Светуньков С.Г. О возможности экономического прогнозирования с помощью степенной производственной функции комплексного переменного // Экономика региона, 2016. Т. 12, вып. 3, С. 966–976.

Введение

Сложность прогнозирования динамики экономических процессов и объектов предопределяет многообразие методов и моделей социально-экономического прогнозирования. В подавляющем большинстве случаев для этого используются, методы и модели, описывающие поведение ряда показателей, не вскрывая причинные связи [1,2,3 и др.]. В самом простом случае используются тренды, исходя из простого принципа – предполагается, что в силу инерции, присущей экономическим системам, сложившиеся тенденции будут продолжаться и в прогнозируемом будущем. На таком же простом принципе построены и модели авторегрессии, скользящего среднего и экспоненциального сглаживания. Но на практике чаще всего это предположение не выполняется, а потому точность прогнозов, выполняемых с помощью таких моделей не особенно высока. При этом следует отметить, что это – наиболее популярные модели прогнозирования, широко используемые и в экономической практике и в прогностической науке. Для повышения точности прогнозирования с помощью этих моделей разрабатываются их различные модификации, например, модели экспоненциального сглаживания в комплекснозначной форме.

В попытках получения более точных экономических прогнозов учёные обращаются к задаче построения таких моделей, в которых прогнозируемый показатель рассчитывается в зависимости от значений некоторых влияющих факторов [2], используя аппарат регрессионного анализа [4]. Такие модели строятся из более адекватных предпосылок, ведь только выявляя и описывая причинно-следственные связи сложного объекта, можно понять и особенности его поведения, и более точно его спрогнозировать. Но применительно к экономике и этот подход работает не всегда хорошо – любой прогнозируемый показатель отражает экономическое явление, являющееся результатом действия и взаимодействия множества факторов самой разной природы. При этом влияние таких факторов носит сложный, чаще всего нелинейный характер, да ещё и с задержкой во времени. И к тому же часть этих факторов оказывается неизвестной прогнозисту и он не может включить её в модель. В результате прогнозист вынужден ограничивать круг включаемых в прогнозную модель факторов только основными из них, что не может не привести к ухудшению точности прогнозов.

Следовало бы ожидать ещё большей точности от моделей, задачей которых является описание структуры прогнозируемой экономической системы и моделирование взаимосвязей между её элементами. Это стало возможным после появления на свет моделей межотраслевого баланса, которые до сих пор активно используют при решении различных экономических задач, в том числе и в задачах экономического прогнозирования [5, 6]. Перспективным направлением в этой области является использование методов адаптации этих моделей, например, методами стохастической аппроксимации. Это же относится и к другому направлению - моделям экономической динамики, бурный рост которых стал возможен после появления работы Р.Солоу, открывшей экономистам саму возможность построения таких моделей [7]. Адаптивные модели экономической динамики также являются предметом современных исследований прогнозистов.

Таким образом, задача повышения точности экономических прогнозов за счёт развития теоретической и инструментальной базы теории прогностики, остаётся актуальной.

Одним из перспективных направлений в этой области является применение к задаче экономического прогнозирования методов и моделей комплекснозначной экономики. Интерес к возможности построения регрессионных комплекснозначных моделей по имеющимся статистическим наблюдениям за изменением комплексной переменной возник ещё в 50–60-х годах XX века [8, 9, 10], но дальнейшего применения это направление не получило, хотя попытки улучшить аппарат математической статистики комплексных переменных делались и в последующем, вплоть до последних лет [11]. На наш взгляд главной проблемой в этом направлении было априорно высказываемое предположение о вещественном характере дисперсии комплексной переменной. Преодоление этого препятствия и позволило сформировать основы комплекснозначной экономики [12]

Особый интерес в комплекснозначном прогнозировании представляют модели производственных функций комплексных переменных. Производственные функции действительных переменных, описывая влияние основных производственных ресурсов на производственный результат, позволяют экономисту решать многочисленные практические задачи, в том числе и задачи экономического прогнозирования [13, 14]. Комплекснозначные модели производственной функции иначе описывают протекающие производственные процессы, расширяя тем самым инструментальную базу экономико-математического моделирования. А поскольку экономическая действительность весьма разнообразна, то расширение аппарата её моделирования за счёт включения в него моделей комплексных переменных позволяет описать такие процессы и взаимосвязи, которые модели действительных переменных не описывают. Поэтому от использования моделей производственных функций комплексных переменных в части экономического прогнозирования следует ожидать интересных результатов.

Методы

Производственная функция комплексных переменных описывает взаимосвязь таких показателей результатов деятельности предприятия как прибыль (G) и издержки (C), с основными производственными ресурсами, такими как труд (L) и капитал (K) [12].

