый класс комплекснозначных моделей, и логика их формирования вытекает из классификации экономических переменных, будем называть модели этого типа – *классификационные модели*.

Классификационные модели свободны и от недостатка неоднородности модели (7.1.1) о котором говорилось ранее. Классификационные переменные по определению имеют одну и ту же размерность, поскольку представляют собой две части одного целого. Поэтому при необходимости масштабирования какой-либо комплексной переменной на коэффициент масштабирования λ умножается и действительная, и мнимая составляющая этой переменной, что означает следующее:

$$\lambda K_{0t} + i\lambda K_{1t} = \lambda\sqrt{K_{ot}^{\ 2} + K_{1t}^2}\, e^{iarctg\frac{K_{1t}}{K_{0t}}} = \lambda(K_{0t} + iK_{1t}).$$

Откуда видно, что эта переменная является однородной первой степени. Однородность или неоднородность модели в таком случае определяется не особенностями комплексных переменных, а особенностями используемых моделей.

В этой главе будут рассматриваться классификационные модели экономики применительно к задачам моделирования производственных процессов.

7.2. Линейная классификационная производственная функция

Вновь рассмотрим производственную функцию, которая описывает поведение комплексного производственного результата, включающего в себя валовую прибыль G_t и издержки производства C_t в зависимости от затрат ресурса капитала и труда. Но в данном случае и капитал, и труд будем представлять как комплексные классификационные переменные (7.1.7) и (7.1.8):

$$K_0 + iK_1,\ L_0 + iL_1.$$

Самым простым случаем производственной классификационной функции будет являться линейная функция:

$$G_t + iC_t = (a_0 + ia_1) + (b_0 + ib_1)(K_{0t} + iK_{1t}) + (c_0 + ic_1)(L_{0t} + iL_{1t}). \qquad (7.2.1)$$

Здесь K_0 – основные производственные фонды, K_1 – основные непроизводственные фонды, L_0 – промышленно производственный персонал, а L_1 - непроизводственный персонал.

Если в этой функции мнимые части комплексных коэффициентов пропорциональности будут равны нулю, то эта функция превращается в систему элементарных многофакторных (двухфакторных) уравнений:

$$\begin{cases} G_t = a_0 + b_0 K_{0t} + c_0 L_{0t,} \\ C_t = a_1 + b_0 K_{1t} + c_0 L_{1t}. \end{cases} \qquad (7.2.2)$$

Не особенно усложнится модель, если нулю будут равны действительные части комплексных коэффициентов пропорциональности:

$$\begin{cases} G_t = a_0 - b_1 K_{1t} - c_1 L_{1t} \\ C_t = a_1 + b_1 K_{0t} + c_1 L_{0t} \end{cases}. \qquad (7.2.3)$$

Поэтому смысл использовать в экономико-математическом моделировании имеет только модель (7.2.1), которая, после выделения действительной и мнимой частей, представляет собой такую систему двух действительных равенств:

$$\begin{cases} G_t = a_0 + b_0 K_{0t} - b_1 K_{1t} + c_0 L_{0t} - c_1 L_{1t}, \\ C_t = a_1 + b_0 K_{1t} + b_1 K_{0t} + c_0 L_{1t} + c_1 L_{0t}. \end{cases} \qquad (7.2.4)$$

Теперь можно дать интерпретацию тем процессам, которые могут быть описаны с помощью комплекснозначной модели типа (7.2.1). Из первого равенства системы (7.2.4) следует, что увеличение основных непроизводственных фондов K_1 и количества непроизводственного персонала L_1 ведёт к уменьшению валовой прибыли, а из второго равенства следует, что рост этих ресурсов ведёт к росту издержек производства. В подавляющем большинстве случаев реальных производств так и происходит – рост непрофильных активов ухудшает производственные показатели, так же как и рост административного аппарата.

Рост основных производственных фондов K_0 и промышленно производственного персонала L_0 ведёт к линейному росту валовой прибыли и издержек производства. Характер этого роста определяется коэффициентами пропорциональности при переменных.

Поскольку модель (7.2.1) может быть представлена в форме действительных переменных (7.2.4), то возникает вопрос: а имеет ли смысл использовать комплекснозначную функцию? Не легче ли использовать две действительные функции (7.2.4)? Ответ на этот вопрос возникает из элементарного сравнения (7.2.1) и (7.2.4). Модель (7.2.1) компактнее в записи и коэффициенты модели (7.2.1) легко найти с помощью МНК. Для этого придётся решить систему шести уравнений с шестью неизвестными:

$$\begin{cases} \sum_t G_t = na_0 + b_0 \sum_t K_{0t} - b_1 \sum_t K_{1t} + c_0 \sum_t L_{0t} - c_1 \sum_t L_{1t}, \\ \sum_t C_t = na_1 + b_1 \sum_t K_{0t} + b_0 \sum_t K_{1t} + c_0 \sum_t L_{1t} + c_1 \sum_t L_{0t}, \\ \sum_t K_{0t} G_t - \sum_t K_{1t} C_t = a_0 \sum_t K_{0t} - a_1 \sum_t K_{1t} + b_0 \sum_t (K_{0t}^2 - K_{1t}^2) - 2b_1 \sum_t K_{0t} K_{1t} + c_0 (\sum_t K_{0t} L_{0t} - \sum_t K_{1t} L_{1t}) - c_1 (\sum_t K_{0t} L_{1t} + \sum_t L_{0t} K_{1t}), \\ \sum_t K_{0t} C_t + \sum_t K_{1t} G_t = a_0 \sum_t K_{1t} + a_1 \sum_t K_{0t} + b_1 \sum_t (K_{0t}^2 - K_{1t}^2) + 2b_0 \sum_t K_{0t} K_{1t} + c_0 (\sum_t K_{0t} L_{1t} - \sum_t K_{1t} L_{0t}) + c_1 (\sum_t K_{0t} L_{0t} + \sum_t L_{1t} K_{1t}), \\ \sum_t L_{0t} G_t - \sum_t L_{1t} C_t = a_0 \sum_t L_{0t} - a_1 \sum_t L_{1t} + b_0 (\sum_t K_{0t} L_{0t} - \sum_t K_{1t} L_{1t}) - b_1 (\sum_t K_{1t} L_{0t} + \sum_t K_{0t} L_{1t}) + c_0 (\sum_t L_{0t}^2 - \sum_t L_{1t}^2) - 2c_1 \sum_t L_{0t} L_{1t}, \\ \sum_t L_{0t} C_t + \sum_t L_{1t} G_t = a_1 \sum_t L_{0t} + a_0 \sum_t L_{1t} + b_0 (\sum_t K_{1t} L_{0t} - \sum_t K_{0t} L_{1t}) + b_1 (\sum_t K_{0t} L_{0t} + \sum_t K_{1t} L_{1t}) + c_1 (\sum_t L_{0t}^2 + \sum_t L_{1t}^2) + 2c_0 \sum_t L_{0t} L_{1t}. \end{cases}$$

Где T – количество наблюдений, $t=1,2,3,\ldots,T$.

В случае модели (7.2.4), которая представляет собой систему из двух действительных уравнений, ситуация значительно сложнее – необходимо с помощью МНК оценить коэффициенты первого уравнения системы, а затем - второго.

МНК применительно к первому равенству системы (7.2.4) приводит к необходимости решения системы таких пяти уравнений:

$$\begin{cases}\sum_t G_t = a_0 T + b_0\sum_t K_{0t} - b_1\sum_t K_{1t} + c_0\sum_t L_{0t} - c_1\sum_t L_{1t},\\ \sum_t G_t K_{0t} = a_0\sum_t K_{0t} + b_0\sum_t K_{0t}^2 - b_1\sum_t K_{0t}K_{1t} + c_0\sum_t K_{0t}L_{0t} - c_1\sum_t K_{0t}L_{1t},\\ \sum_t G_t K_{1t} = a_0\sum_t K_{1t} + b_0\sum_t K_{0t}K_{1t} - b_1\sum_t K_{1t}^2 + c_0\sum_t K_{1t}L_{0t} - c_1\sum_t K_{1t}L_{1t},\\ \sum_t G_t L_{0t} = a_0\sum_t L_{0t} + b_0\sum_t K_{0t}L_{0t} - b_1\sum_t K_{1t}L_{0t} + c_0\sum_t L_{0t}^2 - c_1\sum_t L_{1t}L_{0t},\\ \sum_t G_t L_{1t} = a_0\sum_t L_{1t} + b_0\sum_t K_{0t}L_{1t} - b_1\sum_t K_{1t}L_{1t} + c_0\sum_t L_{0t}L_{1t} - c_1\sum_t L_{1t}^2.\end{cases} \tag{7.2.5}$$

При этом надо быть уверенным в том, что полученные в результате вычислений коэффициенты будут соответствовать тем, которые будут получены при решении другой системы из пяти уравнений МНК, определяемых вторым равенством системы (7.2.4):

$$\begin{cases}\sum_t C_t = a_1 T + b_0\sum_t K_{1t} + b_1\sum_t K_{0t} + c_0\sum_t L_{1t} + c_1\sum_t L_{0t},\\ \sum_t C_t K_{1t} = a_1\sum_t K_{1t} + b_0\sum_t K_{1t}^2 + b_1\sum_t K_{0t}K_{1t} + c_0\sum_t K_{1t}L_{1t} + c_1\sum_t K_{1t}L_{0t},\\ \sum_t C_t K_{0t} = a_1\sum_t K_{0t} + b_0\sum_t K_{0t}K_{1t} + b_1\sum_t K_{0t}^2 + c_0\sum_t K_{0t}L_{1t} + c_1\sum_t K_{0t}L_{0t},\\ \sum_t C_t L_{1t} = a_1\sum_t L_{1t} + b_0\sum_t K_{1t}L_{1t} + b_1\sum_t K_{0t}L_{1t} + c_0\sum_t L_{1t}^2 + c_1\sum_t L_{1t}L_{0t},\\ \sum_t C_t L_{0t} = a_1\sum_t L_{0t} + b_0\sum_t K_{1t}L_{0t} + b_1\sum_t K_{0t}L_{0t} + c_0\sum_t L_{0t}L_{1t} + c_1\sum_t L_{0t}^2.\end{cases} \tag{7.2.6}$$

А такой уверенности быть не может, и более того, коэффициенты, найденные решением системы (7.2.5) будут отличаться от коэффициентов, найденных решением системы уравнений (7.2.6) хотя бы только потому, что все исходные данные представляют собой результат реализации случайного (в лучшем случае) процесса, а значит, они содержат в себе случайные ошибки, которые и приведут к различным значениям коэффициентов.

К тому же из системы (7.2.5) видно, что её решение никак не зависит от изменений издержек производства, а из системы (7.2.6) видно, что её решение никак не зависит от характера изменения валовой прибыли. Иначе говоря - вероятность того, что, решая систему (7.2.5) и систему (7.2.6) будут получены значения коэффициентов, равные друг другу, практически равна нулю. Это значит, что таким образом получить систему (7.2.4) невозможно!

