КОМПЛЕКСНАЯ ДИСПЕРСИЯ В СОВРЕМЕННОЙ ЭКОНОМЕТРИКЕ

Svetunkov Sergey

Professor of the National Research University "Higher School of Economics".

St. Petersburg, 194100, St. Petersburg, ul. Kantemirovskaya 3, building. 1, letter A.

sergey@svetunkov.ru,

Реферат

Комплексные переменные всё чаще и чаще используются экономистами для моделирования сложных экономических процессов. Но при попытке использование моделей комплексных переменных на практике они сталкиваются с тем, что аппарат математической статистики комплексной переменной не позволяет построить эконометрические модели комплексных переменных. В основе математической статистики комплексной переменной лежит предположение о независимости её действительной и мнимой частей. Это предположение не позволяет развить аппарат математической статистики и не позволят развиваться современной эконометрике в данном направлении. В статье обосновывается отказ от независимости действительной и мнимой частей комплексных переменных. Это приводит к необходимости рассмотрения основных статистических характеристик комплексной случайной величины как комплексных величин. И главным в ряду этих характеристик является комплексная дисперсия, опираясь на которую, можно существенно развить математический аппарат современной эконометрики.

Keywords & JEL Classification codes

Complex variable, Econometric modeling, Dispersion, Mean square deviation, Coefficient of pair correlation, Confidence interval. C40, C46

Введение

Всё в большей и большей степени в научных исследованиях экономики используются эконометрические методы и модели. Но арсенал математических методов, которые используются в экономике, в том числе и эконометрики, не полностью удовлетворяет потребностям исследователей экономики. Существует большое количество экономических задач, которые до сих пор не имеют удовлетворительного решения. Это стимулирует учёных к непрерывному поиску новых методов построения экономико-математических моделей, с помощью которых можно будет более результативно исследовать экономику.

Одним из перспективных направлений развития инструментов исследования экономики является использование методов теории функций комплексных переменных. Это новое научное направление в экономике пока что только делает первые робкие шаги. Примеров, когда экономисты используют комплексные переменные в своих исследованиях, пока ещё очень мало, но они встречаются.

Так при моделировании экономической динамики учёные сталкиваются с необходимостью использования комплексных переменных. Эти переменные иногда появляются как результат вычисления характеристических корней уравнений (Hommes 2006; Caputo 2005; Carboni et al. 2013). Иногда комплексные переменные используются при применении сложных математических моделей, например, при использовании спектрального анализа в экономике, когда имеющиеся экономические данные рассматриваются как случайные сигналы (Diebold et al. 1997). Ещё чаще экономисты сталкиваются с ситуациями, когда могут быть использованы комплексные переменные при математическом моделировании дисконтированных денежных потоков (Anderson 2013; Bodmer 2014). Однако эти случаи не находят дальнейшего научного развития и осмысления, поскольку для практического применения этих случаев с комплексными переменными нужны адекватные рекомендации по статистической обработке случайных комплексных переменных. А таких рекомендаций наука пока ещё не дала.

В теории функций комплексного переменного известен раздел под названием z-transformation of Laurent. Этот раздел активно используется математиками для решения сложных дифференциальных уравнений. Поэтому можно было бы ожидать значительно более частого использования z-transformation of Laurent в моделировании экономики. Однако попытки такого рода встречаются в экономике крайне редко (Heij 1997; Semenychev 2015).

В этом ряду случайных встреч экономистов с комплексными переменными особняком стоит работа Ben Tamari (1997), который, изучая балансы денежных потоков на макроуровне, использовал в качестве основной модели элементарную функцию комплексных переменных. Однако эта работа осталась незамеченной экономистами. Кроме того, она является в большей степени исследованием свойств функции комплексной переменной, которой даны некоторые черты реальной экономики, чем исследованием свойств экономики с помощью соответствующей модели. Кроме того, и практическое применение выводов и рекомендаций Ben Tamari не является очевидным.

Ситуация начала изменяться, когда была опубликована книга, посвящённая complex-valued modeling in economics and finance (Svetunkov 2012). Модели комплексных переменных здесь используются как основные виды математических уравнений. Здесь же приводятся некоторые рекомендации по эконометрике комплексных переменных, но не рассматривается фундаментальный вопрос – о дисперсии комплексной переменной, отчего доказательная сила всех эконометрических моделей, рассмотренных в этой книге, оказывается не столь убедительной.

Сложная ситуация с использованием моделей комплексных переменных связана с тем, что в математической статистике раздел, посвящённый исследованию случайных комплексных переменных, до сих пор представляется слабо разработанным. Интерес к статистической обработке наблюдений за изменением комплексной переменной возник в 50–60-х годах XX века. Впервые эту задачу сформулировал R. Wooding (1956), предложивший подход по представлению комплексной случайной величины с позиций нормального распределения. R.Arens (1957) и I.S.Reed (1962) сформулировали основные понятия и характеристики случайной нормально распределённой комплексной переменной, такие как математическое ожидание, моменты (в том числе и корреляционный момент), ковариацию, дисперсию и др. При этом априорно предполагалось, что рассматривается ситуация независимых нормально распределённых вещественной и мнимой частей, но только N.R.Goodman (1963) сформулировал это предложение в явном виде. С тех пор учёные стали рассматривать распределение комплексной случайной величины как агрегат двух независимых нормально распределённых случайных величин – действительной и мнимой частей. Систематизировал эти положения W. Feller (1966). И до сих пор это предположение о независимости действительной и мнимой частей комплексной случайной переменной является фундаментальной предпосылкой математической статистики комплексной случайной переменной.