В комплекснозначной экономике производственная функция в общем виде представляет собой некоторую зависимость комплексной переменной результата производственной деятельности $C_t + iG_t$ от комплексной переменной фактора $L_t + iK_t$:

$$C_t + iG_t = f(L_t + iK_t). \qquad (1)$$

Важным преимуществом такой модели по сравнению с моделями действительных переменных является то, что моделируется зависимость сразу двух экономических переменных от двух других переменных. Ведь модели производственных функций действительных переменных описывают зависимость одной переменной производственного результата Q_t от нескольких ресурсов, а модели комплексных переменных описывают зависимость двух показателей производственного результата C_t и G_t от тех же самых ресурсов. А с учётом того, что $Q_t = C_t + G_t$ то модель (1) описывает зависимость трёх производственных результатов от производственных ресурсов.

Зависимости (1) могут иметь самый различный вид – от простых линейных моделей до многофакторных степенных. Но даже простые линейные комплекснозначные производственные функции дают экономисту при их использовании на практике больше результатов, чем это получается с использованием моделей действительных переменных [15].

В данной статье рассмотрим одну из самых простых форм нелинейных комплекснозначных моделей производственных функций – степенную производственную функцию комплексных переменных с действительными коэффициентами [12]:

$$C_t + iG_t = a(L_t + iK_t)^b \qquad (2)$$

Если представить эту модель в экспоненциальной форме, то наглядно видны её свойства, делающие её пригодной для решения многочисленных практических задач экономики:

$$\sqrt{C_t^2 + G_t^2}\, e^{i\,arctg\frac{G_t}{C_t}} = a\left(\sqrt{L_t^2 + K_t^2}\, e^{i\,arctg\frac{K_t}{L_t}}\right)^b. \qquad (3)$$

Легко заметить, что полярный угол комплексного производственного ресурса характеризует такой важный экономический показатель как капиталовооружённость труда (K_t/L_t), а полярный угол производственного результата отражает величину другого важного экономического показателя – рентабельности (G_t/C_t). Тогда понятно, что при положительных значениях коэффициентов пропорциональности a и показателя степени b, моделируются такие производственные процессы.

Рост капитала при постоянстве труда (рост капиталовооружённости) приводит к увеличению полярного угла комплексного ресурса, что означает в модели пропорциональное увеличение полярного угла комплексного результата, то есть – рост рентабельности за счёт роста валовой прибыли в большей степени, чем издержек. Так обычно и происходит на практике, когда инвестиции в основной капитал повышают производительность труда, уменьшают производственные потери и приводят к повышению прибыли.

Если же при постоянной величине капитала увеличивать затраты труда, то здесь имеем аналогичную зависимость, но уже с издержками производства. Полярный угол производственных ресурсов в таком случае уменьшается, что моделирует пропорциональное уменьшение полярного угла комплексной переменной производственного результата, а это означает рост издержек в большей степени, чем прибыли. И это также является свойством реально работающих производственных систем.

Это означает, что предложенная модель производственной функции (2) хорошо отражает производственные процессы, а её характеристики имеют ясный экономический смысл.

Но помимо этого замечательного свойства степенной комплекснозначной производственной функции с действительными коэффициентами, она обладает ещё одним уникальным свойством – её коэффициенты легко вычисляются на каждом наблюдении, что открывает перед исследователем новые возможности для экономического анализа и прогнозирования.

Действительно, из экспоненциальной формы записи модели (3) со всей очевидностью следует, что показатель степени b может быть легко найден по формуле:

$$b_t = \frac{arctg\,\dfrac{G_t}{C_t}}{arctg\,\dfrac{K_t}{L_t}} + 2\pi k, \quad k = 0,1,2,3,\ldots . \qquad (4)$$

В теории функций комплексного переменного имеют дело с «главными» значениями периодических функций, когда $k=0$. Следуя этому правлу второе слагаемое в правой части следует приравнять нулю.

Сразу же необходимо обратить внимание на то, что показатель степени имеет ясный экономический смысл – поскольку в числителе правой части равенства находится угол, отражающий величину рентабельности (G_t/C_t), а в знаменателе этой дроби находится полярный угол, отражающий величину капиталовооружённости труда (K_t/L_t), то показатель степени отражает влияние капиталовооружённости труда на рентабельность производства.

Теперь, зная величину показателя степени на данном наблюдении, можно вычислить на этом же наблюдении и коэффициент пропорциональности a:

$$a_t = \frac{\sqrt{C_t^2 + G_t^2}}{(\sqrt{L_t^2 + K_t^2})^b}. \qquad (5)$$

Поскольку оба эти коэффициента меняются во времени, они представляют собой некие динамические ряды $\{a_t\}$ и $\{b_t\}$, которые и могут быть предметом статистической обработки и прогнозирования.