Даже если решить вначале систему (7.2.5) и найти коэффициенты a_0, b_0, b_1, c_0 и c_1, то, подставляя в систему (7.2.6) найденные значения коэффициентов b_0, b_1, c_0 и c_1, получим, что каждое равенство этой системы, от первого до пятого будет давать различные значения коэффициента a_1. Для того чтобы найти баланс, необходимы особые процедуры согласования решений.

Решая систему (7.2.5) получим значения коэффициентов модели:

$$G_t = a_0 + b_0 K_{0t} + b_1 K_{1t} + c_0 L_{0t} + c_1 L_{1t}. \qquad (7.2.7)$$

Решая систему (7.2.6) будут найдены коэффициенты другой модели:

$$C_t = a_1 + d_0 K_{1t} + d_1 K_{0t} + f_0 L_{1t} + f_1 L_{0t}. \qquad (7.2.8)$$

Конечно, их можно синтезировать в модель типа (7.2.1):

$$G_t + iC_t = (a_0 + ia_1) + [b_0 K_{0t} + b_1 K_{1t} + i(d_0 K_{1t} + d_1 K_{0t})] + [c_0 L_{0t} + c_1 L_{1t} + i(f_0 L_{1t} + f_1 L_{0t})], \qquad (7.2.9)$$

но это, как легко заметить, будет совсем другая модель! Можно, конечно, свести активные части ресурсов к действительной части, а пассивные – к мнимой, но и при этом коэффициенты синтезированной модели будут отличаться от коэффициентов модели комплекснозначной. К тому же, громоздкость этой процедуры делает её совершенно бессмысленной!

Поскольку и применительно к этой модели можно прибегнуть к процедуре предварительного центрирования исходных переменных относительно их средних арифметических, то расчёт коэффициентов комплекснозначной модели существенно облегчается. Сама модель, использующая центрированные относительно средних арифметических значения, примет вид:

$$G_t + iC_t = (b_0 + ib_1)(K_{0t} + iK_{1t}) + (c_0 + ic_1)(L_{0t} + iL_{1t}). \qquad (7.2.10)$$

А система нормальных уравнений МНК для центрированных переменных будет содержать четыре уравнения:

$$\begin{cases} \sum_t K_{0t}G_t - \sum_t K_{1t}C_t = b_0 \sum_t (K_{0t}^2 - K_{1t}^2) - 2b_1 \sum_t K_{0t}K_{1t} + c_0(\sum_t K_{0t}L_{0t} - \sum_t K_{1t}L_{1t}) - c_1(\sum_t K_{0t}L_{1t} + \sum_t L_{0t}K_{1t}), \\ \sum_t K_{0t}C_t + \sum_t K_{1t}G_t = b_1 \sum_t (K_{0t}^2 - K_{1t}^2) + 2b_0 \sum_t K_{0t}K_{1t} + c_0(\sum_t K_{0t}L_{1t} - \sum_t K_{1t}L_{0t}) + c_1(\sum_t K_{0t}L_{0t} + \sum_t L_{1t}K_{1t}), \\ \sum_t L_{0t}G_t - \sum_t L_{1t}C_t = b_0(\sum_t K_{0t}L_{0t} - \sum_t K_{1t}L_{1t}) - b_1(\sum_t K_{1t}L_{0t} + \sum_t K_{0t}L_{1t}) + c_0(\sum_t L_{0t}^2 - \sum_t L_{1t}^2) - 2c_1 \sum_t L_{0t}L_{1t}, \\ \sum_t L_{0t}C_t + \sum_t L_{1t}G_t = b_0(\sum_t K_{1t}L_{0t} - \sum_t K_{0t}L_{1t}) + b_1(\sum_t K_{0t}L_{0t} + \sum_t K_{1t}L_{1t}) + c_1(\sum_t L_{0t}^2 + \sum_t L_{1t}^2) + 2c_0 \sum_t L_{0t}L_{1t}. \end{cases} \qquad (7.2.11)$$

Если экономист работает с программным продуктом, предусматривающим математические действия с комплексными переменными, то задача ещё больше облегчается.

Записав для компактности модель (7.2.10) через комплексные переменные:

$$\dot{z}_t = \dot{b}\dot{K}_t + \dot{c}\dot{L}_t, \qquad (7.2.12)$$

легко получить систему оценок МНК коэффициентов этой модели:

$$\begin{cases} \sum \dot{z}_t \dot{K}_t = \dot{b} \sum \dot{K}_t^2 + \dot{c} \sum \dot{L}_t \dot{K}_t, \\ \sum \dot{z}_t \dot{L}_t = \dot{b} \sum \dot{L}_t \dot{K}_t + \dot{c} \sum \dot{L}_t^2 \end{cases}, \qquad (7.2.13)$$

решение которой позволяет получить искомые комплексные коэффициенты многофакторной модели.

Вывод, который из этого следует, однозначен – модель (7.2.1) расширяет инструментальную базу экономико-математического моделирования, поскольку построить её аналог в области действительных чисел требует привлечения сложных вычислительных процедур, не гарантирующих при этом адекватное моделирование.

Линейная комплекснозначная многофакторная модель обладает всеми теми же недостатками, которыми обладает и модель линейной производственной функции действительных переменных, а потому, понимая, что модель (7.2.1) имеет право на существование и практическое использование, оставим её для использования в моделировании простых производственных ситуаций.

7.3. Классификационная производственная функция типа Кобба-Дугласа

Линейная производственная классификационная функция отличается от аналогичных функций действительных переменных по своему смыслу и удобнее в использовании. Но наиболее ярко свойства комплекснозначных функций проявляется для нелинейных функций. Их аналоги в области действительных переменных необычайно сложны, на что неоднократно указывалось в предыдущих главах. Именно поэтому логично рассмотреть нелинейные комплекснозначные классификационные функции. Сам собой напрашивается в качестве наиболее простого варианта тип такой функции, который построен на подобие производственной функции Кобба-Дугласа.

Классификационной производственной функцией типа Кобба-Дугласа будем называть модель такого вида:

$$G_t + iC_t = (a_0 + ia_1)(K_0 + iK_1)^{\alpha}(L_0 + iL_1)^{1-\alpha}. \tag{7.3.1}$$

Здесь, как и в функции Кобба-Дугласа показатель степени лежит в пределах:

$$0 \le \alpha \le 1. \tag{7.3.2}$$

Как известно, функция является линейно однородной, если выполняется условие:

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_i) = \lambda f(x_1, x_2, \ldots x_i). \tag{7.3.3}$$

Проверим выполнение этого условия для модели (7.3.1):

$$\begin{gathered}(a_0 + ia_1)(\lambda K_0 + i\lambda K_v)^{\alpha}(\lambda L_0 + i\lambda L_v)^{1-\alpha} = \lambda^{\alpha}\lambda^{1-\alpha}(a_0 + ia_1)\times(K_0 + iK_v)^{\alpha}(L_0 + iL_v)^{1-\alpha} = \\ \lambda(a_0 + ia_1)(K_0 + iK_v)^{\alpha}(L_0 + iL_v)^{1-\alpha}\end{gathered}, \tag{7.3.4}$$

То есть эта функция линейно однородна.

Представим правую часть модели (7.3.1) в экспоненциальной форме. Получим:

$$(a_0+ia_1)(K_0+iK_1)^{\alpha}(L_0+iL_1)^{1-\alpha}=R_a e^{i\theta_a}R_K^{\alpha}e^{i\alpha\theta_K}R_L^{1-\alpha}e^{i(1-\alpha)\theta_L}. \quad (7.3.5)$$

Здесь используются следующие обозначения:

$$R_a=\sqrt{a_0^2+a_1^2},\ \ \theta_a=arctg\frac{a_1}{a_0}, \quad (7.3.6)$$

$$R_K=\sqrt{K_0^2+K_1^2},\ \ \theta_K=arctg\frac{K_1}{K_0}, \quad (7.3.7)$$

$$R_L=\sqrt{L_0^2+L_1^2},\ \ \theta_L=arctg\frac{L_1}{L_0}, \quad (7.3.8)$$

Тогда модель (7.3.1) представима как система двух действительных равенств - для валовой прибыли:

$$G_t=R_aR_K^{\alpha}R_L^{1-\alpha}\cos(\theta_a+\alpha\theta_K+(1-\alpha)\theta_L), \quad (7.3.9)$$

для издержек производства:

$$C_t=R_aR_K^{\alpha}R_L^{1-\alpha}\sin(\theta_a+\alpha\theta_K+(1-\alpha)\theta_L), \quad (7.3.10)$$

Теперь ясны общие характеристики модели. Если прочие ресурсы остаются неизменными, то:

1) если растут инвестиции в основной капитал K_0, это приводит к росту модуля капитальных ресурсов (7.3.7) и уменьшению полярного угла этих ресурсов. Косинус уменьшающегося угла возрастает, и при росте модуля капитального ресурса это означает рост валовой прибыли (7.3.9). Для издержек производства в этой ситуации противодействуют две тенденции - сомножитель - модуль капитальных ресурсов (7.3.10), - растёт, но синус уменьшающегося угла уменьшается. Поэтому, из (7.3.10) следует, что в зависимости от значений показателя степени α и комплексного коэффициента пропорциональности возможен как рост издержек производства (если α близок к нулю), так и уменьшение издержек (если α близок к единице). Возможны участки, когда издержки остаются постоянными.

2) если растут инвестиции не в основной капитал, то модуль капитальных ресурсов возрастает, также как растёт и полярный угол. Это означает, что валовая прибыль рассчитывается как произведение двух противоположных тенденций – возрастающего модуля капитальных ресурсов и уменьшающегося косинуса суммы углов. Опять-таки, в зависимости от исходных данных и от значений показателя степени это может в одних случаях вести к росту результирующего показателя, а в других случаях – к уменьшению его значений, а в третьих – к неизменности этого показателя. Динамика издержек производства в этой ситуации определяется умножением возрастающего значения модуля и возрастающего значения синуса суммы полярных углов. То есть, издержки производства однозначно возрастают.

Аналогичные выводы следуют и относительно поведения другой комплексной переменной – трудовых ресурсов. С увеличением числа промышленно-производственного персонала растёт валовая прибыль, а издержки могут увеличиваться, оставаться постоянными или уменьшаться. А с увеличением же непроизводственного персонала издержки однозначно растут, а динамика прибыли определяется коэффициентами модели – может расти, оставаться неизменной или уменьшаться.

Таким образом, видно, что модель (7.3.1) охватывает практически все возможные варианты производственных зависимостей за исключением разве что ситуации стагнации производства.

Тщательное изучение свойств функции (7.3.1) провела Е.В.Сиротина. Приведём здесь некоторые результаты этого исследования.

Для нахождения неизвестных параметров a_0, a_1 и α модели (7.3.1) воспользуемся подходом по оценке с помощью МНК параметров нелинейных моделей комплексных переменных с комплексными коэффициентами, который был изложен в четвёртой главе монографии.