Расширение круга задач моделирования с помощью комплексных переменных в самых разных сферах науки потребовало от учёных развития и аппарата математической статистики, позволяющего это сделать. Поскольку эта задача волнует не только экономистов, но и специалистов, работающих в области комплексных переменных в других науках, то, опираясь на вещественную форму дисперсии комплексной случайной величины, был предложен адаптированный метод наименьших квадратов (Tavares et al. 2007).

Однако на этом развитие инструментов статистики комплексной случайной величины остановилось – пока что не предложены ни инструменты для вычисления комплекснозначных корреляций, ни инструменты для определения доверительных границ, ни другие инструменты статистической обработки случайных комплексных переменных.

Поскольку задача статистической обработки данных, представленных в форме комплексной случайной величины, является актуальной для экономики и, в первую очередь для такого важного раздела экономики, как эконометрика, существует объективная потребность со стороны учёных в разработке соответствующего и адекватного математического аппарата.

Материалы и методы

Базовая модель комплекснозначной экономики

Прежде всего, сформулируем наше представление о том, как могут быть использованы модели комплексных переменных при решении экономических задач.

Комплексная переменная сама по себе может рассматриваться как модель, которая характеризует свойства объекта более комплексно, поскольку состоит из двух действительных переменных, а не из одной, как это характерно для моделей действительных переменных.

Когда мы в экономике рассматриваем такой экономический показатель, как, например, валовая прибыль G, то мы понимаем, что он даёт возможность оценить только одну сторону сложного экономического явления – результаты производственного процесса. Не случайно поэтому, что в ситуации принятия решений, никто не довольствуется только критерием максимума валовой прибыли. Для более полного осмысления ситуации и принятия правильного решения изучают дополнительные показатели результатов производства. В реальной экономике в качестве не менее важного экономического показателя рассматривают показатели затрат на производство продукции C. А потом, соотнеся валовую прибыль с издержками производства, вычисляют, например, рентабельность. Поскольку именно рентабельность является тем экономическим показателем, который отражает и затраты, и результаты, то есть, является показателем экономической эффективности производства, его используют как ещё один дополнительный показатель для принятия экономического решения.

В реальной экономической практике, описывая с помощью моделей действительных переменных некоторый производственный процесс, для принятия решения учёные вынуждены моделировать и валовую прибыль, и издержки производства. Поскольку построение двух моделей не очень удобно и более затратно, то строят одну модель, складывая валовую прибыль с издержками, в результате чего получают валовой выпуск. Именно валовой выпуск и рассматривается в экономико-математическом моделировании как основной производственный результат.

Желание одновременного моделирования двух экономических переменных – валовой прибыли и издержек производства легко удовлетворяется, если рассматривать производственный результат как комплексное число. Это комплексное число в таком случае само по себе выступает как модель, отражающая результаты производства. Для рассматриваемого случая оно может быть представлено в таком виде:

$$Z = C + iG \quad (1)$$

Здесь i – мнимая единица, относительно которой известно, что она обладает свойством $i^2=-1$.

Рассматривая и моделируя новое число Z, мы тем самым одновременно учитываем и валовую прибыль G, и издержки производства C, поскольку они являются неотъемлемыми характеристиками комплексного числа. То есть, выполняя действия с одной комплексной переменной, исследователь выполняет тем самым действие с двумя действительными переменными. Следовательно, использование комплексной переменной типа (1) как некоторой модели, связывающей воедино две экономические переменные, позволяет получить значительно более компактную запись, с одной стороны, и включить в экономико-математическую модель более подробную информацию о моделируемом объекте, с другой стороны, и рассматривать их во взаимосвязи - с третьей стороны.

Но если бы только на этом заканчивались новшества, вводимые в экономико-математическое моделирование применением комплексных переменных, то, может быть, этого делать и не стоило. Моделируемые с помощью комплексных переменных экономические показатели и процессы значительно более обширны, чем это кажется на первый взгляд. Действительно, если просто просуммировать вещественную и мнимую части переменной (1), то можно получить известный показатель - валовую выручку:

$$Q = C + G. \quad (2)$$

Любое комплексное число может быть представлено в тригонометрической или экспоненциальной форме. Для модели (1) получим:

$$Z = C + iG = R(\cos\theta + i\sin\theta) = Re^{i\theta}. \quad (3)$$

Легко заметить, что тангенс полярного угла θ этого комплексного числа представляет собой рентабельность, поскольку:

$$\frac{G}{C} = r = tg\theta. \quad (4)$$

А модуль этого комплексного числа даёт некоторую новую характеристику, которая может быть названа «масштабом» производства:

$$R = \sqrt{C^2 + G^2}. \quad (5)$$

То есть, моделируя поведение только одной комплексной переменной, исследователь тем самым получает возможность одновременно учитывать и использовать ряд дополнительных показателей, являющихся производными от них. В рассматриваемом случае – получается использование сразу четырёх важных экономических показателей: валовой прибыли *G*, издержек производства *C*, валового выпуска *Q* и рентабельности *r*.

Таким образом, даже простое представление экономических показателей и факторов в форме комплексного числа (1) уже даёт много новых возможностей для исследователя и экономико-математического моделирования. Но и сами математические действия с комплексными числами дают результат, нетривиальный для действий с вещественными числами. Используя этот новый для экономики математический аппарат, тем самым расширяется инструментальная база моделирования экономики, поскольку модели комплексных переменных иначе описываются взаимосвязь между переменными, нежели модели действительных переменных. Зачастую происходит так, что очень сложные взаимосвязи между действительными переменными проще описать с помощью моделей и методов теории функций комплексных переменных, нежели с помощью моделей действительных переменных.