При этом, конечно, следует обратить внимание на размерность переменных, поскольку производственные функции комплексных переменных являются неоднородными функциями. Действительно, если, например, взять степенную производственную функцию вещественных переменных:

$$Q_t = aK_t^{\alpha} L_t^{\beta}, \qquad (6)$$

и увеличить в ней масштаб капитальных ресурсов в λ раз, то получим:

$$Q_t = a(\lambda K_t)^{\alpha} L_t^{\beta} = a\lambda^{\alpha} K_t^{\alpha} L_t^{\beta}. \qquad (7)$$

То есть, в результате изменения масштаба переменной изменится только коэффициент пропорциональности – корректировать другие переменные и коэффициенты нет необходимости.

Другое дело – комплекснозначные функции. Вне зависимости от вида функций использование комплексных переменных придаёт им свойства неоднородности. Например, изменение масштаба переменной капитального ресурса в те же λ раз приводит к существенному изменению самой комплексной переменной, в чём легко убедиться:

$$L_{tt} + i\lambda K = \sqrt{L_t^2 + (\lambda K_t)^2}\, e^{i\,arctg \frac{\lambda K_t}{L_t}}. \qquad (8)$$

Это значит, что комплексная переменная не является однородной, и что с изменением масштаба одной из переменных модель существенно изменяет все свои коэффициенты и точность описания исходных переменных.

Рассмотрим, эту особенность применительно к степенной производственной функции с действительными коэффициентами (2). Для этого представим модель в виде системы двух уравнений действительных переменных – отдельное уравнение для вещественной части функции и отдельное уравнение для мнимой части функции:

$$\begin{cases} C_t = a(\sqrt{L_t^2 + K_t^{\ 2}})^b \cos(barctg\,\dfrac{K_t}{L_t}), \\ G_t = a(\sqrt{L_t^2 + K_t^{\ 2}})^b \sin(barctg\,\dfrac{K_t}{L_t}). \end{cases} \tag{9}$$

Из полученной системы видно, что, например, издержки в этой модели производственной функции описываются так:

$$C_t = a(\sqrt{L_t^2 + K_t^{\ 2}})^b \cos(barctg\,\frac{K_t}{L_t})\,. \tag{10}$$

Поэтому если изменить масштаб капитального ресурса в λ раз, то для валовой прибыли это будет означать такое нелинейное изменение:

$$C_t = a(\sqrt{L_t^2 + \lambda^2 K_t^{\ 2}})^b \cos(barctg\,\frac{\lambda K_t}{L_t})\,. \tag{11}$$

Это значит, что любая корректировка переменной K_t вызывает неминуемое изменение и коэффициента пропорциональности a, и показателя степени b и точность описания валовой прибыли, значения которой в практических случаях всегда «загрязнено» случайными ошибками, что существенно повлияет на точность аппроксимации.

Очевидно, что функция неоднородна и относительно второго производственного ресурса – труда L_t.

В каких же единицах измерения следует использовать исходные переменные для построения производственной функции (2)? Для получения ответа на этот вопрос, воспользуемся экономическим смыслом используемых переменных.

Как легко заметить, производственный результат состоит из двух составляющих – валовой прибыли G_t и валовых издержек производства C_t, относящихся соответственно к действительной и мнимой частям комплексной переменной. Но также легко заметить, что если сложить эти действительную и мнимую части, то получится валовая выручка:

$$Q_t = G_t + C_t\,. \tag{12}$$

Это означает, что вычисляя комплексную переменную производственного результата во всех производственных функциях комплексных переменных (1) мы всегда получаем не только расчётные значения валовой прибыли и издержек, но и величину валовой выручки Q.

Довольно часто встречаются ситуации, когда переменные измеряются в разных единицах измерения, или же по соображениям коммерческой тайны можно получить для исследования только безразмерные величины, возникает необходимость приведения всех переменных к одной единице измерения и одному масштабу.

Если, как это принято чаще всего в экономике, привести исходные данные производственного результата к безразмерным величинам, разделив каждую переменную временного статистического ряда на её первое значение - валовую прибыль G_t для каждого t поделить на начальное значение прибыли в первый год наблюдения G_1, издержки производства C_t поделить на значение первого года наблюдения C_1, - то будет получен результат, экономическая интерпретация которого затруднена. Действительно, сумма этих безразмерных величин не даст нам безразмерное значение валового выпуска:

$$\frac{G_t}{G_1}+\frac{C_t}{C_1}=\frac{G_tC_1+C_tG_1}{G_1C_1}\neq Q_t=\frac{G_t+C_t}{G_1+C_1}. \qquad (13)$$