Для модели типа Кобба-Дугласа, как и для производственной функции Кобба-Дугласа, удаётся сделать это несколько проще, чем для степенных функций с неограниченным значением показателей степени. Для этого уравнение (7.3.1) необходимо привести к линейному виду путём логарифмирования левой и правой частей по натуральному основанию:

$$\ln(G_t + iC_t) = \ln(a_0 + ia_1) + \alpha \ln(K_0 + iK_1) + (1-\alpha)\ln(L_0 + iL_1). \qquad (7.3.11)$$

Это выражение можно в результате нехитрых преобразований привести к виду:

$$\ln\frac{G_t + iC_t}{L_0 + iL_1} = \ln(a_0 + ia_1) + \alpha \ln\frac{K_{0t} + iK_{1t}}{L_{0t} + iL_{1t}}. \qquad (7.3.12)$$

Как видно, модель свелась к заурядному логарифмическому уравнению двух комплексных переменных. Для упрощения дальнейших выводов введём следующие обозначения этих переменных. Результирующая переменная под логарифмом, которую Е.В.Сиротина предложила называть «комплексная производительность труда», может быть преобразована к такому удобному для исследований виду:

$$g_t = \frac{G_t + iC_t}{L_0 + iL_1} = \frac{G_t L_{0t} + C_t L_{1t}}{L_0^2 + L_1^2} + i\frac{C_t L_{0t} - G_t L_{1t}}{L_0^2 + L_1^2}. \qquad (7.3.13)$$

Комплексная переменная ресурсов, также находящаяся под знаком логарифма справа, будет обозначена так:

$$k_t = \frac{K_{0t} + iK_{1t}}{L_{0t} + iL_{1t}} = \frac{K_{0t} L_{0t} + K_{1t} L_{1t}}{L_{0t}^2 + L_{1t}^2} + i\frac{K_{1t} L_{0t} - K_{0t} L_{1t}}{L_{0t}^2 + L_{1t}^2}. \qquad (7.3.14)$$

Поскольку она представляет собой отношение капитальных ресурсов к трудовым, то эту переменную можно назвать «комплексная фондовооружённость труда».

Эти два новых экономических показателя могут дать экономисту дополнительную характеристику протекающих производственных процессов, но останавливаться на этой идее не будем.

В исследовании, как это было заявлено в первой главе, используются главные значения логарифмов, поэтому равенство (7.3.12) может быть представлено следующим образом:

$$\ln R_g + i\theta_g = A_0 + iA_1 + \alpha(\ln R_k + i\theta_k). \qquad (7.3.14)$$

Здесь:

$$R_g = \sqrt{(\frac{G_t L_{0t} + C_t L_{1t}}{L_0^2 + L_1^2})^2 + (\frac{C_t L_{0t} - G_t L_{1t}}{L_0^2 + L_1^2})^2}, \theta_g = iarctg\frac{C_t L_{0t} - G_t L_{1t}}{G_t L_{0t} + C_t L_{1t}}, \qquad (7.3.15)$$

$$R_k = \sqrt{(\frac{K_{0t} L_{0t} + K_{1t} L_{1t}}{L_{0t}^2 + L_{1t}^2})^2 + (\frac{K_{1t} L_{0t} - K_{0t} L_{1t}}{L_{0t}^2 + L_{1t}^2})^2}, \theta_k = iarctg\frac{K_{1t} L_{0t} - K_{0t} L_{1t}}{K_{0t} L_{0t} + K_{1t} L_{1t}}, \qquad (7.3.16)$$

$$A_0 = \ln\sqrt{a_0^2 + a_1^2}, A_1 = arctg\frac{a_1}{a_2}. \qquad (7.3.17)$$

Теперь коэффициенты этой модели можно найти с помощью МНК. Применительно к данной модели задача становится тривиальной, поскольку решить необходимо систему уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} \sum_t \ln R_g = TA_0 + \alpha\sum_t \ln R_k, \\ \sum_t \theta_g = TA_1 + \alpha\sum_t \theta_k, \\ \sum_t \ln R_g \ln R_k + \sum_t \theta_g\theta_k = A_0\sum_t \ln R_k + A_1\sum_t \theta_k + \alpha(\sum_t \ln^2 R_k + \sum_t \theta_k^2). \end{cases} \qquad (7.3.18)$$

Е.В.Сиротина построила производственную классификационную функцию типа Кобба-Дугласа для статистических данных за временной период с 1999 по 2006 год по организации ОАО «Леноблгаз». Поскольку эти данные представляют коммерческую тайну организации, мы не можем привести их здесь. Но по статистическим данным после приведения переменных к одинаковому масштабу и вычисления всех промежуточных переменных, была получена система уравнений МНК (7.3.18), которая применительно к этому предприятию имеет вид:

$$\begin{cases} 14,21 = 8A_0 + 19,07\alpha \\ 7,37 = 8A_1 + 1,59\alpha \\ 32,65 = 14,21A_0 - 1,59A_1 + 46,68\alpha \end{cases}.$$

Откуда легко найти искомые значения коэффициентов модели: $A_0=0,084$, $A_1=1,062$, $\alpha=0,71$, С помощью известных значений коэффициентов A_0 и A_1 можно найти исходные значения коэффициентов a_0 и a_1:

$$a_0 + ia_1 = e^{0,084+i1,062} = 0,53 + i0,95.$$

Тогда модель классификационной производственной функции типа Кобба-Дугласа для ОАО «Леноблгаз» за рассматриваемый период имеет вид:

$$G_t + iC_t = (0,53 + i0,95)(K_0 + iK_1)^{0,71}(L_0 + iL_1)^{0,29}. \qquad (7.3.19)$$

Как видно, никаких затруднений при построении такой функции двух комплексных переменных не возникло. Более того, классификационная производственная функция типа Кобба-Дугласа оказалась простой в практическом применении.

7.4. Эластичность и другие характеристики классификационной производственной комплекснозначной функции

Классификационная производственная функция типа Кобба-Дугласа является по своим свойствам в существенной степени более адекватной экономической реальности, чем функция Кобба-Дугласа, поскольку она описывает большую часть реально существующих производственных взаимосвязей между ресурсами и производственным результатом. Очевидно, что она описывает и такие взаимосвязи, которые в области моделей действительных переменных являются недостижимыми.

Но для того чтобы осознанно использовать этот новый математический инструмент для моделирования экономики, необходимо более тщательно изучить его свойства. Сделаем это, воспользовавшись тем стандартным набором инструментов, который используют специалисты для изучения свойств «неоклассических» производственных функций и функции Кобба-Дугласа как одной из разновидности «неоклассической» производственной функции. Если использовать степенную модель производственной функции действительных переменных с показателями степени, лежащими в пределах от нуля до единицы, то для такой модели будут выполняться следующие условия:

1) при отсутствии одного из ресурсов производство в целом невозможно, что математически записывается так:

$$F(0, L) = F(K, 0) = 0, \tag{7.4.1}$$

2) при неограниченном увеличении одного из ресурсов выпуск неограниченно растет, то есть:

$$F(K,\infty) = F(\infty, L) = \infty\,. \tag{7.4.2}$$

3) с ростом ресурсов выпуск растет, что означает положительность первых производных:

$$\frac{dQ}{dK} > 0,\ \ \frac{dQ}{dL} > 0\,, \tag{7.4.3}$$

4) с увеличением ресурсов скорость роста выпуска замедляется, что означает отрицательность второй производной:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial K^2} < 0,\ \ \frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} < 0\,. \tag{7.4.4}$$

Эти свойства вытекают из математической формы степенной «неоклассической» производственной функции, что рассматривается экономистами как важные аргументы в пользу практической адекватности модели.

Поскольку в данном параграфе изучаются свойства одной из самых простых классификационных производственных функций - функции комплексных переменных типа Кобба-Дугласа (7.3.1), то следует посмотреть именно на наличие аналогичных свойств у этой функции. Сделаем это.

Классификационная производственная функция типа Кобба-Дугласа имеет вид:

$$G_t + iC_t = (a_0 + ia_1)(K_0 + iK_1)^{\alpha}(L_0 + iL_1)^{1-\alpha}.$$

Здесь показатель степени лежит в пределах $0 \le \alpha \le 1$, что и позволяет рассматривать функцию как некий аналог известной функции Кобба-Дугласа.

Очевидно, что в случае, когда хотя бы один из комплексных ресурсов будет равен нулю, то и выпуск, моделируемый этой функцией, также равен нулю. То есть условие (7.4.1) выполняется.

Теоретически возможен случай, когда одна составляющая комплексного ресурса равна нулю, а другая составляющая нулю не равна. В таком случае условие (7.4.1) не выполняется, например, $L_0=0$, $L_1>0$. Но в реальной экономической практике такие случаи не бывают. Невозможно представить себе ситуацию, когда на предприятии промышленно-производственный персонал отсутствует, а непроизводственный – работает, или наоборот – промышленно-производственный персонал есть, а менеджеров, бухгалтерии и генерального директора - нет. То же самое можно сказать и про основной капитал предприятия – если в заводской цех (K_0) не проложена дорога (K_0), то рабочие до цеха просто не дойдут.

Поэтому реальной экономике соответствует случай, когда и действительная и мнимая составляющая комплексного ресурса либо одновременно равны нулю, либо не равны нулю. Другие варианты относятся к идеализации, когда моделям объекта приписываются свойства, этому объекту не присущие. Мы при построении моделей используем абстрагирование, но не идеализацию.

Легко убедиться и в наличии второго свойства, то есть в том, что при неограниченном увеличении одного из комплексных ресурсов - капитала или труда выпуск неограниченно растет. Рост модуля комплексного ресурса в модели отражается ростом модуля производственного результата.

То есть, выполнение первого и второго свойств, присущих «неоклассическим» производственным функциям, для рассматриваемой модели также присущи, что делает аналогию между ними более обоснованной.

Теперь следует найти знаки первой и второй производной функции (7.3.1) для того, чтобы проверить выполнимость условий (7.4.3) и (7.4.4). Е.В.Сиротина сделала соответствующие выкладки, которыми мы и воспользуемся. Прежде всего, для более простого вычисления производных, как и прежде, представим модель производственной функции (7.3.1) в экспоненциальной форме:

$$G + iC = R_a e^{i\theta_a}(R_K e^{i\theta_K})^{\alpha}(R_L e^{i\theta_L})^{1-\alpha}. \qquad (7.4.5)$$

Здесь:

$$R_a = \sqrt{a_0^2 + a_1^2},\ \theta_a = arctg\,\frac{a_1}{a_0},\ R_K = \sqrt{K_0^2 + K_1^2},\ \theta_K = arctg\,\frac{K_1}{K_0},\ R_L = \sqrt{L_0^2 + L_1^2},\ \theta_L = arctg\,\frac{L_1}{L_0}$$

В этой форме записи (7.4.5) легко группируются модуль модели и её полярный угол:

$$G+iC=(R_a R_K^{\alpha} R_L^{1-\alpha})e^{i(\theta_a+i\alpha\theta_K+i(1-\alpha)\theta_L)}. \qquad (7.4.6)$$

Поэтому модель классификационной производственной функции типа Кобба-Дугласа может быть представлена в тригонометрической форме:

$$G+iC=R_a R_K^{\alpha} R_L^{1-\alpha}[\cos(\theta_a+\alpha\theta_K+(1-\alpha)\theta_L)+i\sin(\theta_a+\alpha\theta_K+(1-\alpha)\theta_L)]. \qquad (7.4.7)$$

Это позволяет вычислить первую и вторые частные производные функции по ресурсам.

