1.3. Интерпретация модели Брауна

Итак, модель Брауна, или как её иногда называют «модель экспоненциальной сглаживающей» оказывается очень удобной в практическом использовании для целей краткосрочного прогнозирования нестационарных процессов, в том числе и необратимых. Богатство этой модели определяется и разнообразием интерпретаций её свойств.

Действительно, в общем виде модель Брауна принято записывать так:

$$\hat{Y}_{T+1} = \alpha Y_T + (1-\alpha)\hat{Y}_T \,. \qquad (1.3.1)$$

И эта формула даёт очевидную интерпретацию её свойств – если постоянная сглаживания равна нулю, то модель не адаптивна, а если она равна единице, то модель полностью адаптивна к текущей информации и совершенно не инерционна.

Именно в таком виде модель Брауна и стала популярной, и именно в таком виде появляется соблазн дать постоянной сглаживания следующую экономическую интерпретацию (которая превалирует в среде экономистов): α представляет собой некоторую среднюю взвешенную, служащую для формирования прогнозного значения. То есть прогноз складывается из двух частей: из части фактического значения, полученного на наблюдении t и части, спрогнозированной на это же наблюдение t. В такой трактовке, очевидно, что $\alpha \in (0;1)$, так как подразумевается наличие средней между двумя значениями, и именно этой трактовки модели придерживаются многие экономисты.

Графически формирование прогнозного значения в соответствии с формулой (1.3.1) представлено на Рис. 5: точка III считается как средневзвешенная фактического значения I и прогнозного II, её значение как раз и становится прогнозом – точкой IV. Далее берётся средневзвешенная между точками IV и V, получается новая средняя (точка VI) и новый прогноз (точка VII) и так далее. Причём α в данной интерпретации регулирует распределение весов между фактом и прогнозом.

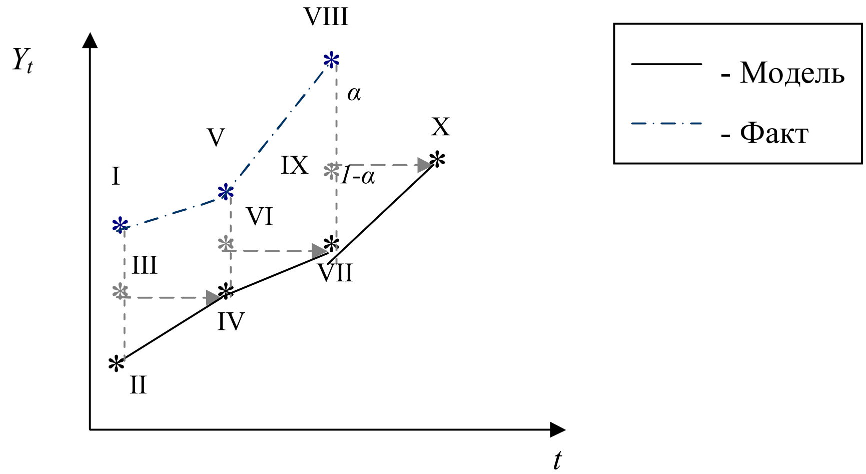

Рис. 5. Графическое представление механизма формирования прогноза в модели (1.3.1)

Однако в данном случае мы сталкиваемся с ситуацией, в которой трактовка модели её только ограничивает.

Если раскрыть скобки во втором множителе правой части равенства (1.3.1), и перегруппировать слагаемые, то можно получить иную форму записи модели Брауна:

$$\hat{Y}_{T+1} = \hat{Y}_T + \alpha\left(Y_T - \hat{Y}_T\right). \qquad (1.3.2)$$

В таком виде у неё более явно видны адаптивные черты: прогнозное значение $\hat{Y}_{T+1}$ формируется на основе предыдущего спрогнозированного, а α выступает некоторым коэффициентом адаптации модели к новой поступающей информации. В этом случае степень адаптации вообще-то может быть любой: модель может адаптироваться незначительно и отсеивать поступающие «шумы» (когда альфа мал, например, составляет 0,3) или достаточно быстро адаптироваться к поступающей информации в случае, когда в процессе происходят качественные изменения (когда альфа больше 1, например, составляет 1,7).