Поэтому для того чтобы модель имела экономический смысл, необходимо валовую прибыль и себестоимость привести к безразмерным величинам относительно валовой выручки:

$$\frac{G_t}{Q_1},\frac{C_t}{Q_1}. \qquad (14)$$

Тогда их сумма имеет смысл валовой выручки, отнесённой к первому значению выручки:

$$\frac{G_t}{Q_1}+\frac{C_t}{Q_1}=\frac{G_t+C_t}{Q_1}=\frac{Q_t}{Q_1}. \qquad (15)$$

Приведя к безразмерным величинам переменные комплексного производственного результата, следует привести к безразмерным величинам и переменные комплексного производственного ресурса. Если капитал измеряется в денежных единицах, а труд – в затратах времени или количестве привлечённых людей, необходимо привести значения ресурсов к единому типу измерения и единому масштабу, поскольку выполнять математические действия с числами, измеряемыми в рублях (капитал), и числами, измеряемыми в часах затраченного на работу времени (труд) невозможно. Поэтому рекомендуется значения используемых капитальных ресурсов K_t для каждого t поделить на начальное значение капитала в первый год наблюдения K_1, а затраты труда L_t поделить на их значение для первого года наблюдения L_1:

$$\frac{K_t}{K_1},\frac{L_t}{L_1}. \qquad (16)$$

Таким образом, для практического использования степенной комплекснозначной производственной функции с действительными коэффициентами (2) необходимо либо использовать данные, измеренные в одних и тех же денежных единицах, либо же приводить их к безразмерным величинам (14) и (16).

С помощью модели (2) с изменяющимися коэффициентами (4) и (5) можно решать многообразные задачи прогнозирования, например, определить, какими будут производственные результаты, если например увеличить инвестиции в основной капитал, оставляя неизменными затраты труда, или же наоборот - увеличить число занятых в производстве при одном и том же капитале и др. Поскольку в ней коэффициенты модели изменяются во времени, отражая эволюционный процесс развития, то можно, задавая разную динамику производственных ресурсов получать различные варианты прогнозов развития производственной системы. Поскольку изменяющиеся коэффициенты модели производственной функции отражают процесс эволюции производства (за счёт инновационных процессов в первую очередь), динамика экономического развития будет прогнозироваться во времени даже в том случае, если предположить, что производственные ресурсы не меняются и остаются постоянными.

Интересной для экономического анализа и прогнозирования является и возможность решения обратной задачи с помощью построения обратных производственных функций [16]. Для модели (2) это означает, что с её помощью можно решить задачу, обратную данной, а именно – определить потребные размеры основных производственных ресурсов для достижения поставленных производственных целей. Обратная к (2) функция будет иметь такой вид:

$$L_t + iK_t = \left(\frac{C_t + iG_t}{a}\right)^{1/b}. \qquad (17)$$

Как видно из этой формулы, зная коэффициенты данной модели (4) и (5), можно прогнозировать те затраты труда *L* и капитала *K*, которые нужны для того или иного сочетания производственных результатов – затрат на производство *C* и валовой прибыли *G*. А поскольку их сумма даёт величину валового выпуска, можно решать и другую задачу – какие нужны производственные ресурсы для достижения заданного объёма выпуска.

Задача экономического прогнозирования с помощью модели степенной производственной функции комплексных переменных имеет интересное решение на макро и мезо уровне. Здесь, конечно, никто не говорит о прибыли или издержках производства. Но при этом легко найти показатели, аналогичные этим показателям производственных функций комплексных переменных. Аналогом показателя валовой прибыли на уровне государства выступает чистый национальный продукт G_t, а аналогом издержек производства – национальный промежуточный продукт C_t. Эта аналогия подтверждается ещё и тем, что, как и в (12) для предприятия их сумма – (G_t+C_t) даёт в результате валовой внутренний продукт Q_t страны. Поэтому производственный результат на макроуровне полностью соответствует всем характеристикам и особенностям производственного результата на уровне предприятия. Основные производственные ресурсы страны также соответствуют экономическому смыслу факторов производственной функции – стоимость основного капитала K_t и количество занятых в экономике страны L_t имеют тот же смысл, что и на уровне промышленного предприятия. А поскольку аналогом валового выпуска *Q* на макро уровне выступает ВВП страны, а на мезо уровне – ВРП, то актуальность использования модели (2) усиливается, ведь эти два показателя являются основными для характеристики уровня развития страны или региона. И с помощью модели обратной функции (17) можно, например, получить ответ на такой вопрос: какими должны быть производственные ресурсы страны для «удвоения ВВП»?