Согласно условию Даламбера-Эйлера (Римана-Коши) для нахождения производной комплекснозначной функции достаточно взять производные по её действительной или мнимой части. Действительная часть модели (7.4.7) представима в виде:

$$G+iC=R\cos\theta=U. \qquad (7.4.8)$$

Поэтому производную функции (7.3.1), например, по комплексному капитальному ресурсу можно найти так:

$$\frac{\partial(G+iC)}{\partial K}=\frac{\partial U}{\partial K_0}-i\frac{\partial U}{\partial K_1}=\frac{\partial(R\cos\theta)}{\partial K_0}-i\frac{\partial(R\cos\theta)}{\partial K_1}. \qquad (7.4.9)$$

Вычислим первую составляющую производной (7.4.9), а именно - $\frac{\partial(R\cos\theta)}{\partial K_0}$ как производную сложной функции:

$$\frac{\partial(R\cos\theta)}{\partial K_0}=\frac{\partial R}{\partial K_0}\cos\theta+\frac{\partial\cos\theta}{\partial K_0}R. \qquad (7.4.10)$$

Первое слагаемое:

$$\frac{\partial R}{\partial K_0}\cos\theta=\frac{\partial R_a R_K^{\alpha} R_L^{1-\alpha}}{\partial K_0}\cos\theta=\alpha R_a R_L^{1-\alpha} R_K^{\alpha-1}\frac{K_0}{\sqrt{K_0^2+K_1^2}}\cos\theta. \qquad (7.4.11)$$

А поскольку

$\sqrt{K_0^2+K_1^2}=R_K$, то получим окончательно:

$$\frac{\partial R}{\partial K_0}\cos\theta=\frac{\partial R_a R_K^{\alpha} R_L^{1-\alpha}}{\partial K_0}\cos\theta=\alpha R_a R_L^{1-\alpha} R_K^{\alpha-2}K_0\cos\theta. \qquad (7.4.12)$$

Второе слагаемое (7.4.11) представляет собой производную косинуса аргумента по K_0. Его также можно определить:

$$\frac{\partial\cos\theta}{\partial K_0}R=\frac{\partial\cos(\theta_a+\alpha\theta_K+(1-\alpha)\theta_L)}{\partial K_0}R=-R\sin\theta\frac{\partial(\alpha\theta_K)}{\partial K_0}=-R\sin\theta\alpha\frac{\partial(arctg\frac{K_0}{K_1})}{\partial K_0}.$$

Откуда окончательно имеем:

$$\frac{\partial\cos\theta}{\partial K_0}R=-\alpha R\sin\theta\frac{-K_1}{K_0^2(1+\frac{K_1^2}{K_0^2})}=\alpha R_a R_K^{\alpha} R_L^{1-\alpha}\sin\theta\frac{K_1}{K_0^2+K_1^2}= \qquad (7.4.13)$$

$$=\alpha R_a R_K^{\alpha-2} R_L^{1-\alpha} K_1\sin\theta$$

Подставляя (7.4.12) и (7.4.13) в (7.4.10), получим частную производную классификационной производственной функции по основному капиталу:

$$\frac{\partial(R\cos\theta)}{\partial K_0} = \alpha R_a R_L^{1-\alpha} R_K^{\alpha-2} K_0 \cos\theta + \alpha R_a R_K^{\alpha-2} R_L^{1-\alpha} K_1 \sin\theta = \\ = \alpha R_a R_L^{1-\alpha} R_K^{\alpha-2}(K_0\cos\theta + K_1 \sin\theta) \quad (7.4.14)$$

Теперь точно также можно найти частную производную классификационной производственной функции типа Кобба-Дугласа по вспомогательному капиталу: $\frac{\partial(R\cos\theta)}{\partial K_1}$. Поскольку эта производная является производной сложной функции, то её можно вычислить так:

$$\frac{\partial(R\cos\theta)}{\partial K_1} = \frac{\partial R}{\partial K_1}\cos\theta + \frac{\partial \cos\theta}{\partial K_1} R. \quad (7.4.15)$$

Первое слагаемое (7.4.15) как производная модуля запишется следующим образом:

$$\frac{\partial R}{\partial K_1}\cos\theta = \alpha R_a R_L^{1-\alpha} R_K^{\alpha-1} \frac{K_1}{\sqrt{K_0^2 + K_1^2}}\cos\theta = \alpha R_a R_L^{1-\alpha} R_K^{\alpha-2} K_1 \cos\theta. \quad (7.4.16)$$

Второе слагаемое (7.4.15) представляет собой производную косинуса аргумента по вспомогательному капиталу K_1. Эту производную также можно вывести:

$$\frac{\partial \cos\theta}{\partial K_1} R = \frac{\partial \cos(\theta_a + \alpha\theta_K + (1-\alpha)\theta_L)}{\partial K_1} R = -R\sin\theta\alpha \frac{\partial(arctg\frac{K_0}{K_1})}{\partial K_1}.$$

Вычисляя производную арктангенса, окончательно имеем:

$$\frac{\partial \cos\theta}{\partial K_1} R = -\alpha R \sin\theta \frac{1}{K_0(1+\frac{K_1^2}{K_0^2})} = -\alpha R_a R_K^{\alpha} R_L^{1-\alpha} \sin\theta \frac{K_0}{K_0^2 + K_1^2} = \\ = -\alpha R_a R_K^{\alpha-2} R_L^{1-\alpha} K_0 \sin\theta \quad (7.4.17)$$

Подставляя (7.4.16) и (7.4.17) в (7.4.15), получим частную производную классификационной производственной функции по вспомогательному капиталу:

$$\frac{\partial(R\cos\theta)}{\partial K_1} = \alpha R_a R_L^{1-\alpha} R_K^{\alpha-2} K_1 \cos\theta - \alpha R_a R_K^{\alpha-2} R_L^{1-\alpha} K_0 \sin\theta = \\ = \alpha R_a R_L^{1-\alpha} R_K^{\alpha-2}(K_1\cos\theta - K_0 \sin\theta) \quad (7.4.18)$$

Поскольку в нашем распоряжении есть все слагаемые для того, чтобы получить производную классификационной функции по комплексному капиталу, можно вывести её:

$$\frac{\partial(G+iC)}{\partial K} = \frac{\partial U}{\partial K_0} - i\frac{\partial U}{\partial K_1} = \frac{\partial R\cos\theta}{\partial K_0} - i\frac{\partial R\cos\theta}{\partial K_1} = \\ = \alpha R_a R_L^{1-\alpha} R_K^{\alpha-2}(K_0\cos\theta + K_1\sin\theta) - i\alpha R_a R_L^{1-\alpha} R_K^{\alpha-2}(K_1\cos\theta - K_0\sin\theta) = \quad (7.4.19) \\ = \alpha R_a R_L^{1-\alpha} R_K^{\alpha-2}[(K_0 - iK_1)\cos\theta + (K_1 + iK_0)\sin\theta].$$

Из второго слагаемого последнего множителя полученного выражения можно вынести за скобку мнимую единицу. Получим:

$$\frac{\partial(G+iC)}{\partial K}=\alpha R_a R_L^{1-\alpha} R_K^{\alpha-2}[(K_0-iK_1)\cos\theta+i(K_0-iK_1)\sin\theta]=$$
$$=\alpha R_a R_L^{1-\alpha} R_K^{\alpha-2}(K_0-iK_1)(\cos\theta+i\sin\theta). \qquad (7.4.20)$$

Поскольку $\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta}$, то (7.4.2) можно записать в более удобной форме:

$$\frac{\partial(G+iC)}{\partial K}=(a_0+ia_1)(K_0+iK_1)^{\alpha}(L_0+iL_1)^{1-\alpha}[\alpha R_K^{-2}(K_0-iK_1)]. \qquad (7.4.21)$$

Упростим выражение в квадратных скобках:

$$\alpha R_K^{-2}(K_0-iK_1)=\alpha\frac{K_0-iK_1}{K_0^2+K_1^2}=\frac{\alpha}{K_0+iK_1}=\alpha(K_0+iK_1)^{-1}. \qquad (7.4.22)$$

Подставляя это значение в (7.4.21), получим окончательную формулу для первой производной классификационной производственной функции по комплексному капиталу:

$$\frac{\partial(G+iC)}{\partial K}=\alpha(a_0+ia_1)(K_0+iK_1)^{\alpha-1}(L_0+iL_1)^{1-\alpha}. \qquad (7.4.23)$$

Опуская столь же трудоёмкие, но абсолютно идентичные предыдущим вычисления, приведём итоговую формулу первой производной классификационной производственной функции комплексных переменных по комплексному труду:

$$\frac{\partial(G+iC)}{\partial L}=(1-\alpha)(a_0+ia_1)(K_0+iK_1)^{\alpha}(L_0+iL_1)^{-\alpha}. \qquad (7.4.24)$$

И (7.4.23), и (7.4.24) представляют собой комплексное число, состоящее из действительной и мнимой частей. А комплексное число, как известно не может быть ни положительным, ни отрицательным. Это требование (положительности, например) можно предъявить либо к модулю комплексной переменной, либо к её полярному углу, к его действительной или мнимой части. Это значит, что применительно к данной комплекснозначной производственной функции выполнение условия (7.4.3) относительно первой производной функции не представляется возможным.

Поэтому рассмотрим суть первых производных функции, а затем сделаем соответствующий вывод.

Поскольку по определению $0\le\alpha\le1$, а все производственные ресурсы лежат в первом квадранте комплексной плоскости, моделируемый результат будет лежать в первом квадранте комплексной плоскости производственного результата в случае неотрицательности каждого из коэффициентов комплексного коэффициента пропорциональности:

$$a_0\ge0, a_1\ge0. \qquad (7.4.25)$$

Следует напомнить, что положительность первых производных «неоклассической» производственной функции свидетельствует о том, что положительный прирост ресурсов приводит к положительному приросту производственного результата.

В рассматриваемом случае если в классификационной производственной функции комплексных переменных типа Кобба-Дугласа нарушится хотя бы одно из условий (7.4.25), то это означает, что моделируемый результат находится не в первом квадранте, а в других. Это означает, что привлечение какого-либо ресурса ухудшает производственный результат и наоборот – сокращение трудового или капитального ресурса благоприятно сказывается на результатах производства. Такие случаи в экономике встречаются, поэтому можно отметить, что модель классификационной производственной функции комплексных переменных типа Кобба-Дугласа моделирует более разнообразные варианты, нежели модель действительных переменных. Но если исследователь собирается следовать строгому правилу – увеличение ресурсов должно вести к увеличению производственных результатов, то классификационная модель типа Кобба-Дугласа помимо ограничения на показатель степени $0 \le \alpha \le 1$ должна дополняться условием (7.4.25). Впрочем, и для функции Кобба-Дугласа само собой выдвигается условие положительности коэффициента пропорциональности.