Базовая complex-value model представляет собой функциональную зависимость одной комплексной переменной y_r+iy_i от другой комплексной переменной x_r+ix_i:

$$y_r + iy_i = f(x_r + ix_i). \quad (6)$$

Поскольку любая комплексная переменная представляется графически точкой на плоскости декартовой системы координат, то равенство (6) означает, что одной точке на комплексной плоскости переменных x ставится в соответствие другая точка (а в некоторых случаях – несколько точек) на комплексной плоскости переменных y.

Базовую модель (6), в соответствии со свойствами комплексных чисел, можно представить как систему двух равенств действительных переменных:

$$\begin{cases} y_r = f_r(x_r; x_i) \\ y_i = f_i(x_r; x_i) \end{cases} . \qquad (7)$$

Например, простейшая линейная комплекснозначная функция

$$y_r + iy_i = (a_0 + ia_1)(x_r + ix_i) \qquad (8)$$

может быть представлена в виде системы двух равенств:

$$\begin{cases} y_r = a_0 x_r - a_1 x_i \\ y_i = a_0 x_i + a_1 x_r \end{cases} . \qquad (9)$$

Откуда следует вывод о том, что изменение одного из показателей комплексной переменной x ведёт к изменению как действительной, так и мнимой частей комплексной переменной y. То есть, функции комплексных переменных по определению являются многофакторными.

Частным случаем базовой модели (6) выступает модель комплексного аргумента, когда в левой части равенства имеется только действительная часть:

$$y_r = f(x_r + ix_i) . \qquad (10)$$

Эту модель в общем виде можно представить как функцию комплексных переменных, у которой мнимая часть равна нулю:

$$y_r + i0 = f(x_r + ix_i) . \qquad (11)$$

Для целого ряда экономически задач интерес представляет обратная к (10) функция:

$$x_r + ix_i = f(y) . \qquad (12)$$

Это – функция комплексных переменных с действительным аргументом. Простым примером такой функции может служить функция вида:

$$x_r + ix_i = y^{(a_0 + ia_1)} . \qquad (13)$$

Здесь изменение одной переменной y определяет одновременное изменение двух переменных x_r и x_i. Если моделировать такую ситуацию с помощью моделей действительных переменных, то необходимо использовать систему двух уравнений. Компактность моделирования сложных процессов – очевидное преимущество моделей комплексных переменных, но не единственное.

Простые модели комплексных переменных имеют очень сложные аналоги в области действительных переменных. Эти функции действительных переменных чаще всего оказываются столь сложными, что применять их на практике не имеет смысла. При этом, выполняя какие-либо математические действия с двумя действительными переменными, выполняются математические операции только с этими двумя переменными, а, выполняя аналогичные действия с двумя комплексными числами, например, умножая одно комплексное число на другое комплексное число, тем самым одновременно выполняется математическая операция сразу с четырьмя действительными числами.

Сразу следует оговориться, что вышесказанное вовсе не означает, что математические действия с комплексными переменными лучше, чем такие же действия с действительными переменными, а модели комплексных переменных лучше, чем модели действительных переменных. Нет! Всё вышесказанное следует трактовать только так – математические действия с комплексными экономическими переменными дают *другие* результаты и математические модели комплексных экономических переменных моделируют *другие* экономические процессы. В некоторых случаях модели комплексных переменных будут лучше описывать экономические процессы, чем модели действительных переменных, а в некоторых – хуже.

Но именно представление пары экономических показателей в форме комплексного числа, как это сделано в случае производственного результата (1), открывает перед экономистами возможность использования в целях моделирования экономики теорию функций комплексного переменного.

Дисперсия комплексной переменной

В современной математической статистике рассматривается не вариация комплексной случайной переменной в целом, а вариация её независящих друг от друга составляющих – действительной и мнимой частей. В такой ситуации статистические характеристики комплексной случайной переменной рассматриваются как вещественные величины. Для этого при вычислении действительных характеристик комплексной случайной величины её перемножают на сопряжённое число (complex conjugate). Эта процедура, как известно, позволяет получить вещественную характеристику комплексного числа. Дисперсию комплексной случайной переменной (variance of a complex variable) представляют как математическое ожидание квадрата модуля соответствующей центрированной величины (Bliss 2013; Panchev 2013; Steven M.Kay 2010; Tuelay et al. 2011):

$$D(z) = M[|z|] = M[|x_r + ix_i|] = M[(x_r + x_i)(x_r - x_i)] = M[x_r^2] + M[x_i^2], \qquad (14)$$

где

$$M[x_r^2] = M[(x_r - \bar{x}_r)^2] = D(x_r), \qquad (15)$$

$$M[x_i^2] = M[(x_i - \bar{x}_i)^2] = D(x_i). \qquad (16)$$

То есть:

$$D(z) = D(x_r) + D(x_i) \qquad (17)$$

Но такая трактовка дисперсии комплексной случайной переменной ограничивает возможности статистической обработки данных. Покажем это на примере определения корреляций между двумя случайными комплексными переменными. Действительно, коэффициент парной корреляции для действительных переменных можно найти с помощью корреляционного момента и дисперсий:

$$r_{XY} = \frac{\mu_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}. \qquad (18)$$