Результаты

Рассмотрим теперь возможность использования степенной комплекснозначной производственной функции с действительными коэффициентами (2) для экономического прогнозирования. Будем при этом исходить из такой гипотезы – чем менее инерционным является моделируемый объект, тем менее точными будут прогнозы его экономического развития. Эту гипотезу проверим на примере ретропрогноза экономики Великобритании. Выбор этого объекта обусловлен высокой достоверностью имеющихся статистических данных, поскольку в Великобритании действует многолетняя неизменная методика вычисления данных, не подвергаемая пересмотрам. Данные же Госкомстата РФ о развитии экономики России для целей исследования использовать сложно – время от времени в этом ведомстве происходит изменение методик расчёта некоторых показателей, которые в результате этого становятся несопоставимыми друг с другом в динамике. Особенно это касается такого важного показателя, как капитал – величина основных производственных фондов пересчитывается таким образом, что их стоимость в конце данного года по сравнению с их стоимостью предшествующего года не объясняется инвестициями в основной капитал и выбытием фондов.

Это наглядно видно из данных по Псковской области, приведённых в табл. 1. Если, например, к величине остаточной стоимости фондов промышленности Псковской области в 2005 году (третий столбец строки 2006 года) прибавить величину инвестиций в основной капитал в 2006 году, то будет получено такое число:

73 973 млн.руб. +7 603,3 млн.руб. = 81 576,3 млн.руб.

Но для 2006 года Госкомстат выдаёт другую величину, а именно – 164 095 млн.руб., число в два раза большее, чем следует из вычислений. А если учесть, что мы при этом даже не учли факта износа и выбытия основных фондов, то доверие к данным о полной стоимости основных фондов становится ещё меньше.

Табл. 1

Данные о динамике стоимости основных фондов промышленности Псковской области

Год	Полная стоимость основных фондов, млн. руб.	Остаточная стоимость основных фондов в предыдущем периоде, млн. руб.	Инвестиции в основной капитал в отчётном периоде, млн. руб.
2001	90537	49234	2791
2002	111128	52604	3135
2003	122694	60463	5613,6
2004	129423	67313	5904,9
2005	144880	69984	5546,9
2006	164095	73973	7603,3
2007	188943	81641	11831,2

Но поскольку нашей задачей является демонстрация возможностей нового метода прогнозирования, воспользуемся данными Великобритании. При этом получаемые прогнозы будем верифицировать другими методами прогнозирования.

В табл. 1 приведены исходные данные по экономике Великобритании в период с 1990 по 2010 год[1] (в относительных величинах) и результаты расчёта коэффициентов модели (2) по этим данным.

Табл. 2

Исходные данные об экономике Великобритании и коэффициенты производственной функции

Годы, t	G_t/Q_1	C_t/Q_1	K_t/K_1	L_t/L_1	b_t	a_t
1990	0,869	0,131	1,000	1,000	1,810	0,469
1991	0,909	0,141	0,921	0,971	1,866	0,534
1992	0,947	0,144	0,888	0,949	1,888	0,584
1993	0,999	0,148	0,889	0,942	1,883	0,621
1994	1,063	0,152	0,954	0,950	1,814	0,626
1995	1,130	0,156	1,037	0,959	1,738	0,626
1996	1,207	0,164	1,114	0,968	1,679	0,634
1997	1,289	0,167	1,186	0,985	1,643	0,638
1998	1,368	0,174	1,336	0,994	1,552	0,625
1999	1,444	0,185	1,383	1,008	1,534	0,638
2000	1,517	0,195	1,428	1,021	1,519	0,651
2001	1,588	0,203	1,468	1,033	1,507	0,663
2002	1,672	0,214	1,543	1,040	1,477	0,674
2003	1,778	0,220	1,596	1,051	1,465	0,694

[1] Office for National Statistics. URL: http://www.ons.gov.uk/ons/index.html (дата обращения 11.11.2015)

2004	1,872	0,237	1,713	1,062	1,423	0,696
2005	1,957	0,242	1,792	1,076	1,406	0,699
2006	2,071	0,258	1,941	1,088	1,365	0,701
2007	2,195	0,271	2,137	1,096	1,320	0,696
2008	2,249	0,265	2,062	1,099	1,344	0,723
2009	2,164	0,280	1,788	1,080	1,404	0,776
2010	2,279	0,288	1,865	1,073	1,378	0,799

Рассмотрим динамику вычисленных коэффициентов.

