1.4. Модель Брауна на малых выборках

Теперь следует указать на некоторую особенность метода Брауна, которую мы не указали для того, чтобы не нарушать последовательность изложения, а именно – на необходимость задания начальных значений модели. Действительно, для того, чтобы «запустить» расчёт модели Брауна, то, опираясь на первое значение исходного ряда Y_1, необходимо вычислить прогнозное значение модели на втором наблюдении:

$$\hat{Y}_2 = \alpha Y_1 + (1-\alpha)\hat{Y}_1$$

Первое значение этой суммы при заданном α легко вычисляется, поскольку известно значение Y_1, а вот для расчёта второго слагаемого необходимо знать расчётное значение показателя, определённое на предыдущем шаге, то есть - $\hat{Y}_1$, а его в распоряжении прогнозиста нет. Очевидно, что без знания первого расчётного значения показателя модель «запустить» не удастся. Следовательно, модель Брауна следует дополнить ещё и правилом задания этого первоначального значения. Тогда, с учётом этого, модель Брауна должна иметь вид:

$$\hat{Y}_{T+1} = \alpha Y_T + (1-\alpha)\hat{Y}_T \text{ при заданном } \hat{Y}_1. \qquad (1.4.1)$$

Но как задать это начальное условие? Если оно будет сильно отличаться от исходного ряда, то модель начнёт плохо описывать исходный ряд, поэтому это значение должно быть определено, исходя из свойств прогнозируемого ряда. Для того чтобы решить эту задачу, определим, насколько влияет это первоначальное расчётное значение прогнозируемого показателя на точность аппроксимации ряда, и, значит, на точность его прогнозирования.

Как следует из (1.2.6), после k шагов расчёта по модели Брауна, вес, придаваемый начальному значению, равен $\alpha(1-\alpha)^k$. В том случае, когда число наблюдений невелико (малая выборка), этот вес может быть очень значительным и влияние начального значения на результат оказывается весьма весомым. К тому же и величина постоянной сглаживания также определяет вес, придаваемый начальному значению. Если, например, постоянная сглаживания близка к единице, например, 0,8, то на пятом шаге этот вес составит величину, равную $0{,}8(1-0{,}8)^5 = 0{,}000256$. То есть, влияние неточности в определении первоначального расчётного значения показателя невелико. Но вот если постоянная сглаживания близка к нулю, например, 0,2, то на пятом шаге вес первого расчётного наблюдения составит $0{,}2(1-0{,}2)^5 = 0{,}065536$. Аналогичная ситуация наблюдается и для постоянной сглаживания, близкой к двум. Например, когда $\alpha = 1{,}8$, на пятом шаге вес первого расчётного наблюдения составит $1{,}8(1-1{,}8)^5 = -0{,}58982$. В ситуации, когда прогнозист «бьётся» за повышение точности на проценты, такой вес расчётной величины, содержащей в себе неточность, может быть источником неточности и в прогнозе. Понятно, что с увеличением числа наблюдений вес первого расчётного значения нивелируется, и он становится практически равным нулю, например, при постоянной сглаживания, равной 0,2, вес первоначального расчётного значения на тридцатом наблюдении становится равным $0{,}2(1-0{,}2)^{30} = 0{,}000248$, и влияние ошибки в вычислении $\hat{Y}_1$ становится ничтожным.

Итак, в ситуации малых выборок и малых значений постоянной сглаживания оценке первого расчётного значения $\hat{Y}_1$ следует уделять повышенное внимание.

В теории и практике краткосрочного прогнозирования предлагаются такие варианты выбора этого значения:

1) экспертная оценка,
2) первое расчётное значение выбирается равным фактическому,
3) вычисляется средняя арифметическая первых значений ряда.

Естественно, что экспертная оценка $\hat{Y}_1$ по определению содержит в себе ошибку и довольно значительную. Но если прогнозист работает с большой выборкой, то влияние этой ошибки ничтожно, а быстрота и простота получения первого расчётного значения экспертным путём выступает в виде основного и неоспоримого преимущества этого метода перед другими.

Но вот в ситуации, когда перед нами ряд с малым количеством наблюдений (T<<40), ошибка вычисления первого расчётного значения может оказать очень сильное влияние на результат прогноза, особенно в ситуации малых значений постоянной сглаживания. Поэтому в такой ситуации значимость верной оценки первого расчётного значения модели Брауна очень высока. Экспертная оценка уже по самой сути экспертных процедур не точна, и содержит в себе ошибку субъективной оценки, поэтому она для малых выборок не приемлема. Поэтому в таком случае следует выбрать второй или третий вариант оценки.