Исчислим теперь вторую производную по комплексным ресурсам. Опуская вычисления, осуществлённые подобно приведённым выше, сразу же выпишем итоговые формулы второй производной классификационной производственной функции комплексных переменных типа Кобба-Дугласа по её комплексным ресурсам.

Вторая производная этой функции по комплексному капиталу будет иметь вид:

$$\frac{\partial^2 (G+iC)}{\partial K^2} = \alpha(\alpha-1)(a_0+ia_1)(K_0+iK_1)^{\alpha-2}(L_0+iL_1)^{1-\alpha}. \tag{7.4.26}$$

Поскольку показатель степени этой функции положителен $0 \le \alpha \le 1$, также как положительны коэффициенты комплексного коэффициента пропорциональности (7.4.25), то второй сомножитель (7.4.26) будет отрицательным, а при положительности всех остальных сомножителей это означает, что моделируемый результат будет находиться в третьем квадранте комплексной плоскости, то есть – и действительная и мнимая части второй производной комплекснозначной функции отрицательные.

Вторая производная рассматриваемой функции по комплексным трудовым ресурсам будет равна:

$$\frac{\partial^2 (G+iC)}{\partial L^2} = -\alpha(1-\alpha)(a_0+ia_1)(K_0+iK_1)^{\alpha}(L_0+iL_1)^{-\alpha-1}. \tag{7.4.27}$$

В силу тех же причин все сомножители (7.4.27) положительны, а поскольку перед их произведением стоит знак «минус», то это означает, что и действительная, и мнимая части второй производной по комплексному труду будут отрицательными.

Таким образом, при задании для классификационной производственной функции комплексных переменных типа Кобба-Дугласа условий:

$$0 \le \alpha \le 1,\ a_0 \ge 0, a_1 \ge 0, \tag{7.4.28}$$

она приобретает свойства, аналогичные свойствам «неоклассических» производственных функций действительных переменных.

Само собой напрашивается желание вычислить коэффициенты эластичности классификационной производственной функции комплексных переменных типа Кобба-Дугласа по каждому из ресурсов. Это тем более просто сделать, что вычисление первых производных этой функции по комплексному капиталу и комплексному труду частично было выполнено выше.

Поскольку формула коэффициента эластичности при её вычислении в области действительных чисел имеет вид:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial y}{\partial x}\frac{x}{y},$$

её можно использовать и для моделей комплексных переменных, как это неоднократно делалось в предыдущих главах, если известны первые производные комплекснозначной функции.

Тогда коэффициент эластичности классификационной производственной функции комплексных переменных типа Кобба-Дугласа по комплексному капиталу будет иметь вид:

$$\varepsilon_K = \frac{\partial(G+iC)}{\partial K}\frac{K}{G+iC} = \alpha(a_0+ia_1)(K_0+iK_1)^{\alpha-1}(L_0+iL_1)^{1-\alpha}\frac{K}{G+iC}. \qquad (7.4.29)$$

или, осуществляя очевидные сокращения:

$$\varepsilon_K = \alpha. \qquad (7.4.30)$$

Точно также находится и коэффициент эластичности по комплексному труду:

$$\varepsilon_L = \frac{\partial(G+iC)}{\partial L}\frac{L}{G+iC} = (1-\alpha)(a_0+ia_1)(K_0+iK_1)^{\alpha-1}(L_0+iL_1)^{-\alpha}\frac{L}{G+iC}. \qquad (7.4.31)$$

Откуда окончательно:

$$\varepsilon_L = (1-\alpha). \qquad (7.4.32)$$

Вывод, который следует из приведённых результатов, однозначен – в классификационной производственной функции комплексных переменных типа Кобба-Дугласа показатели её степени играют ту же роль, что и показатели степени в производственной функции Кобба-Дугласа: они являются показателями эластичности производственного результата по соответствующему комплексному ресурсу.

Поскольку предлагаемая классификационная производственная функция комплексных переменных типа Кобба-Дугласа представляет каждый ресурс как комплексную переменную, то можно говорить о том, что сама функция имеет помимо эластичности по комплексному ресурсу в целом ещё и эластичность по каждой из составляющей ресурсов – действительной и мнимой.

Выведем формулу коэффициента эластичности классификационной производственной функции комплексных переменных типа Кобба-Дугласа по основному капиталу. Для этого вначале вычислим, используя те же обозначения, что и ранее, первую частную производную комплекснозначной функции по основному капиталу:

$$\frac{\partial(G+iC)}{\partial K_0}=\frac{\partial(R\cos\theta)}{\partial K_0}+i\frac{\partial(R\sin\theta)}{\partial K_0}. \quad (7.4.33)$$

Для первого слагаемого ранее в (7.4.14) было получено:

$$\frac{\partial(R\cos\theta)}{\partial K_0}=\alpha R_a R_L^{1-\alpha}R_K^{\alpha-2}(K_0\cos\theta+K_1\sin\theta).$$

Для второго слагаемого (7.4.33) получим:

$$\frac{\partial(R\sin\theta)}{\partial K_0}=\alpha R_a R_L^{1-\alpha}R_K^{\alpha-2}(K_0\sin\theta-K_1\cos\theta). \quad (7.4.34)$$

Подставляя полученные результаты в (7.4.33), определяем первую частную производную производственной функции комплексных переменных типа Кобба-Дугласа по основному капиталу:

$$\frac{\partial(G+iC)}{\partial K_0}=\alpha R_a R_L^{1-\alpha}R_K^{\alpha-2}[(K_0\cos\theta+K_1\sin\theta)+i(K_0\sin\theta-K_1\cos\theta)]. \quad (7.4.35)$$

Упрощая, получим:

$$\frac{\partial(G+iC)}{\partial K_0}=\alpha(a_0+ia_1)(K_0+iK_1)^{\alpha}(L_0+iL_1)^{1-\alpha}\frac{K_0-iK_1}{K_0^2+K_1^2}. \quad (7.4.36)$$

Откуда коэффициент эластичности классификационной производственной функции комплексных переменных типа Кобба-Дугласа по основному капиталу:

$$\varepsilon_{K_0}=\frac{\partial(G+iC)}{\partial K_0}\frac{K_0}{G+iC}=\alpha\frac{K_0^2-iK_0K_1}{K_0^2+K_1^2}=\alpha(\frac{K_0^2}{K_0^2+K_1^2}-i\frac{K_0K_1}{K_0^2+K_1^2}). \quad (7.4.37)$$

Это – комплексный коэффициент. Дадим его экономическую интерпретацию.

Если основной капитал увеличивается на единицу, то это приведёт к тому, что действительная часть комплексного производственного результата, то есть – валовая прибыль, увеличивается меньше чем на α – поскольку действительная часть комплексного коэффициента меньше единицы. При увеличении основного капитала до бесконечности прирост основного капитала на единицу приводит к увеличению валовой прибыли на α.

Мнимая составляющая комплексного коэффициента эластичности производственного результата от основного капитала имеет отрицательный знак. Это говорит о том, что мнимая составляющая производственного результата, то есть – валовые издержки, уменьшаются на величину, меньшую α. Причём в том случае, когда основной капитал стремится к бесконечности, издержки перестают изменяться.

Аналогично можно вычислить первую производную классификационной производственной функции комплексных переменных типа Кобба-Дугласа по вспомогательному капиталу, а на её основе определить формулу для вычисления коэффициента эластичности функции по этому ресурсу. Опуская промежуточные вычисления, приведём итоговую формулу коэффициента эластичности:

$$\varepsilon_{K_1}=\frac{\partial(G+iC)}{\partial K_1}\frac{K_1}{G+iC}=\alpha\frac{K_1^2+iK_0K_1}{K_0^2+K_1^2}=\alpha(\frac{K_1^2}{K_0^2+K_1^2}+i\frac{K_0K_1}{K_0^2+K_1^2}). \quad (7.4.38)$$

И ему можно дать экономическую интерпретацию.

Увеличение вспомогательного капитала приводит к росту и валовой прибыли, как действительной составляющей, и валовых издержек, как мнимой составляющей производственного результата. Но с ростом к бесконечности вспомогательного капитала действительная составляющая комплексного коэффициента эластичности стремится к α, а мнимая составляющая – к нулю. Это значит, что при больших значениях вспомогательного капитала его рост приводит к росту валовой прибыли на α, а на издержки производства этот показатель практически не влияет.

Сумма комплексного коэффициента эластичности по основному капиталу (7.4.37) и комплексного коэффициента эластичности по вспомогательному капиталу (7.4.38) будет давать величину общего коэффициента эластичности по комплексному капиталу, которая равна:

$$\varepsilon_{K_0} + \varepsilon_{K_1} = \alpha\left(\frac{K_0^2}{K_0^2 + K_1^2} - i\frac{K_0 K_1}{K_0^2 + K_1^2} + \frac{K_1^2}{K_0^2 + K_1^2} + i\frac{K_0 K_1}{K_0^2 + K_1^2}\right) = \alpha\,.$$

Аналогично выводятся формулы для коэффициентов эластичности по действительной части комплексного трудового ресурса:

$$\varepsilon_{Lo} = \frac{(1-\alpha)\cdot L_o^{\,2}}{L_o^{\,2} + L_1^2} - i\frac{(1-\alpha)\cdot L_o \cdot L_1}{L_o^{\,2} + L_1^2} \qquad (7.4.39)$$

и мнимой части:

$$\varepsilon_{L1} = \frac{(1-\alpha)\cdot L_1^2}{L_o^{\,2} + L_1^2} + i\frac{(1-\alpha)\cdot L_o \cdot L_1}{L_o^{\,2} + L_1^2}\,. \qquad (7.4.40)$$

Тогда эти коэффициенты показывают, на сколько увеличение промышленно-производственного персонала или непроизводственного персонала влияют на валовую прибыль и издержки. Вклад каждой составляющей определяется как показателями степени, так и конкретными значениями привлечённых трудовых ресурсов.

Сумма этих частных коэффициентов эластичности даст нам общую эластичность функции по комплексному труду:

$$\varepsilon_L = \varepsilon_{Lo} + \varepsilon_{L1} = \frac{(1-\alpha)\cdot L_o^{\,2} + (1-\alpha)\cdot L_1^2}{L_o^{\,2} + L_1^2} = 1-\alpha\,.$$

Анализ частных коэффициентов эластичности показывает, что они меняются с изменением объёмов привлекаемых ресурсов, то есть – отдача ресурсов меняется с изменением масштаба ресурсов, но при этом их сумма остаётся величиной постоянной:

$$\varepsilon_{K_0} + \varepsilon_{K_1} = \alpha, \quad \varepsilon_{Lo} + \varepsilon_{L1} = 1-\alpha\,.$$

Оставим это интересное свойство без его экономической интерпретации, поскольку тщательное изучение экономического смысла параметров модели не входит в задачу данной монографии.