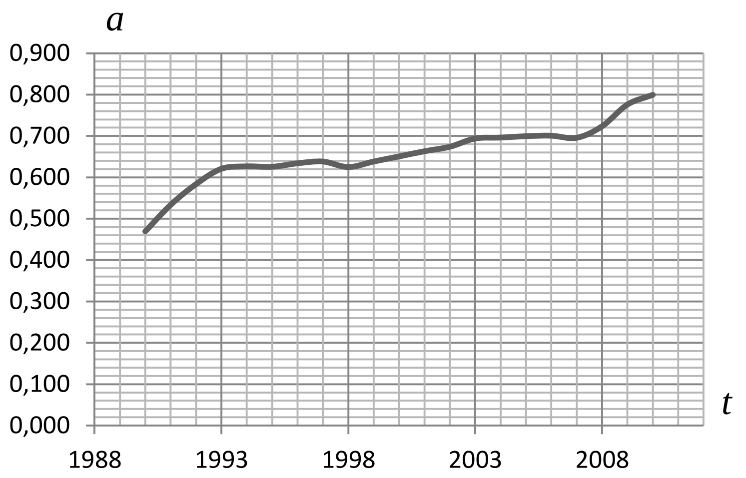

Рис. 1. Динамика коэффициента пропорциональности a *производственной функции (2) Великобритании*

Как видно из рисунка, коэффициент пропорциональности степенной комплекснозначной функции с действительными коэффициентами меняется во времени почти линейно. Исключением является начальный период наблюдения и перелом тенденции в 2008 кризисном году. Поскольку в данной статье рассматривается возможность использования производственной функции для прогнозирования, то динамика коэффициента пропорциональности для производственной функции Великобритании может быть легко аппроксимирована и спрогнозирована с помощью линейного тренда с учётом тенденций последних лет. Сделать это можно, адаптировав модель линейного тренда методом неравномерного сглаживания.

Тогда, используя МНК и адаптируя полученную модель методом неравномерного сглаживания, для динамики коэффициента пропорциональности получим такой тренд:

$$\hat{a}_t = 0{,}014t - 27{,}312\,, \tag{18}$$

где t - текущий год.

Изменение показателя степени b имеет убывающий характер, что видно из графика рис. 2.

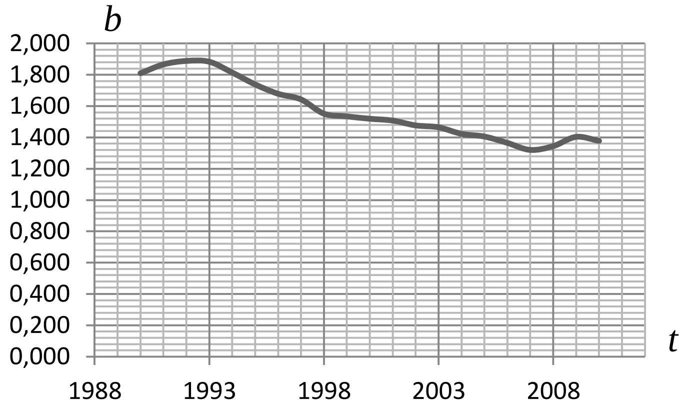

Рис. 2. Динамика показателя степени b производственной функции (2) Великобритании

И в этом случае следует использовать модель линейного тренда с адаптацией его методом неравномерного сглаживания. Адаптированная модель тренда имеет вид:

$$b = 51,582 - 0,025t. \qquad (19)$$

Будем выполнять точечные прогнозы, поскольку нашей задачей является демонстрация уникальных возможностей рассматриваемой производственной функции, а не выполнение конкретных прогнозов. С учётом полученных уравнений трендов (18) и (19) получим для Великобритании прогнозную модель производства на ближайшую перспективу:

$$\hat{C}_t + i\hat{G}_t = (0,014t - 27,312)(L_t + iK_t)^{(51,582-0,025t)}. \qquad (20)$$

Полученную модель (20) можно использовать для многовариантных прогнозных расчётов показателей экономики Великобритании. Можно, например, решить прямую задачу – по планируемым значениям затрат капитала и труда в 2011 году с помощью (20) спрогнозировать чистый и промежуточные продукты Великобритании, а на их основе – валовой внутренний продукт. А можно решить и обратную задачу – по желательным для экономики страны значениям чистого и промежуточного продукта определить – какие именно для достижения такого результата нужны производственные ресурсы.

Рассмотрим вначале прямую задачу. В нашем распоряжении имеются фактические данные по основному капиталу Великобритании и количеству занятых в экономике этой страны за 2011 год[2]. В безразмерных относительных величинах, используемых в табл. 1, они составляют для

[2] Office for National Statistics. URL: http://www.ons.gov.uk/ons/index.html (дата обращения 11.11.2015)

капитала $K/K_1=1,84111$ (что составляет 98,73% от значения показателя 2010 года) и для числа занятых $L/L_1= 1,07828$ (что составляет 100,54% от значения показателя 2010 года).

С помощью модели (20) были получены прогнозы чистого и промежуточного продукта, а также ВВП Великобритании на этот год. Верификацию прогноза проведём с помощью модели экспоненциального сглаживания, отдавая себе отчёт в том, что при такой динамике оптимальные значения постоянной сглаживания будут находиться в запредельном множестве ($1\leq\alpha<2$). Результаты расчётов и фактические данные сведены в табл. 3.