Второй вариант, когда первое расчётное значение по модели Брауна приравнивается первому наблюдаемому фактическому значению, является более распространённым, поскольку прост и исключает субъективизм. Но весьма часто случается так, что именно первое наблюдение подвержено воздействию случайной ошибки и далеко отстоит от среднего уровня ряда. Поэтому в модель Брауна при таком способе оценивания величины первоначального расчётного наблюдения закладывается возможная случайная ошибка, которая при небольшом количестве наблюдений оказывает существенное влияние на результаты прогноза. Следовательно, этот способ оценивания $\hat{Y}_1$ может быть использован только для больших выборок, поскольку для малых выборок он может нести угрозу возникновения ошибки аппроксимации и прогноза.

Остаётся для малых выборок третий из предлагаемых вариантов, когда для оценки первого расчётного значения $\hat{Y}_1$ вычисляется средняя арифметическая, для чего берутся три - пять первых членов исходного ряда и для них вычисляется средняя арифметическая. Модель Брауна с этим условием будет иметь вид:

$$\hat{Y}_{T+1} = \alpha Y_T + (1-\alpha)\hat{Y}_T, \text{ при } \hat{Y}_1 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} Y_t,\ T \le 5. \qquad (1.4.2)$$

Эта средняя арифметическая выступает в качестве оценки расчётного значения показателя на первом шаге и подставляется в модель Брауна. Такой вариант оценки уже не содержит в себе ошибку субъективизма экспертов или случайной ошибки первого наблюдения, поскольку случайные ошибки пяти первых наблюдений усредняются. Эта процедура формализована и является лучшей, поскольку использование модели Брауна подразумевает, что используется логика вычисления средней. Но и к этому способу оценивания $\hat{Y}_1$ можно предъявить претензии – средняя арифметическая, как это неоднократно указывалось, будет лучшей оценкой только в том случае, когда случайный процесс является стационарным и нормально распределённым, а модель Брауна разработана как раз для случаев нестационарных процессов, а также для процессов необратимых. К тому же, так и не ясно, сколько первоначальных членов ряда следует включать в среднюю арифметическую – два наблюдения явно маловато. Три, четыре или пять? – не понятно. Формальных предложений нет, и вновь приходится прибегать к субъективным решениям по отбору количества первоначальных членов ряда в расчёт средней арифметической.

Из недостатков этого варианта оценивания первоначального расчётного значения прогнозируемого показателя со всей очевидностью следует другой вариант, свободный от этого недостатка – *использование средней взвешенной первых значений ряда*[1]. Эта средняя взвешенная по логике процедуры должна находиться так, как это предопределяется логикой метода Брауна, то есть, с помощью весов, задаваемых рядом (1.2.5). Исследования показали, что расчёт модели Брауна следует начинать не с вычисления первого расчётного значения $\hat{Y}_1$, а с вычисления третьего расчётного значения, не прибегая непосредственно к формуле Брауна, а вычисляя это значение как среднюю взвешенную:

$$\hat{Y}_3 = \alpha Y_2 + (1-\alpha)Y_1. \qquad (1.4.3)$$

Теперь, зная расчётную величину третьего наблюдения, её можно подставить в модель Брауна, после чего продолжать вычисления по модели для четвёртого, пятого и последующих наблюдений.

Тогда, с учётом этих начальных значений, модель Брауна в полной форме должна быть записана так[2]:

---

[1] Светуньков С.Г., Бутуханов А.В., Светуньков И.С. Исследование запредельных случаев метода Брауна применительно к малым выборкам– СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2005.

[2] Светуньков С.Г., Бутуханов А.В., Светуньков И.С. Запредельные случаи метода Брауна в экономическом прогнозировании. – СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2006.

$$\hat{Y}_{T+1} = \alpha Y_T + (1-\alpha)\hat{Y}_T,\ \mathrm{T} \geq 3,\ \text{при}\ \hat{Y}_3 = \alpha Y_2 + (1-\alpha)Y_1 \qquad (1.4.4)$$

Как видно, в этом подходе нет субъективизма, случайная ошибка первого и второго наблюдения усредняется с помощью той же самой постоянной сглаживания, что и для других членов ряда. Единственным недостатком такого метода является неравномерное и необоснованное распределение весов между этими двумя первыми наблюдениями. Так, если α мал и близок к нулю, то вес у второго наблюдения значительно меньше, чем у первого. Если же α близок к единице, то ситуация получается диаметрально противоположной: у второго наблюдения вес получается больше, чем у первого. Если же α вообще лежит в запредельном множестве, то у первого наблюдения получается отрицательный вес. В общем, как видим, чёткого математического обоснования у такого метода нет, хотя он и лишён ряда недостатков других методов задания первого расчётного значения в модели Брауна.

На самом деле существует ещё один способ задания начального расчётного значения в модели Брауна, который логично вытекает из сути самой модели. Рассмотрим, как можно прийти к этому способу.