Воспользуемся этим подходом для вычисления корреляции между комплексными случайными переменными. При этом корреляционный момент представляют как вещественную величину, используя одну из переменных в сопряжённой форме, а дисперсии вычисляя как вещественные характеристики в соответствии с (14) [Miyabe, Panchev]. Необходимо обратить внимание на то, что корреляционный момент, рассчитываемый как

$$\mu_{XY} = M[(x_r + ix_i)(y_r - iy_i)] \qquad (19)$$

не будет вещественным числом. Он будет является комплексным числом, поскольку выполняя перемножение и группируя слагаемые, получим:

$$\mu_{XY}=M[x_r y_r]+M[x_i y_i]+i(M[x_i y_r]-M[x_r y_i])= \\ \mu_{x_r y_i}+\mu_{x_i y_i}+i(\mu_{x_i y_r}-\mu_{x_r y_i}). \tag{20}$$

И только в том случае, когда $z_X=z_Y$, последнее слагаемое (20) при мнимой единице становится равным нулю и корреляционный момент становится вещественным числом. Во всех остальных случаях корреляционный момент будет комплексным, а, значит, и коэффициент парной корреляции между двумя случайными комплексными переменными будет являться комплексной величиной. Понимая это, учёные заявляют о том, что они вычисляют абсолютное значение (the absolute value) корреляционного момента, то есть вместо (19) используют $\mathrm{Re}(\mu_{XY})$ (Miyabe,2015).

Тем не менее, определим вид коэффициента парной корреляции, используя (19).

Будем для простоты записи считать, что рассматривается дискретный ряд комплексной случайной величины *z*, которая центрирована относительно её средней арифметической, а потому:

$$z-\overline{z}=x_r-\overline{x}_r+i(x_i-\overline{x}_i)\Leftrightarrow z=x_r+ix_i\ . \tag{21}$$

Выборочное значение коэффициента корреляции (18) при использовании вещественной дисперсии (14) и корреляционного момента (19) будет иметь такой вид:

$$r=\frac{\mu_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}=\frac{\sum(y_i y_r+x_i x_r)+i(\sum(x_r y_i-y_r x_i))}{\sqrt{\sum(y_r{}^2+y_i{}^2)\sum(x_r{}^2+x_i{}^2)}}\,. \tag{22}$$

С другой стороны необходимо вспомнить о том, что коэффициент парной корреляции в области действительных чисел был предложен в 90-х годах XIX века К.Пирсоном для оценки линейной взаимосвязи случайных переменных, определяя его как среднее геометрическое коэффициентов регрессий *y* на *x* и *x* на *y* (Pearson 2013):

$$r=\pm\sqrt{a_1b_1}\ , \tag{23}$$

где коэффициенты пропорциональности линейных регрессий a_1 и b_1 найдены с помощью метода наименьших квадратов.

Для того чтобы найти формулу расчёта выборочного значения коэффициента парной корреляции для случая двух комплексных случайных величин с помощью подхода К.Пирсона (23) будем оперировать тем вариантом МНК, который следует из предположения о вещественном характере дисперсии комплексной переменной (Tavares et al. 2007) . Комплексный коэффициент регрессии линейной зависимости комплексной случайной переменной *Y* от другой комплексной случайной переменной *X* с помощью этого подхода к МНК будет вычисляться так:

$$a=\frac{\sum(y_r+iy_i)(x_r-ix_i)}{\sum(x_r+ix_i)(x_r-ix_i)}=\frac{\sum(y_r+iy_i)(x_r-ix_i)}{\sum(x_r^2+x_i^2)}\,. \tag{24}$$

Обратная зависимость комплексной случайной переменной *X* от другой комплексной случайной переменной *Y*, представляемая в линейной форме, имеет такую формулу для расчёта комплексного коэффициента регрессии, найденного с помощью МНК:

$$b=\frac{\sum(x_r+ix_i)(y_r-iy_i)}{\sum(y_r+iy_i)(y_r-iy_i)}=\frac{\sum(x_r+ix_i)(y_r-iy_i)}{\sum(y_r^2+y_i^2)}\,. \tag{25}$$

Подставляя эти формулы оценивания выборочных значений коэффициентов пропорциональности линий регрессий *Y* на *X* и *X* на *Y* в (23), получим формулу для вычисления выборочного значения комплексного коэффициента парной корреляции:

$$r = \sqrt{a_1 b_1} = \frac{\sum (x_r y_r + x_i y_i) + i \sum (x_i y_r - x_r y_i)}{\sqrt{\sum (y_r^2 + y_i^2) \sum (x_r^2 + x_i^2)}}. \qquad (26)$$

А теперь сравним друг с другом формулу (22) и формулу (26). Это должен быть один и тот же коэффициент, вычисленный, исходя из одних и тех же базовых предпосылок. Но если знаменатели формул (21) и (26) совпадают, то их числители принципиально отличны друг от друга. Это разные формулы, которые вычисляют разные коэффициенты, и эти коэффициенты будут давать самые разные значения для одного и того же ряда. А потому и не понятной: следует использовать первую формулу (22), следует ли использовать вторую формулу (26) или же вообще ни одну из них использовать нельзя? Получен противоречивый результат, который и не позволяет учёным сформировать раздел комплексных корреляций.

Даже если согласиться с теми предложениями, которые делаются сторонниками концепции вещественного характера дисперсии комплексной случайной величины и вместо комплексных характеристик использовать их вещественные части (Miyabe 2015), противоречие не будет снято.