Более того, поскольку выражение в скобках второго слагаемого правой части равенства (1.3.2) есть ни что иное, как текущая ошибка аппроксимации, то есть:

$$Y_T - \hat{Y}_T = \varepsilon_T \qquad (1.3.3)$$

То модель Брауна может быть записана и так:

$$\hat{Y}_{T+1} = \hat{Y}_T + \alpha\varepsilon_T\ . \qquad (1.3.4)$$

Первая составляющая модели Брауна представляет собой среднюю взвешенную предыдущих значений, то есть – она несёт в себе информацию о всех предыдущих значениях изучаемого ряда. Второе слагаемое, представляющее собой произведение постоянной сглаживания на текущую ошибку аппроксимации, характеризует способность модели учитывать текущую ошибку аппроксимации. Таким образом, модель Брауна обладает способностью адаптироваться к текущим отклонениям от некоторого сложившегося уровня ряда.

Эта адаптация происходит так. В случае, когда фактическое значение наблюдаемого ряда выше расчётного, ошибка аппроксимации имеет положительный знак и средняя арифметическая увеличивается на откорректированную с помощью постоянной сглаживания величину этого отклонения.

В том случае, когда текущая ошибка аппроксимации отрицательна, средняя взвешенная уменьшается на откорректированную величину ошибки аппроксимации.

Таким образом, расчётные значения как бы «подтягиваются» к текущему значению. В этом и проявляется суть адаптации модели Брауна. Графическое представление этой трактовки дано на рис. 6.

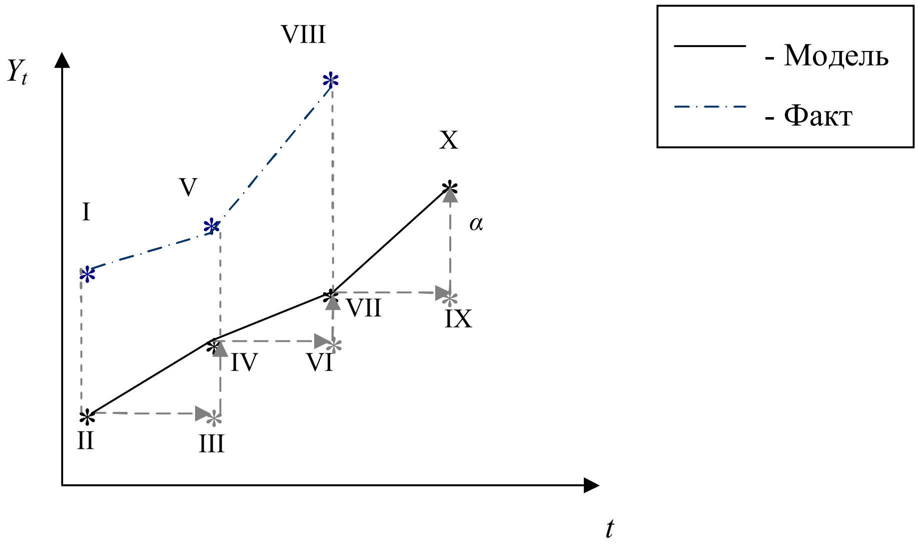

Рис. 6. Графическое представление механизма адаптации в модели (1.3.2)

Здесь расчётное значение II берётся за базу для прогноза на следующем наблюдении и переносится в точку III, которая затем корректируется на величину отклонения фактического значения I от расчётного II. В итоге прогнозное значение из точки III «переходит» в точку IV, которая в свою очередь становится базой для следующего прогноза (точка VI) и так далее.

Модель Брауна можно представить также и в другом виде. Так, если раскрыть скобки в формуле (1.3.1):

$$\hat{Y}_{T+1} = \alpha Y_T + (1-\alpha)\hat{Y}_T = \alpha Y_T + \hat{Y}_T - \alpha \hat{Y}_T\,, \tag{1.3.5}$$

после чего прибавить и отнять фактическое значение в правой части в (1.3.5), то получим:

$$\hat{Y}_{T+1} = \alpha Y_T + \hat{Y}_T - \alpha \hat{Y}_T + Y_T - Y_T \ . \qquad (1.3.6)$$

Если теперь в (1.3.6) вынести за скобки $\alpha - 1$, то мы придём к новой форме, по прежнему математически тождественной формам (1.3.1) и (1.3.2):

$$\hat{Y}_{T+1} = Y_T + (\alpha - 1)(Y_T - \hat{Y}_T). \qquad (1.3.7)$$

Однако благодаря такому представлению, полученную модель можно в очередной раз трактовать несколько иначе. Удобней всего это сделать, если вместо $\alpha - 1$ ввести коэффициент $\beta = \alpha - 1$ и использовать формулу (1.3.3), тогда формула (1.3.7) может быть преобразована к виду:

$$\hat{Y}_{T+1} = Y_T + \beta \varepsilon_T \ . \qquad (1.3.8)$$

Графически представить механизм формирования прогноза в соответствии с (1.3.8) можно так, как это показано на рис. 7.