Табл. 3

Прогноз развития экономики Великобритании

	Факт	*Прогноз моделью (23)*	*Ошибка прогноза, %*	*Прогноз методом экспоненциального сглаживания (оптимальное α)*	*Ошибка прогноза, %*
Чистый продукт, G_t/Q_1	2,395	2,329	2,74	2,457 (α=1,95)	2,58
Промежуточный продукт, C_t/Q_1	0,299	0,298	0,01	0,287 (α=1,44)	15,67
Валовой внутренний продукт, Q_t/Q_1	2,694	2,627	1,85	2,743 (α=1,98)	3,75

Из табл. 3 видно, что прогноз по модели комплекснозначной производственной функции очень близок к реальным значениям – по чистому продукту ошибка оказалась менее 3%, по валовому внутреннему продукту – менее 2%, а промежуточный продукт спрогнозирован почти точно. Модель экспоненциального сглаживания точнее спрогнозировала размер чистого продукта, но хуже – остальные показатели. Особенно плохо она спрогнозировала промежуточный продукт, в то время как комплекснозначная степенная производственная функция с действительными коэффициентами даёт почти абсолютную точность прогноза. Процедура ретропрогноза показала возможность использования на практике предлагаемого метода прогнозирования. С помощью модели (20) можно решать и другие задачи, например, определить, какими будут экономические показатели экономики государства если увеличить инвестиции в основной капитал или же увеличить число занятых и т.п.

Рассмотрим теперь обратную задачу, ведь особенностью моделей комплексных переменных является ещё и возможность построения обратных производственных функций (17). Для модели (2) это означает, что возможно решить другую задачу (обратную данной), а именно – определить потребные размеры основных производственных ресурсов для достижения поставленных производственных целей. Обратная к (2) функция (17) будет иметь такой вид:

$$\hat{L}_t + i\hat{K}_t = \left(\frac{C_t + iG_t}{0{,}014t - 27{,}312}\right)^{\frac{1}{51{,}582 - 0{,}025t}}. \qquad (21)$$

С её помощью можно решать различные задачи, например, получить ответ на вопрос: как должны измениться производственные ресурсы в 2015 году, если в экономике страны желательно оставить промежуточный продукт на прежнем уровне, а чистый продукт увеличить на 20%?

В терминах рассматриваемой задачи это означает следующее - промежуточный продукт в 2015 году (C/Q_1) остаётся равным *0,288*, а чистый продукт (G/Q_1) увеличивается по сравнению с 2010 годом на *20%*, то есть - $G/Q_1 = 2{,}279*1{,}20=2{,}735$.

К 2015 году коэффициент пропорциональности прогнозируется на уровне $a=0{,}898$, а показатель степени - $b=1{,}207$. Подставляя эти числа в модель (21), получим прогнозируемые при данном уровне экономического и технологического развития Великобритании производственные ресурсы:

$$\hat{L}_{2015} + i\hat{K}_{2015} = \left(\frac{0{,}288 + i2{,}735}{0{,}898}\right)^{\frac{1}{1{,}207}} = 0{,}321 + i3{,}046. \qquad (22)$$

Это означает, что для решения поставленной задачи необходимо капитальные ресурсы по сравнению с 2015 годом увеличить в (*3,046/1,865*)=1,63 раза, а число занятых в производстве сократить в (*1,073/0,321*)=5,3 раза. Из полученных расчётных значений со всей очевидностью вытекает невозможность достижения поставленных значений чистого и промежуточного продукта страны.

Следует обратить внимание на то, что в данном исследовании не ставилась задача получения каких-либо экономических прогнозов и их обсуждение. В статье рассматривается новая модель производственной функции комплексных переменных и новый метод её использования для задач экономического прогнозирования. При необходимости выполнения тщательных экономических прогнозов следовало бы использовать для прогнозирования динамики коэффициентов комплекснозначной производственной функции более сложные методы и модели прогнозирования.

Обсуждение

Из приведённых результатов можно сделать несколько выводов.

1. Прежде всего, следует отметить, что степенная производственная функция комплексных переменных обладает рядом уникальных свойств.

Первое из них, когда по значениям производственных ресурсов можно судить о величинах сразу трёх производственных результатов – издержек производства *C*, валовой прибыли *G* и валовом выпуске *Q*. На макро и мезо уровнях это – промежуточный, конечный и валовой продукты.

Второе – значения действительных коэффициентов этой модели могут быть вычислены как на каждом наблюдении, так и на множестве наблюдений. Но первая возможность – возможность вычисления коэффициентов на каждом наблюдении позволяет, проанализировав динамку коэффициентов и спрогнозировав их, получить модель производственной функции с изменяющимися коэффициентами. Эту модель можно использовать для многовариантных прогнозов экономического развития.