Действительно, для (22) тогда будем иметь:

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\mu_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{\sum (y_i y_r + x_i x_r) + i\left(\sum (x_r y_i - y_r x_i)\right)}{\sqrt{\sum ({y_r}^2 + y_i^2) \sum ({x_r}^2 + x_i^2)}}\right) = \frac{\sum (y_i y_r + x_i x_r)}{\sqrt{\sum ({y_r}^2 + y_i^2) \sum ({x_r}^2 + x_i^2)}}, \qquad (27)$$

а для (26) получим:

$$\mathrm{Re}(\sqrt{a_1 b_1}) = \mathrm{Re}\left(\frac{\sum (x_r y_r + x_i y_i) + i \sum (x_i y_r - x_r y_i)}{\sqrt{\sum (y_r^2 + y_i^2) \sum (x_r^2 + x_i^2)}}\right) = \frac{\sum (x_r y_r + x_i y_i)}{\sqrt{\sum (y_r^2 + y_i^2) \sum (x_r^2 + x_i^2)}}. \qquad (28)$$

Как видно из сравнения двух результатов, вновь получены разные формулы и противоречивый результат. Именно поэтому P.Schreier и L. Scharf отмечают, что научные исследования в области корреляции случайных комплексных переменных дают пока что неутешительные результаты (Schreier et al. 2010).

Точно такие же проблемы возникают и на пути изысканий в части статистических гипотез и других разделов математической статистики комплексных переменных, в той или иной степени опирающихся на важную меру колеблемости – дисперсию. Поскольку в экономике при рассмотрении какого-либо объекта или явления учёные сталкиваются с тем, что между факторами и между показателями всё же имеется взаимосвязь (тесная или косвенная) то предположение о том, что дисперсии вещественной и мнимой частей не зависят друг от друга, выполняется крайне редко. Поэтому и гипотеза о том, что дисперсия комплексной случайной величины всегда должна быть вещественной, не может быть принята за основу в эконометрике. Напротив, дисперсия экономической комплексной случайной переменной должна быть представлена как комплексная характеристика колеблемости случайного комплексного ряда.

Тогда комплексная дисперсия случайной комплексной величины может быть записана так:

$$D_c(z) = M[z^2] = M[|z| e^{i2\theta}] = M[|z| \cos 2\theta] + M[|z| \sin 2\theta], \qquad (29)$$

где $\theta = arctg \frac{x_i}{x_r} + 2\pi k, k = 0,1,2,...,$

Легко заметить, что дисперсия (14) является частным случаем дисперсии (29), а именно – когда полярный угол θ между действительной и мнимой частями случайной комплексной переменной равен $\theta = \pi k, k = 0,1,2,...$, то есть – действительная и мнимая части не зависимы друг от друга.

Насколько предлагаемая гипотеза о зависимости дисперсий вещественной и мнимой частей друг от друга и о том, что дисперсия комплексной переменной должна рассматриваться как комплексная величина, поможет в решении прикладных эконометрических задач? Для ответа на этот вопрос вновь вернёмся к вычислению корреляций между комплексными случайными величинами двумя способами, которые ранее привели нас в тупик, если предполагать, что дисперсия комплексной переменной есть действительное число.

Мы будем рассматривать все характеристики комплексной случайной величины как комплексные числа. Поэтому не будем прибегать к их искусственной трансформации в вещественные числа этих характеристик перемножением комплексного числа на сопряжённое ему число. Представим корреляционный момент двух случайных комплексных переменных как комплексное число:

$$\begin{aligned} \mu_{XY} &= M[x_r y_r] - M[x_i y_i] + i(M[x_i y_r] + M[x_r y_i]) = \\ &\mu_{x_r y_i} - \mu_{x_i y_i} + i(\mu_{x_i y_r} + \mu_{x_r y_i}). \end{aligned} \qquad (30)$$

Подставляя теперь значения комплексной дисперсии (27) и комплексного корреляционного момента (30) в формулу для расчёта коэффициента парной корреляции (18), получим:

$$r_{XY} = \frac{\mu_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\sum (x_r + ix_i)(y_r + iy_i)}{\sqrt{\sum (x_r + ix_i)^2 \sum (y_r + iy_i)^2}} = \frac{\sum (x_r y_r - x_i y_i) + i \sum (x_r y_i + x_i y_r)}{\sqrt{\sum (x_r + ix_i)^2 \sum (y_r + iy_i)^2}}. \qquad (31)$$

Полученная формула для расчёта выборочного значения коэффициента парной корреляции двух случайных переменных (20) не совпадает ни с одной из ранее выведенных формул (22) и (26), когда все характеристики предполагались вещественными.

Найдём теперь комплексный коэффициент парной корреляции вторым путём - как среднее геометрическое выборочных значений коэффициентов регрессии. Для этого сформулируем критерий МНК. Следует напомнить, что при предположении о том, что дисперсия комплексной случайной переменной есть вещественная величина, метод наименьших квадратов заключается, по сути, в поиске таких коэффициентов регрессии, при которых:

$$M[(\varepsilon_r + i\varepsilon_i)(\varepsilon_r - i\varepsilon_i)] = M[\varepsilon_r^2 + \varepsilon_i^2] \rightarrow \min. \qquad (32)$$

где $\varepsilon_r = y_r - \hat{y}_r$, $\varepsilon_i = y_i - \hat{y}_i$ - ошибки аппроксимации.

В случае комплексной дисперсии комплексной случайной величины метод наименьших квадратов сводится к поиску других коэффициентов, при которых (Svetunkov 2012, p. 83):

$$M[(\varepsilon_r + i\varepsilon_i)^2] = M[\varepsilon_r^2 + i2\varepsilon_r\varepsilon_i - \varepsilon_i^2] \rightarrow \min. \qquad (33)$$

Здесь можно обратить внимание на взаимосвязь между критериями (32) и (33). Для этого представим комплексную ошибку аппроксимации в экспоненциальной форме:

$$\varepsilon_r + i\varepsilon_i = Re^{i\theta} = \sqrt{\varepsilon_r^2 + \varepsilon_i^2}\, e^{iarctg\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_r}}. \qquad (34)$$

С учётом этого критерий (32) будет иметь такой вид:

$$M[(\varepsilon_r + i\varepsilon_i)(\varepsilon_r - i\varepsilon_i)] = M[R^2] \rightarrow \min, \qquad (35)$$

а критерий (33) такой вид:

$$M[(\varepsilon_r + i\varepsilon_i)^2] = M[R^2 e^{i2\theta}] \to \min, \qquad (36)$$

Следовательно, критерий МНК (32), предложенный G.N.Tavares и L.M.Tavares, является частным случаем критерия (33) – когда полярный угол комплексной ошибки аппроксимации равен нулю.