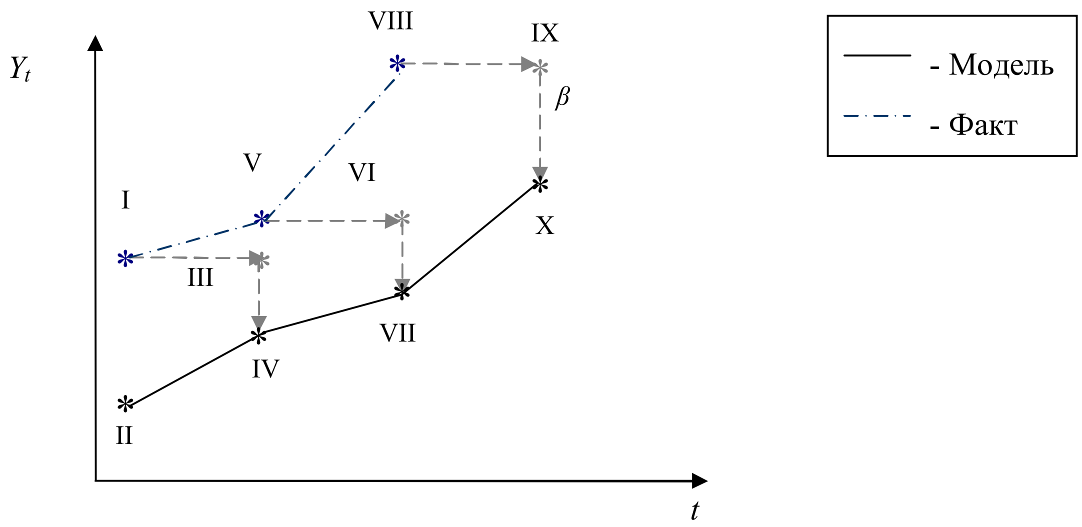

Рис. 7. Графическое представление механизма адаптации в модели (1.3.8).

По своей логике этот механизм напоминает описанный для Рис. 6, однако у него есть некоторые отличия. Так модель изначально формируется исходя из предыдущего фактического значения, а не из предыдущего расчётного (значение точки I переносится на следующее наблюдение в точку III), которое затем корректируется на величину отклонения факта (точка I) от прогноза (точка II) на предыдущем наблюдении пропорционально значению коэффициента β.

Для классических пределов изменения постоянной сглаживания от нуля до единицы, коэффициент $\beta = \alpha - 1$ лежит в пределах $(-1;0)$. При положительном знаке текущей ошибки аппроксимации фактическое значение, выступающее в качестве ориентира для прогноза, уменьшается на откорректированную величину текущей ошибки аппроксимации ε_T. Это значит, что прогноз по модели Брауна при постоянной сглаживания, лежащей в классических пределах, обладает свойством инерционности – следующее прогнозное значение никогда не достигнет уже имеющегося текущего.

В случае запредельного множества (1.2.15) коэффициент β лежит в пределах $(0;1)$. В таком случае при положительном отклонении фактического значения от расчётного, модель предполагает дальнейшее увеличение показателя, превышающее достигнутый уровень. Поэтому фактическое значение увеличивается на величину текущего отклонения, скорректированного на поправочный коэффициент β.

Значит, в классических границах изменения постоянной сглаживания модель Брауна инерционна, а запредельных случаях свойство инерционности исчезает. Необратимые процессы мы разделили на две группы – эволюционные и хаотические. Зная свойства каждой из этих групп процессов, можно дать интерпретацию модели Брауна.

В классических пределах, когда постоянная сглаживания лежит в промежутке от нуля до единицы (1.2.14), модель отражает изменяющиеся, но инерционные процессы, то есть – эволюционные.

В запредельном множестве (1.2.15), когда постоянная сглаживания лежит в пределах от единицы до двух, модель описывает процессы без инерционности изменения тенденций, то есть, процессы соответствующие хаотической динамике.