7.5. Классификационная степенная производственная функция

Искусственное ограничение, вводимое на пределы изменения показателя степени α в классификационной производственной функции типа Кобба-Дугласа, ограничивает и область применения этой модели. Очевидно, что это ограничение (7.3.2) существенно упрощает задачу нахождения коэффициентов модели, но такое упрощение почти всегда ухудшает и аппроксимационные свойства модели. Поэтому более адекватно описывать реальные производственные и иные экономические процессы будут модели, в которой не вводятся некоторые априорные ограничения на её коэффициенты, если это не следует из сути моделируемой экономической ситуации. Снятие ограничений на область ограничений показателей степени степенной классификационной функции расширяет её возможности.

Так, Е.В.Сиротина оценила коэффициенты одной из разновидностей степенной классификационной производственной функции на примере ОАО «Леноблгаз» – функции с действительными показателями степени, и получила модель такого вида:

$$G_t + iC_t = (2,34 + i3,65)(K_0 + iK_1)^{0,44}(L_0 + iL_1)^{0,50}.$$

Эта модель описывает производственный процесс компании точнее, чем система степенных моделей действительных переменных, описывающих по отдельности валовую прибыль и издержки производства.

Но не будем более подробно останавливаться на модели этого типа, поскольку её свойства аналогичны тем, которые были определены для классификационной функции типа Кобба-Дугласа, рассмотренной в предыдущем параграфе, констатируем это обстоятельство и обратим внимание на модель иного типа - классификационную степенную производственную функцию с комплексными показателями степени:

$$G_t + iC_t = (a_0 + ia_1)(K_0 + iK_1)^{(b_0+ib_1)}(L_0 + iL_1)^{(c_0+ic_1)}. \qquad (7.5.1)$$

Проверим однородность этой функции по правилу (7.3.3):

$$\begin{aligned}&\left(a_0 + ia_1\right)(\lambda K_0 + i\lambda K_v)^{(b_0+ib_1)}(\lambda L_0 + i\lambda L_v)^{(c_0+ic_1)} = \\ &\lambda^{(b_0+ib_1)}\lambda^{(c_0+ic_1)}\left(a_0 + ia_1\right)(K_0 + iK_v)^{(b_0+ib_1)}(L_0 + iL_v)^{(c_0+ic_1)} = . \\ &\lambda^{(b_0+ib_1)+(c_0+ic_1)}\left(a_0 + ia_1\right)(K_0 + iK_v)^{(b_0+ib_1)}(L_0 + iL_v)^{(c_0+ic_1)}\end{aligned} \qquad (7.5.2)$$

То есть эта функция неоднородна комплексной степени

$$(b_0 + ib_1) + (c_0 + ic_1). \qquad (7.5.3)$$

Задавая различные значения показателей степени этой функции, можно получить их самые различные виды. В частности, классификационная производственная функция типа Кобба-Дугласа получается если сумма (7.5.3) будет равна единице и она становится однородной первой степени.

Логичным представляется рассмотрение производственной функции, которая является линейно псевдооднородной, а именно - однородной степени i. Это может быть в случае, когда (7.5.3) даст в сумме мнимую единицу:

$$(b_0 + ib_1) + (c_0 + ic_1) = i$$

Обозначим показатель степени для такой функции через β. Тогда псевдооднородная классификационная производственная функция типа Кобба-Дугласа имеет вид:

$$G_t + iC_t = (a_0 + ia_1)(K_0 + iK_1)^{i\beta}(L_0 + iL_1)^{i(1-\beta)}. \qquad (7.5.4)$$

При ограничениях:

$$0 \le \beta \le 1. \qquad (7.5.5)$$

Для того чтобы понять суть поведения псевдооднородной классификационной производственной функции типа Кобба-Дугласа, представим её в экспоненциальном виде:

$$G_t + iC_t = R_a e^{i\theta_a} R_K^{i\beta} e^{i\theta_K i\beta} R_L^{i(1-\beta)} e^{i\theta_L i(1-\beta)}. \qquad (7.5.6)$$

Здесь используются ранее введённые обозначения:

$$R_a = \sqrt{a_0^2 + a_1^2},\ \ \theta_a = arctg\frac{a_1}{a_0}, \qquad (7.5.7)$$

$$R_K = \sqrt{K_0^2 + K_1^2},\ \ \theta_K = arctg\frac{K_1}{K_0}, \qquad (7.5.8)$$

$$R_L = \sqrt{L_0^2 + L_1^2},\ \ \theta_L = arctg\frac{L_1}{L_0}, \qquad (7.5.9)$$

Преобразуем правую часть модели (7.5.6) так, чтобы удалось вычленить модуль правой части комплексной переменной и её полярный угол:

$$G_t + iC_t = R_a e^{-\beta\theta_K} e^{\theta_L(\beta-1)} e^{\ln R_K^{i\beta}} e^{\ln R_L^{i(1-\beta)}} e^{i\theta_a}. \qquad (7.5.10)$$

Поскольку

$$e^{\ln R_K^{i\beta}} = e^{i\beta\ln\sqrt{K_0^2+K_1^2}},\ \text{а}\ e^{\ln R_L^{i(1-\beta)}} = e^{i(1-\beta)\ln\sqrt{L_0^2+L_1^2}},$$

то валовая прибыль по псевдооднородной классификационной производственной функции типа Кобба-Дугласа рассчитывается так:

$$G_t = R_a e^{(\beta-1)arctg\frac{L_1}{L_0} - \beta arctg\frac{K_1}{K_0}} \cos(\theta_a + \beta\ln\sqrt{K_0^2 + K_1^2} + (1-\beta)\ln\sqrt{L_0^2 + L_1^2}). \qquad (7.5.11)$$

Соответственно и издержки производства по этой модели вычисляются по формуле:

$$C_t = R_a e^{(\beta-1)arctg\frac{L_1}{L_0} - \beta arctg\frac{K_1}{K_0}} \sin(\theta_a + \beta\ln\sqrt{K_0^2 + K_1^2} + (1-\beta)\ln\sqrt{L_0^2 + L_1^2}). \qquad (7.5.12)$$

Разберём теперь, какой именно характер производства моделируется этой псевдооднородной классификационной производственной функцией типа Кобба-Дугласа.

Предположив неизменность комплексных трудовых ресурсов, получим такой характер влияния комплексного капитального ресурса на производственный результат:

1) если растут инвестиции в основной капитал K0, то это приводит к уменьшению полярного угла этих ресурсов и росту модуля капитальных ресурсов. Валовая прибыль в (7.5.11) представляется перемножением двух изменяющихся сомножителей – возрастающей при таком характере изменения ресурсов экспонентой $e^{(\beta-1)arctg\frac{L_1}{L_0} - \beta arctg\frac{K_1}{K_0}}$ и уменьшающимся с ростом

K0 косинусом - $\cos(\theta_a + \beta \ln \sqrt{K_0^2 + K_1^2} + (1-\beta)\ln \sqrt{L_0^2 + L_1^2})$. В зависимости от соотношения между основным и не основным капиталом, а также от значений комплексного коэффициента пропорциональности и показателя степени β, при этом может моделироваться рост прибыли, стабильность её значений или снижение объёмов. Поэтому однозначной зависимости здесь не выявляется. Но для издержек производства в этой ситуации мультиплицируются две тенденции – экспонента растёт, также как растёт синус угла. Поэтому, из (7.5.11) однозначно следует, что издержки при этом растут.

2) если растут инвестиции в не основной капитал, то полярный угол возрастает, а это значит, что экспонента, где этот угол используется со знаком «минус», уменьшается. Аргумент косинусоидальной составляющей возрастает с ростом модуля капитальных ресурсов, что означает уменьшение самого этого сомножителя. Таким образом, мультиплицируются две уменьшительные тенденции. Это значит, что инвестиции в не основной капитал однозначно приводят к уменьшению валовой прибыли на производстве. Что касается издержек производства, то если экспоненциальная составляющая, как было показано, уменьшается, то синус возрастающего угла растёт. Поэтому перемножение этих двух сомножителей может при различных значениях коэффициентов и ресурсов вести к разным тенденциям.

Точно такие же выводы можно сделать и о характере влияния на производственный результат другой комплексной переменной – трудовых ресурсов. С увеличением числа промышленно-производственного персонала растут издержки, а изменения валовой прибыли могут быть самыми различными, а увеличение непроизводственного персонала приводит к уменьшению валовой прибыли и разнообразному поведению издержек.

Поскольку взаимосвязи, моделируемые псевдооднородной классификационной производственной функцией типа Кобба-Дугласа, вполне соответствуют многим реальным производственным процессам, можно утверждать, что и псевдооднородная классификационная производственная функция типа Кобба-Дугласа может быть использована при моделировании экономики. Но, поскольку и в этой модели введены априорные предположения о её однородности и ограничениях на знаки показателя степени (7.5.5), то область практического применения такой модели ограничена. Поэтому не будем уделять её свойствам столько же внимания, сколько уделили классификационной производственной функции типа Кобба-Дугласа в предыдущем параграфе.

Универсальной будет являться модель, в которой убраны какие-либо ограничения на однородность модели (7.5.1) и знаки её коэффициентов. При этом расширяется ареал применения такой модели, хотя она существенно усложняется, а процедура вычисления комплексных коэффициентов становится значительно более трудоёмкой.

Если прологарифмировать правую и левую части равенства (7.5.1), то будет получена модель такого вида:

$$\ln(G_t + iC_t) = \ln(a_0 + ia_1) + (b_0 + ib_1)\ln(K_0 + iK_1) + (c_0 + ic_1)\ln(L_0 + iL_1) \ . \qquad (7.5.13)$$

Никаких проблем теоретического плана, связанных с оценкой коэффициентов этой модели на статистических данных не предвидится – всё довольно просто. Другое дело, что для этого необходимо будет решать систему из шести уравнений с шестью неизвестными (если работать с действительными переменными) или же систему из трёх комплекснозначных уравнений системы МНК. При этом, конечно же необходимо тщательно следить за полярными углами переменных, поскольку большинство программ, с которыми работают экономисты при моделировании, вычисляют углы, обрезая их значения в диапазоне от 0 до 2π, что может вызвать ошибки в оценивании коэффициентов модели.

В любом случае, экономист, приняв решение работать со степенной классификационной производственной функцией комплексных переменных, добивается более адекватного моделирования производственных процессов и влияния активной и пассивной части производственных ресурсов, нежели он это сделает, используя модели действительных переменных.

Очевидно, что помимо степенных, могут использоваться классификационные модели других видов – показательные, логарифмические или их некоторый симбиоз. Принципиально важно, что количество привлекаемых в модель ресурсов ограничивается лишь вычислительными способностями используемой техники и смысловым содержанием задачи.

7.6. Теневая экономика и её моделирование комплекснозначными функциями

Используя подход выделения активной и пассивной частей, можно предложить классификацию экономических процессов на две группы – легальная экономика и теневая экономика. Очевидно, что показатели легальной экономики следует отнести к действительным частям экономических переменных, а показатели теневой экономики следует относить к мнимым составляющим. Придерживаясь этого правила, можно построить многообразнейшие модели, описывающие теневую экономику. Остановимся лишь на одной из них.