Третьим важнейшим отличительным свойством степенной производственной функции комплексных переменных от моделей действительных переменных является возможность решения обратной задачи – определение объёма необходимых производственных ресурсов для достижения поставленных производственных задач.

2. Рассмотренная в статье модель производственной функции является базовой для дальнейших исследований. Повышение точности моделирования и прогнозирования производства следует ожидать расширением самой модели производственных функций за счёт включения в неё новых переменных. Сделать это можно, исходя из свойств многих экономических показателей, которые представляют собой агрегированную величину. Например, основные фонды K представляют собой сумму двух слагаемых – основные производственные фонды K_0 и основные непроизводственные фонды K_1:

$$K = K_0 + K_1. \qquad (23)$$

Поскольку влияние на производственный результат этих двух составляющих различно, это можно учесть, представляя капитал в комплексной форме:

$$\dot{K} = K_0 + iK_1. \qquad (24)$$

Аналогично и труд L также может быть представлен как сумма двух составляющих – производственный L_0 и непроизводственный L_1 персонал:

$$L = L_0 + L_1. \qquad (25)$$

Поскольку и в этом случае очевиден разный вклад этих составляющих затрат труда на производственный результат, то учесть этот вклад можно, представив труд в форме комплексной переменной:

$$\dot{L} = L_0 + iL_1. \qquad (26)$$

Тогда более подробная модель комплекснозначной производственной функции (1) будет иметь такой вид:

$$C_t + iG_t = f[(L_{0t} + iL_{1t})(K_{0t} + iK_{1t})]. \qquad (27)$$

Очевидно, что состав переменных этой функции может быть существенно расширен за счёт включения новых переменных (инвестиции в основной капитал I_0 и инвестиции в персонал I_1 и др.)

3. Модель степенной производственной функции комплексных переменных может рассматриваться как важный инструмент,

расширяющий арсенал моделей и методов экономического моделирования и прогнозирования.

Список источников

1. Акаев А.А., Коротаев А.В., Малков С.Ю. Комплексный системный анализ, математическое моделирование и прогнозирование развития стран БРИКС. Предварительные результаты. М.: Красанд, 2014. 392 с.
2. Затонский А.В., Сиротина Н.А. Прогнозирование экономических систем по модели на основе регрессионного дифференциального уравнения // Экономика и математические методы, 2014, 50 (5), 91-99.
3. Ширяев В.И., Ширяев Е.В. Принятие решений. Прогнозирование в глобальных системах. М.: Либроком, 2013. 176 с.
4. Малов С.В. Регрессионный анализ. Теоретические основы и практические рекомендации. СПб.: Издательство Санкт-Петербургского университета, 2013. 276 с.
5. Пересада В.П. Управление динамикой развития экономики на базе межотраслевого баланса. СПб.: Политехника-сервис, 2010. 170 с.
6. Суворов Н.В., Балашова Е.Е. Применение межотраслевого метода в исследовании факторов динамики выпуска отраслей реального сектора отечественной экономики // Проблемы прогнозирования, 2011, №5. С. 19 28.
7. Solow R.M. (19)57). Technical Change and the Aggregate Production Function // The Review of Economics and Statistics. Vol. 39. No. 3, pp. 312-320.
8. Arens R. Complex processes for envelopes of normal noise. // IRE Trans. Inform. Theory, Sept. 1957, vol. IT-3, pp. 204-207.
9. Goodman N.R. Statistical analysis based on a certain multivariate complex Gaussian distribution. // Ann. Math. Statist. , 1963, vol. 34, pp. 152-176.
10. Wooding R. A. The multivariate distribution of complex normal variables. // Biometrika, 1956, vol. 43. Pp. 212-215.
11. Tavares, G. N., Tavares, L. M. On the Statistics of the Sum of Squared Complex Gaussian Random Variables. // IEEE Transactions on Communications, 55(32), 2007. Pp 1857-1862.
12. Svetunkov Sergey. Complex-Valued Modeling in Economics and Finance. Springer Science+Business Media, New York, 2012. 318 p.
13. Афанасьев А.А., Пономарева О.С. Производственная функция народного хозяйства России в 1990-2012 гг. // Экономика и математические методы, 2014, 50 (26), 21-33.
14. Клейнер Г.Б. Мезоэкономика развития. М.: Наука, 2011. 806 с.
15. Merkulova T.V., Prikhodko F.I. Dynamics of macroeconomic indicators modeling by functions of complex variables // Бізнес-Інформ (Бюлетень ВАК Украіни), № 4 (5) 2010 (381). С. 67 –71.
16. Светуньков И.С. Обратные производственные функции комплексного переменного // Экономическая кибернетика: системный анализ в экономике и управлении: Сборник научных трудов. Выпуск №15. СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2007. С. 88-93.