Теперь, используя критерий (33) применительно к комплексному коэффициенту регрессии комплексного *X* на комплексное *Y*, обозначенному как *a*, получим с помощью МНК при критерии (33) такую формулу (Svetunkov 2012, p. 103 – 112):

$$a = \frac{\sum (x_r + ix_i)(y_r + iy_i)}{\sum (x_r + ix_i)(x_r + ix_i)}. \qquad (37)$$

Комплексный коэффициент пропорциональности *b* обратной регрессии также может быть найден с помощью (33) как:

$$b = \frac{\sum (x_r + ix_i)(y_r + iy_i)}{\sum (y_r + iy_i)(y_r + iy_i)}. \qquad (38)$$

Теперь, подставляя эти коэффициенты в формулу для вычисления коэффициента парной корреляции (23), получим:

$$r_{XY} = \sqrt{a_1 b_1} = \frac{\sum (x_r + ix_i)(y_r + iy_i)}{\sqrt{\sum (x_r + ix_i)^2 \sum (y_r + iy_i)^2}} = \frac{\sum (x_r y_r - x_i y_i) + i \sum (x_r y_i + x_i y_r)}{\sqrt{\sum (x_r + ix_i)^2 \sum (y_r + iy_i)^2}}. \qquad (39)$$

Как видно, получена та же самая формула комплексного коэффициента парной корреляции (31), что и в случае вычисления её через комплексный корреляционный момент (29). Это значит, что получен непротиворечивый результат. Коэффициент парной корреляции (31) между двумя случайными комплексными переменными, вычисленный через дисперсию и корреляционный момент, и коэффициент парной корреляции, вычисленный через среднее геометрическое коэффициентов линейной регрессии, имеет один и тот же вид. Это в свою очередь означает, что наша гипотеза о том, что в статистике комплексных случайных переменных следует использовать комплексную дисперсию и другие комплексные характеристики комплексных переменных подтверждается.

Обратимся теперь к анализу свойств комплексной дисперсии комплексной случайной величины (27), использование которой в эконометрике комплексных случайных переменных мы только что обосновали. Для этого запишем комплексную дисперсию в арифметическом виде:

$$D_c(z) = M[z^2] = M[x_r^2] - M[x_i^2] + i2M[x_r x_i]. \qquad (40)$$

Комплексная дисперсия в зависимости от того, какой характер принимают её вещественная и мнимая части, может быть комплексной, действительной, а может быть и мнимой величиной - разнообразие её значений соответствует многообразию свойств комплексной случайной переменной. При этом комплексная дисперсия может быть как положительной, так и отрицательной. Рассмотрим эти варианты и свойства ряда комплексной случайной величины, для которого такие варианты комплексной дисперсии имеют место.

Прежде всего, обратим внимание на мнимую часть комплексной дисперсии (40):

$$\mathrm{Im}[D_c(z)] = 2M[x_r x_i]. \qquad (41)$$

Она имеет простой смысл – это удвоенная ковариация между действительной и мнимой частями случайной комплексной переменной. Если между переменными нет корреляции, то ковариация переменных равна нулю. Это значит, что мнимая часть комплексной дисперсии служит основанием для предположения о наличии или отсутствии корреляции между действительной и мнимой частями комплексной случайной переменной.

Не менее информативна для исследователя и действительная часть комплексной дисперсии комплексной случайной величины:

$$\mathrm{Re}[D_c(z)] = M[x_r^2] - M[x_i^2] \qquad (42)$$

Как видно, она характеризует степень отличия дисперсии вещественной части комплексной случайной переменной от дисперсии мнимой части этой же переменной. Поэтому в том случае, когда дисперсии действительной и мнимой частей комплексной переменной равны друг другу, действительная часть комплексной дисперсии будет равна нулю. Если же дисперсия действительной части комплексной переменной больше дисперсии мнимой части комплексной переменной, то вещественная часть (40) комплексной дисперсии будет положительной, а в противоположном случае – отрицательной.

Примечательно, что обоснование комплексного характера комплексной случайной величины вовсе не отрицает возможность применения дисперсии в вещественной форме – она может быть использована как дополнительная характеристика исследуемого процесса, поскольку вещественная дисперсия характеризует меру колеблемости модуля комплексной дисперсии.

Результаты

Покажем теперь, как с помощью предложенного метода и методики оценки комплексной дисперсии комплексной случайной величины определить её основные характеристики. Для сравнения будем одновременно использовать метод и методику, которые вытекают из предположения о независимости вещественной и мнимой частей комплексной переменной и вещественного характера дисперсии.

Для примера возьмём данные Центрального банка России с 2 января 2017 года по 13 апреля 2017 года о курсах двух валют по отношению к рублю: евро и доллара США. Эти данные имеются в свободном доступе на сайте Центрального банка России: http://www.cbr.ru/currency_base/daily.aspx.