Введём следующие переменные:

K_0 – стоимость основных фондов, отражённая в статистических отчётностях;

K_1 - стоимость основных фондов, используемая в нелегальном производстве;

L_0 – количество занятых на производстве;

L_1 – количество занятых в теневой экономике;

Q_0 – валовой внутренний продукт, отражённый в официальной статистике;

Q_1 – величина валового внутреннего продукта теневой экономики.

Простейшая степенная модель экономики с учётом теневого бизнеса имеет вид:

$$Q_0 + iQ_1 = a(K_0 + iK_1)^{\alpha}(L_0 + iL_1)^{\beta}. \qquad (7.6.1)$$

где α и β – показатели степени функции, на величины и знаки которых мы не налагаем никаких ограничений.

С позиций наилучшей аппроксимации социально-экономических явлений с учётом теневых процессов более точной будет степенная производственная функция комплексных переменных с комплексными коэффициентами:

$$Q_0 + iQ_1 = (a_0 + ia_1)(K_0 + iK_1)^{b_0 + ib_1}(L_0 + iL_1)^{c_0 + ic_1}, \qquad (7.6.2)$$

коэффициенты которой можно найти с помощью МНК, о чём уже говорилось ранее. Но модель с действительными коэффициентами (7.6.1) с позиций экономической сути моделируемого процесса представляется более обоснованной.

Действительно, если величины основных фондов и занятых в теневой экономике вдруг благодаря усилиям власти будут сведены к нулю, то и объём производимой продукции в теневой экономике будет равен нулю. Модель (7.6.1) как раз это и моделирует – если $K_1=0$ и $L_1=0$, то очевидно что и $Q_1=0$. А в модели с комплекснозначными коэффициентами (7.6.2) даже при равенстве нулю теневых ресурсов действительная переменная, возводимая в комплексную степень, будет в качестве результата давать комплексную переменную и вычислять объём теневого продукта, отнесённый в мнимую часть, и не равный нулю. То есть - такая модель менее точно отражает реальные процессы. Это первое обстоятельство.

Второе обстоятельство, по которому следует отдать предпочтение модели (7.6.1), а не модели (7.6.2), заключается в характере исходных данных. Действительно, статистические данные по легальной экономике, хотя и засорены ошибками, но их порядок и тенденции не особенно искажаются этими ошибками. А вот информация о теневой экономике и её слагаемых такому учёту не поддаётся по определению. Здесь приходится использовать экспертные оценки, точность которых, очевидно, крайне не велика. В таких условиях, когда исходные данные не точны, усложнять модель с целью повышения её точности – затея бесперспективная. Поэтому простой модели (7.6.2) следует отдать предпочтение и по этому основанию.

Проведём предварительный анализ свойств предлагаемой модели экономической динамики с учётом теневой экономики. Применяя экспоненциальную форму записи, преобразуем модель (7.6.1) к следующему виду:

$$Q_0 + iQ_1 = a(K_0^2 + K_1^2)^{\frac{\alpha}{2}}(L_0^2 + L_1^2)^{\frac{\beta}{2}} e^{i(\alpha arctg\frac{K_1}{K_0} + \beta\alpha arctg\frac{L_1}{L_0})}. \qquad (7.6.3)$$

Откуда легко определить, как модель учитывает влияние факторов на легальную и теневую экономики. Объём официально отражаемого производства:

$$Q_0 = a(K_0^2 + K_1^2)^{\frac{\alpha}{2}}(L_0^2 + L_1^2)^{\frac{\beta}{2}} \cos(\alpha arctg \frac{K_1}{K_0} + \beta\alpha arctg \frac{L_1}{L_0}). \qquad (7.6.4)$$

Аналогично можно определить, как предлагаемая модель описывает нелегальный выпуск:

$$Q_1 = a(K_0^2 + K_1^2)^{\frac{\alpha}{2}}(L_0^2 + L_1^2)^{\frac{\beta}{2}} \sin(\alpha arctg \frac{K_1}{K_0} + \beta\alpha arctg \frac{L_1}{L_0}). \qquad (7.6.5)$$

Как видно, модель описывает влияние всех ресурсов – легальных и нелегальных, - и на официальную, и на теневую экономику. Имеет ли это место в реальной экономике?

Действительно, занятые в теневой экономике L_1 производят нелегальный продукт, который через официальные продажи в определённой части легализируется и отражается как часть реального ВВП Q_0, а занятые в легальном производстве зачастую, не подозревая того, производят продукт, скрываемый от налогообложения и включаемый в оборот теневой экономики. Кроме того, оплата за труд людей, занятых в нелегальном бизнесе, способствует тому, что свои доходы они направляют в существенной части на удовлетворение потребностей с помощью товаров, легально производимых в экономике.

Точно также и на основных фондах K_0, официально отражаемых в бухгалтерских балансах, производят продукцию для теневого оборота, а в различного рода «подпольных» цехах на оборудовании, которое мы отнесём к основным фондам теневого бизнеса K_1, производят товары, реализуемые в официальном обороте. Комплекснозначная степенная функция отражает эти сложные взаимосвязи.

Посмотрим, какие именно тенденции описывает предложенная модель. Предположим вначале, что ситуация в изучаемом регионе или стране такова, что способствует увеличению предпринимателей, работающих нелегально в теневой экономике, а ресурсы, привлекаемые к легальному производству остаются постоянными. То есть – возрастают как капиталы K_1, привлекаемые к нелегальному производству, так и количество занятых в теневой экономике L_1. Как следует из (7.6.4), это приводит к тому, что растут оба сомножителя $(K_0^2 + K_1^2)^{\frac{\alpha}{2}}$ и $(L_0^2 + L_1^2)^{\frac{\beta}{2}}$, и уменьшается тригонометрический сомножитель – косинус возрастающих углов уменьшается. Так каким образом усиление теневой экономики влияет на легальную экономику? Ответ на этот вопрос определяется значениями показателей степени α и β. Если они меньше единицы, то рост степенных составляющих будет происходить в меньшей степени, чем рост косинусоиды – моделируется либо стабильность, либо некоторое снижение легального производства. Чем ближе к нулю эти показатели, тем более отрицательным становится воздействие теневой экономики на легальную.

Если же показатели степени больше единицы, то степенные сомножители возрастают быстрее, нежели уменьшается косинусоида. Поэтому в этом случае моделируется положительное влияние теневой экономики на результаты легального производства.

Как эти ресурсы, вовлекаемые в теневой бизнес, оказывают влияние на его объёмы? Ответ на этот вопрос можно получить из второй составляющей модели, которая обозначена как равенство (7.6.5). Степенные сомножители растут с ростом ресурсов K_1 и L_1. Растёт и тригонометрический сомножитель – синусоида с ростом угла увеличивает свои значения. Значит, моделируется однозначный рост теневого производства вне зависимости от того, какими являются показатели степени – близкими к нулю, или больше единицы.

Теперь вновь предположим, что конъюнктура производства такова, что предпринимателям нет смысла развивать теневое производство и они, зафиксировав его на определённом уровне, вкладывают ресурсы в легальные производства. То есть – растут капиталы K_0, привлекаемые к легальному производству, как и количество занятых в экономике L_0. Как на такое изменение ресурсов отреагирует модель (7.6.1)?

Динамика легального производства, определяющаяся произведением степенных сомножителей и тригонометрического (7.6.4) сомножителя, будет такой. Степенные сомножители растут, и этот рост определяется показателями степени. Аргумент косинусоиды с ростом K_0, и L_0 будет уменьшаться. Косинус уменьшающегося угла – увеличивается. Следовательно, объём легального производства увеличивается в любом случае.

А что происходит с нелегальной экономикой? Степенные составляющие также возрастают, а вот тригонометрический сомножитель – синусоида, - уменьшается. Поэтому, в зависимости от значений показателей степени и соотношения ресурсов легальной и нелегальной экономики, объём нелегального производства может как возрастать, так и уменьшаться. А может оставаться стабильным. Если при этом показатели степени меньше единицы, то рост степенных сомножителей происходит в меньшей степени, чем уменьшение синусоиды.

Получается, что модель верно отражает возможные варианты воздействия ресурсов легальной и теневой экономики друг на друга.

По имеющимся данным построить модель (7.6.1) не сложно – это уже делалось в предыдущих параграфах. Но, как уже говорилось, основная сложность, с которой приходится сталкиваться при построении модели (7.6.1) – отсутствие достоверной информации о переменных, относящихся к теневой экономике в России и в других странах. Преодолевая эту проблему И.С.Савков предложил опираться на имеющуюся экспертную информацию о теневой экономике России[1]. Поскольку известны экспертные оценки того,

[1] Светуньков С.Г., Савков И.С. Моделирование теневой экономики с помощью степенной производственной функции комплексны переменных. // Экономическая кибернетика:

сколько занято человек в теневой экономики России (средняя оценка – 41%) и какой оборот составляет теневая экономика по отношению к официально регистрируемому ВВП (средняя оценка мнений экспертов – 45%), можно использовать эти данные для построения модели. Однако неизвестной является величина стоимости основных фондов (капитала), используемых в теневой экономике. Нам экспертная оценка этой величины не встречалась. Для её определения предлагается следующий подход. По имеющимся статистическим данным России вычисляем параметры степенной производственной функции действительных переменных. Модель имеет вид:

$$Q_t = 0{,}5241 K_t^{0{,}569} L_t^{0{,}579}. \qquad (7.6.6)$$

Поскольку показатели степени отражают вклад каждого ресурса в результаты производства, а технологии теневой экономики незначительно отличаются от технологий официальных производств, тем более, что существенная часть теневого продукта вырабатывается на тех же технологических линиях, то можно использовать эти коэффициенты для модели (7.6.1):

$$Q_{0t} + iQ_{1t} = 0{,}5241(K_{0t} + iK_{1t})^{0{,}569}(L_{0t} + iL_{1t})^{0{,}579}. \qquad (7.6.7)$$

Откуда можно получить оценку основных фондов, используемых в теневой экономике России. Для этого прологарифмируем левую и правую части этого равенства (будем использовать главные значения логарифмов):

$$\ln\sqrt{Q_{0t}^2 + Q_{1t}^2} + iarctg\frac{Q_{1t}}{Q_{0t}} = \ln 0{,}5241 + 0{,}569\left[\ln\sqrt{K_{0t}^2 + K_{1t}^2} + iarctg\frac{K_{1t}}{K_{0t}}\right] + 0{,}579\left[\ln\sqrt{L_{0t}^2 + iL_{1t}^2} + iarctg\frac{L_{1t}}{L_{0t}}\right]$$

Теперь можно вычислить неизвестную величину капитала, находящегося в теневой экономике России.

Впрочем, особенности свойств комплексных переменных позволяют упростить эту задачу. Поскольку два комплексных числа равны друг другу только тогда, когда равны друг другу их действительные и мнимые части, то применительно к экспоненциальной форме, это означает, что должны быть равны друг другу модули комплексных чисел и их полярные углы. Поэтому из (7.6.7) можно получить и более удобные для вычислений выражения:

$$\sqrt{Q_{0t}^2 + Q_{1t}^2}\, e^{iarctg\frac{Q_{1t}}{Q_{0t}}} = 0{,}5241(K_{0t}^2 + K_{1t}^2)^{\frac{0{,}569}{2}}(L_{0t}^2 + L_{1t}^2)^{\frac{0{,}579}{2}}.$$

(7.6.8)

Или

$$arctg\frac{Q_{1t}}{Q_{0t}} = 0{,}569 arctg\frac{K_{1t}}{K_{0t}} + 0{,}579 arctg\frac{L_{1t}}{L_{0t}}. \qquad (7.6.9)$$

Решая любое из приведённых уравнений относительно величины основных фондов теневой экономики K_{0t}, получим, что они составляют величину 37,3% от официальной величины основных фондов России в последние годы. То есть – примерно треть основных фондов России определяется моделью как включенные в оборот теневой экономики.

системный анализ в экономике и управлении: Сборник научных трудов. Выпуск №19 – СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2009.

Конечно, результаты расчётов по полученной модели (7.6.7) носят в существенной части условный характер, поскольку она базируется на ряде упрощений и допущений; и при появлении относительно достоверных значений переменных, отнесённых к теневой экономике, коэффициенты модели (7.6.7) должны быть пересчитаны и наверняка изменятся. Но важно другое – модель классификационной комплекснозначной функции может быть использована для моделирования экономики с учётом её теневой составляющей. Модели действительных переменных в этом отношении представляют собой менее тонкий инструмент исследования и анализа.

7.7. Формирование сложных многофакторных моделей комплексных переменных

Классификационные модели комплексных переменных значительно расширяют возможности комплекснозначной экономики. Но пока что были рассмотрены исключительно модели одного типа - линейные или степенные. Но в реальной экономике влияние факторов на результат вовсе не обязательно подчиняется одному какому-либо закону. Поэтому в моделях действительных переменных встречаются сложные многофакторные модели, например, такого типа:

$$y_t = ax_{1t}^{\alpha} x_{2t}^{\beta} + bx_{3t}.$$

МНК непосредственно к этой модели применить сложно, поскольку будет получена система четырёх нелинейных уравнений с четырьмя неизвестными коэффициентами. Эту систему в принципе можно решить численными методами, но куда проще с помощью тех же численных методов, которые имеются в пакетах прикладных программ, найти целенаправленным перебором удовлетворительные значения коэффициентов, соответствующие критерию МНК – для этого, например, в MS Exell имеется функция «поиск решения».

Однако воспользоваться этой функцией и заложенным в программе алгоритмом для поиска значений коэффициентов комплекснозначной модели такого же типа:

$$y_{rt} + iy_{it} = (a_0 + ia_1)(x_{1rt} + ix_{1it})^{\alpha}(x_{2rt} + ix_{2it})^{\beta} + (b_0 + ib_1)(x_{3rt} + ix_{3it})$$

невозможно.

Потребность в построении сложных нелинейных многофакторных комплекснозначных моделях имеется. Например, объём произведённой продукции растениеводства и животноводства в сельском хозяйстве определяется количеством занятых в растениеводстве и количеством занятых животноводстве, земельными площадями, выделенными под сельскохозяйственные угодья и выделенными под пастбища, количеством техники для обработки земли и количеством техники, используемой в животноводстве и другими факторами. Для верного моделирования сельскохозяйственного производства как раз и необходимо строить комплекснозначную многофакторную модель, которая вовсе не будет являться линейной.

В своё время для решения подобных задач в области действительных переменных был предложен метод синтеза однофакторных моделей в многофакторную.

Пусть исследователь с помощью какого-либо метода, МНК например, построил несколько однофакторных зависимостей некоторого показателя y от факторов x_k, $k=1,2,3,\ldots n$,

$$y = f_k(x_k) + \varepsilon_k . \qquad (7.7.1)$$

причём каждая из этих моделей описывает поведение показателя с дисперсией:

$$\sigma_k^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(y_k - f_k(x_k))^2$$

Поскольку у всех n моделей (7.7.1) левые части равенств равны друг другу и равны y, просуммируем n раз левые и правые части равенств:

$$ny = \sum_{k=1}^{n} f_k(x_k) + \sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k . \qquad (7.7.2)$$

Откуда:

$$y = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f_k(x_k) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k . \qquad (7.7.3)$$

Получилась многофакторная модель как синтез однофакторных. Из полученной формы записи следует, что каждая однофакторная модель входит в многофакторную с одинаковым весом, равным *1/n*. Поскольку дисперсии каждой модели отличны друг от друга, для минимизации общей ошибки аппроксимации и дисперсии модели вводят вес каждой модели v_i при их синтезе в общую многофакторную модель. При этом очевидно правило – чем больше дисперсия однофакторной модели, тем с меньшим весом она должна входить в общую многофакторную модель.

С учётом этого многофакторная модель как синтез однофакторных будет записана так:

$$y = \sum_{k=1}^{n} v_k f_k(x_k) + \sum_{k=1}^{n} v_k\varepsilon_k \qquad (7.7.4)$$

где $v_l = \frac{1}{n-1}\frac{\sum_{k=1}^{n}\sigma_k - \sigma_l}{\sum_{i=1}^{n}\sigma_k}$. (7.7.5)

Легко заметить, что сумма весов, задаваемых по формуле (7.7.5), равна единице. Могут быть и другие способы задания весов каждой однофакторной модели в многофакторную.

Воспользуемся этим методом для построения многофакторных комплекснозначных моделей. Пусть построены несколько однофакторных комплекснозначных зависимостей некоторого комплексного показателя (y_r+iy_i) от комплексных факторов ($x_{rk}+ix_{ik}$), $k=1,2,3,\ldots l, \ldots n$, причём каждая из этих моделей описывает поведение комплексного показателя со средней ошибкой аппроксимации ($\varepsilon_{rk}+i\varepsilon_{ik}$):

$$y_r + iy_i = f_i(x_{rk} + ix_{ik}) + (\varepsilon_{rk} + i\varepsilon_{ik}) . \qquad (7.7.6)$$

Синтезируем эти однофакторные модели в многофакторную с соответствующими весами:

$$y_r + iy_i = \sum_{k=1}^{n} v_k f_k(x_{rk} + ix_{ik}) + \sum_{k=1}^{n} v_k(\varepsilon_{rk} + i\varepsilon_{ik}), \qquad (7.7.7)$$

где $$v_l = \frac{1}{n-1} \frac{\sum_{k=1}^{n}(\sigma_{rk} + i\sigma_{ik}) - (\sigma_{rl} + i\sigma_{il})}{\sum_{k=1}^{n}(\sigma_{rk} + i\sigma_{ik})} \qquad (7.7.8)$$

- комплексный вес каждого фактора в общей многофакторной комплекснозначной модели.

В том случае, когда предполагается строить аддитивную многофакторную модель, предложенный метод существенно упрощает процесс формирования комплекснозначных многофакторных моделей и снижает его трудоёмкость.

Несколько сложнее обстоит дело в ситуации, когда исследователь предполагает построить многофакторную мультипликативную модель. В таком случае каждую однофакторную модель следует рассматривать через мультипликативную ошибку аппроксимации:

$$\mu_k = \frac{y}{f_k(x_k)} . \qquad (7.7.9)$$

Если модель однозначно описывает показатель, то мультипликативная ошибка аппроксимации всегда будет равна единице. Если описывает с некоторой дисперсией, то мультипликативная ошибка аппроксимации будет варьироваться вокруг единицы, причём – чем хуже модель описывает показатель, тем сильнее вариация этой ошибки. Значит, мерилом точности модели служит ошибка:

$$\varepsilon_k = 1 - \mu_k , \qquad (7.7.10)$$

дисперсия которой легко вычисляется.

Вновь действует правило – чем больше дисперсия, тем меньший вес должен быть у модели. Но если в аддитивном случае сумма весов должны быть равна единице, то в мультипликативном случае произведение весов должно быть равно единице. Тогда каждый вес находится по формуле:

$$v_l = \frac{(\prod_{k=1}^{n} \sigma_k)^{\frac{1}{n}}}{\sigma_l} . \qquad (7.7.11)$$

С учётом этого многофакторная мультипликативная модель примет вид:

$$y = (\prod_{k=1}^{n} v_k f_k(x_k))^{\frac{1}{n}} . \qquad (7.7.12)$$

Точно также можно построить и многофакторную комплекснозначную модель:

$$y_r + iy_i = (\prod_{k=1}^{n} v_k f_k(x_{rk} + ix_{ik}))^{\frac{1}{n}}, \qquad (7.7.13)$$

где комплексные веса вычисляются по формуле:

$$v_l = \frac{(\prod_{k=1}^{n} (\sigma_{rk} + i\sigma_{ik}))^{\frac{1}{n}}}{\sigma_{rl} + i\sigma_{il}} . \qquad (7.7.14)$$

Таким образом можно избежать серьезных вычислительных трудностей и построить комплекснозначную модель заданной точности. В последней главе монографии этот метод будет использоваться при построении сложных многофакторных комплекснозначных моделей.

При этом, конечно же, следует тщательно следить за пределами изменения показателей и их коэффициентов, поскольку многие комплекснозначные функции являются многолистными и периодическими, в результате чего в погоне за сложностью модели можно получить бессмысленную модель.

7.8. Обобщение главы

Теория функций комплексного переменного ограничивается исследованием однофакторных комплексных переменных. Экономика представляет собой сложный объект для исследования, и стремление в максимальной степени учесть реальную сложность взаимосвязей при её моделировании неминуемо направляет нас по пути построения многофакторных зависимостей. В этой главе было показано, что многофакторные комплекснозначные модели действительно существенно расширяют математический аппарат исследователя. С помощью такого аппарата удаётся решать задачи, которые в области действительных переменных даже не могли быть поставлены. Классификационные модели, в которых каждая комплексная переменная представляет собой две части одного целого экономического показателя или фактора, позволяют промоделировать разный вклад этих составляющих в результат. Эффективность таких моделей была продемонстрирована на примере производственных функций реально хозяйствующего субъекта и на примере комплексной модели экономики России с учётом её нелегальной части.

Отмечая перспективность многофакторного комплекснозначного моделирования, следует всё же указать на то, что порой при их построении возникают весьма трудоёмкие задачи оценивания параметров моделей, поскольку количество неизвестных коэффициентов таких моделей велико.

В этой главе были рассмотрены в основном степенные многофакторные комплекснозначные модели, поскольку в экономическом анализе с помощью действительных переменных превалируют линейные и степенные мультипликативные многофакторные модели.

В последнем параграфе было показано – как можно строить сложные нелинейные многофакторные модели комплексных переменных с помощью синтеза однофакторных комплекснозначных моделей в многофакторную.

Богатство аппарата теории функций комплексных переменных (а в данной главе показано, что можно работать именно с моделями не одной, а нескольких комплексных переменных) открывает многоплановые перспективы для практического использования комплекснозначных моделей в моделировании экономики.