Будем рассматривать комплексную случайную переменную валют. К действительной части этой переменной отнесём стоимость евро в рублях (y_{rt}), а к мнимой части отнесём стоимость американского доллара в рублях (y_{rt}):

$$Z_t = y_{rt} + iy_{it}$$

Средняя арифметическая этой комплексной переменной за рассматриваемый промежуток равна:

$$\overline{(L+iK)} = 62,25 + i58,35\,. \qquad (43)$$

Выборочное значение действительной дисперсии этого комплексного ряда для данного периода наблюдений как вещественная мера колеблемости вычисляется с помощью формулы (14). Получим:

$$\sigma_Z^2 = 3,29; \quad \sigma = 1,81. \qquad (44)$$

Понять, что означает дисперсия (44) и её среднеквадратичное отклонение нельзя, поскольку сравнивать вещественное число с комплексным невозможно. Информацию о колеблемости ряда мы можем получить из дисперсий каждой из его составляющих:

$$\sigma_r^2 = 1,84; \quad \sigma = 1,36; \quad \sigma_i^2 = 1,49; \quad \sigma = 1,22\,. \qquad (45)$$

Теперь вычислим выборочное значение комплексной дисперсии рассматриваемой комплексной величины, руководствуясь формулой (40):

$$\sigma^2_{complex} = 0,35 + i3,09\,. \qquad (46)$$

По полученным значениям мы можем уже сделать некоторые выводы о характере рассматриваемого ряда. Во-первых, поскольку действительная часть комплексной переменной положительная, мы можем сделать вывод о том, что вариация мнимой части (рубля по отношению к доллару) за рассматриваемый период меньше, чем вариация её действительной части (рубля по отношению к евро). Это подтверждает и сравнение дисперсии вещественной и мнимой частей рассматриваемой переменной, которые были вычислены ранее (45).

Из того, что мнимая часть комплексной дисперсии не равна нулю и является довольно значительной величиной, можно сделать вывод о том, что между действительной и мнимой частями комплексной переменной существует некоторая взаимосвязь. И поэтому предположение о независимости их друг от друга, как это сегодня априорно делается в современной математической статистике, неверно.

Для того чтобы оценить колеблемость рассматриваемой комплексной переменной, рассчитаем значение среднего квадратичного отклонения данного ряда как квадратный корень из комплексной дисперсии (46):

$$\sigma_{complex} = 1,32 + i1,18\,. \qquad (47)$$

Простое сравнение комплексного среднеквадратичного отклонения (47) со среднеквадратичными отклонениями действительной и мнимой частей (45) показывает, что они отличаются друг от друга.

Теперь мы можем построить доверительные границы для изучаемой комплексной переменной. Воспользуемся вначале предположением о том, что действительная и мнимая части комплексной переменной не являются зависимыми друг от друга. Тогда используем среднеквадратичные отклонения действительной и мнимой частей (45). Поскольку в нашем распоряжении имеется 65 наблюдений, то при уровне доверительной вероятности для *t*-статистики Стьюдента на уровне 5% получим *t*=1,996. Для действительной части получим:

$$61,91 < y_r < 62,58\,. \qquad (48)$$

Точно также можно найти доверительные границы и для мнимой части:

$$58,00 < y_r < 58,70\,. \qquad (49)$$

Или в комплекснозначной форме:

$$61,91 + i58,00 < (y_r + iy_i) < 62,58 + i58,70\,. \qquad (50)$$

Вычислим теперь доверительные границы для комплексной случайной переменной, используя комплексную дисперсию или точнее – комплексное среднеквадратичное отклонение (47). В общем случае доверительные границы можно оценить так:

$$(y_r \bar{+} iy_i) - t_{\alpha,N}\frac{\sigma_{complex}}{\sqrt{n}} < (y_r + iy_i) < (y_r \bar{+} iy_i) + t_{\alpha,N}\frac{\sigma_{complex}}{\sqrt{n}}\,. \qquad (51)$$

Для рассматриваемого ряда получим:

$$62,08 + i58,21 < (y_r + iy_i) < 62,41 + i58,50\,. \qquad (52)$$

Можно заметить, сравнивая (48) и (49) с (51), что полученные доверительные границы близки друг к другу, но всё же отличаются друг от друга. Первый вариант доверительных границ построен при предположении о том, что действительная и мнимая части на зависят друг от друга, второй вариант – при предположении о наличии такой взаимосвязи. Но поскольку из (46) следует, что действительная и мнимая части рассматриваемой комплексной переменной коррелируют друг с другом, то использование комплексной дисперсии и комплексного среднеквадратичного отклонения для оценки доверительных границ более оправдано, чем использование их действительного аналога.

Обсуждение результатов

Доминировавшее в математической статистике предположение о независимости вещественной и мнимой составляющих комплексной случайной величины ограничивало инструментальную базу современной эконометрики комплексных переменных. Если дальнейшее развитие статистических методов обработки рядов комплексных случайных переменных было невозможно при использовании предпосылки о независимости друг от друга вещественной и мнимой частей этих переменных, то использование другого представления – о возможной корреляции между ними, - позволяет развивать этот аппарат. Введение в научный оборот комплексной дисперсии позволяет расширить аппарат математической статистики комплексной случайной переменной, в первую очередь ту его часть, которая активно используется в решении разнообразных эконометрических задач – корреляционный и регрессионный анализ.

Прежде всего, следует указать на использование метода наименьших квадратов для оценки параметров эконометрических моделей комплексной случайной переменной. Формальные основания этого метода (33) получены при использовании комплексной дисперсии (29), но свойства оценок метода наименьших квадратов, такие, как эффективность, несмещённость и состоятельность требуют дополнительного исследования. Особенно интересно рассмотреть оценки метода наименьших квадратов в условиях, когда распределение хотя бы одной составляющей (вещественной или мнимой) комплексной случайной величины отличается от нормального распределения.

Получение непротиворечивых результатов для вывода формулы комплексного коэффициента парной корреляции (31) позволяет вплотную заняться исследованием свойств этого коэффициента. Понятно, что в случае, когда между двумя случайными комплексными переменными имеется линейная функциональная зависимость, то комплексный коэффициент парной корреляции становится действительным числом, равным по модулю единице. Все остальные случаи корреляции между случайными комплексными переменными требуют тщательного исследования, в частности, ещё предстоит понять смысл мнимой составляющей комплексного коэффициента парной корреляции.

Важным является развитие подхода по определению доверительных границ статистических оценок комплексных случайных переменных (50). В статье рассмотрен самый простой случай для оценки доверительных границ выборочного значения средней арифметической комплексной случайной величины, обе части которой предполагаются нормально распределёнными. Интересными представляются исследования тех ситуаций, когда распределения действительной и мнимой частей не являются одинаковыми, например, действительная часть распределена по нормальному закону распределения, а мнимая часть имеет логнормальное распределение (lognormal distribution). Расширение этого подхода для выборочных значений оценок коэффициентов эконометрических моделей ещё предстоит осуществить.

Рассмотрение ситуации, когда между вещественной и мнимой частями комплексной случайной величины может быть случайная взаимосвязь, существенно расширило возможности по развитию инструментов комплекснозначной эконометрики. В статье была рассмотрена такая возможность на примере базовой характеристики – комплексной дисперсии случайной комплексной переменной (29). Как видно из полученных результатов, такой подход представляет экономисту дополнительные возможности по изучению такого сложного объекта, как экономика.

References

1. Anderson, Patrick. 2013. *The Economics of Business Valuation: Towards a Value Functional Approach*. Stanford University Press.
2. Arens, R. 1957. Complex processes for envelopes of normal noise. // *IRE Trans. Inform. Theory*, Sept., vol. IT-3: 204-207.
3. Bliss, Daniel W. 2013. Adaptive wireless communications. MIMO channels and networks. *Cambridge University Press*.
4. Bodmer, Edward. 2014. *Corporate and Project Finance Modeling: Theory and Practice*. John Wiley & Sons.
5. Caputo, Michael Ralph. 2005. *Foundations of Dynamic Economic Analysis*: *Optimal Control Theory and Applications*. Cambridge University Press.
6. Carboni, Oliviero A., Russu, Paolo. 2013. A model of economic growth with public finance: dynamics and analytic solution. *International Journal of Economics and Financial Issues* Vol. 3, No. 1: 1-13
7. Diebold, Francis X., Ohanian, Lee E., Berkowitz Jeremy. 1997. Dynamic Equilibrium Economies: A Framework for Comparing Models and Data. *Review of Economic Studies* 65: 433-452.
8. Feller W. 1966. *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, vol. II. New York: Wiley.
9. Goodman N.R. 1963. Statistical analysis based on a certain multivariate complex Gaussian distribution. // *Ann. Math. Statist*, vol. 34: 152-176.
10. Heij, C. 1997. *System Dynamics in Economic and Financial Models.* Wiley
11. Hommes Cars H. 2006. Heterogeneous agent models in economics and finance. *In Handbook of Computational Economics*, Volume 2. Ed. Leigh Tesfatsion and Kenneth L. Judd. 1109 – 1186. Elsevier B.V. doi: 10.1016/S1574-0021(05)02023-X.
12. McLean, Robert. 2002. *Financial Management in Health Care Organizations*. Cengage Learning.
13. Miyabe S. 2015. Estimating correlation coefficient between two complex signals // *Latent Variable Analysis and Signal Separation: 12th International Conference, LVA/ICA*, Liberec, Czech Republic, August 25-28, 2015, Proceedings**.**
14. Panchev S. 2013. *Random functions and turbulence*. Elsevier.
15. Pearson K. *On the general theory of skew correlation and nonlinear regression*. HardPress, 2013. 76 p.
16. Reed I.S. 1962. On a moment theorem for complex Gaussian processes. // *IRE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-8: 194-195.
17. Schreier Peter J., Scharf Louis L. 2010. *Statistical Signal Processing of Complex-Valued Data: The Theory of Improper and Noncircular Signals*. Cambridge University Press,. 309 p.
18. Semenychev E.V. 2015. *Zhiznennyj cikl ehkonomicheskih obektov – metodologiya i instru-mentarij parametricheskogo modelirovaniya*. SamNZ RAN, Samara.
19. Steven M.Kay. 2010. *Statistical Signal Processing: Estimation Theory*, volume 1. Prentice Hall PTR.

20. Svetunkov, Sergey. 2012. *Complex-Valued Modeling in Economics and Finance*. SpringerScience+Business Media, New York.

21. Tamari Ben. 1997. *Conservation and Symmetry Laws And Stabilization Programs in Economics*. Ecometry Ltd. (English).

22. Tavares, G. N., Tavares, L. M. 2007. On the Statistics of the Sum of Squared Complex Gaussian Random Variables. // *IEEE Transactions on Communications*, 55(10): 1857-1862.

23. Tuelay Adili, Peter J.Schreier, and Louis L. Scharf. 2011. Complex-valued signal processing: The proper way to deal with impropriety. *In IEEE Transactions on Signal Processing*, volume 59 (11): 5101- 5125.

24. Wooding R. A. 1956. The multivariate distribution of complex normal variables. // *Biometrika*, vol. 43: 212-215.