Как уже отмечалось ранее, сумма ряда весовых коэффициентов на практике никогда не равна единице, а может лишь приближаться к ней (исключением является случай, в котором $\alpha = 1$). А раз так, то величина остаточного члена ряда r_t в момент времени t может быть найдена по формуле:

$$r_t = S - S_t = 1 - S_t, \qquad (1.4.5)$$

здесь S – сумма бесконечного ряда, равная в нашем случае единице, S_t – сумма конечного ряда из его первых t членов.

Найдём, чему равен остаточный член (1.4.5) для двух наблюдений:

$$r_2 = 1 - S_2 = 1 - (\alpha + \alpha(1-\alpha)) = (1-\alpha) - \alpha(1-\alpha) = (1-\alpha)^2.$$

Теперь найдём величину остаточного члена для трёх наблюдений:

$$r_3 = 1 - S_3 = 1 - \left(\alpha + \alpha(1-\alpha) + \alpha(1-\alpha)^2\right) = (1-\alpha)^2 - \alpha(1-\alpha)^2 = (1-\alpha)^3.$$

Очевидно, что для ряда наблюдений, состоящего из t членов, остаточный член будет равен:

$$r_t = (1-\alpha)^t. \qquad (1.4.6)$$

Он будет равен нулю только тогда, когда выполняется одно из двух условий:

1) постоянная сглаживания равна единице,

2) число членов ряда стремится к бесконечности $t \to \infty$.

Так как ситуация равенства постоянной сглаживания единице встречается крайне редко, а бесконечных рядов в экономике не бывает, то мы приходим к выводу, что практически всегда экспоненциально взвешенная средняя по сути не будет таковой, поскольку не выполняется условие (1.2.5). Стало быть, весовые коэффициенты на малых выборках для сохранения сути модели Брауна нужно скорректировать.

Мы знаем, что сумма весовых коэффициентов, в соответствии с (1.4.5) равна:

$$S_t = 1 - r_t, \tag{1.4.7}$$

или, учитывая (1.4.6):

$$S_t = 1 - (1-\alpha)^t. \tag{1.4.8}$$

Таким образом, если мы умножим каждый весовой коэффициент в ряде (1.2.5) на поправочный:

$$\frac{1}{1-(1-\alpha)^t}, \tag{1.4.9}$$

то сумма весов *S* станет равной единице.

Для выборки из двух наблюдений среднее экспоненциальное взвешенное, являющееся прогнозной оценкой третьего наблюдения, будет с учётом поправки (1.4.9) рассчитываться так:

$$\hat{Y}_3 = \frac{\alpha Y_2 + \alpha(1-\alpha)Y_1}{1-(1-\alpha)^2}. \tag{1.4.10}$$

Для выборки из трёх наблюдений:

$$\hat{Y}_4 = \frac{\alpha Y_3 + \alpha(1-\alpha)Y_2 + \alpha(1-\alpha)^2 Y_1}{1-(1-\alpha)^3}.$$

Окончательно для выборки из *t* наблюдений будем иметь:

$$\hat{Y}_{T+1} = \frac{\alpha Y_T + \alpha(1-\alpha)Y_{T-1} + \alpha(1-\alpha)^2 Y_{T-2} + \ldots + \alpha(1-\alpha)^{T-1} Y_1}{1-(1-\alpha)^T} = \frac{\sum_{t=1}^{T} \alpha(1-\alpha)^{T-t} Y_t}{1-(1-\alpha)^T}. \tag{1.4.11}$$

Таким образом, исследователь может сам принять решение о том, с какого значения начинать расчёт и в таком случае в качестве первого расчётного значения использовать рассчитанное по формуле (1.4.11), а далее, для расчёта последующих значений, уже использовать формулу (1.2.7). Например, если начинать расчёты с третьего наблюдения, то можно использовать формулу (1.4.10) для получения этого стартового значения.

Предложенное решение обладает несколькими преимуществами:

- средняя взвешенная (1.4.11) представляет собой экспоненциально взвешенную первых T значений ряда. При этом все последующие значения ряда также рассчитываются по формуле экспоненциально взвешенной (сама модель Брауна), в результате чего у исследователя имеется однородный ряд расчётных значений, ситуации «чужеродного вторжения» в процесс не происходит;
- при подборе оптимального значения постоянной сглаживания два первых наблюдения Y_1 и Y_2 не выпадают из расчётов ошибки, так как участвуют в формировании третьего значения через ту же постоянную сглаживания, через которую пропускается весь ряд наблюдений;
- полностью устраняется элемент субъективизма.

Таким образом, мы получили ещё один вариант модели Брауна в полной форме с учётом начальных значений:

$$\hat{Y}_{T+1} = \alpha Y_T + (1-\alpha)\hat{Y}_T, \text{ T} \geq 3, \text{ при } \hat{Y}_3 = \frac{\alpha Y_2 + \alpha(1-\alpha)Y_1}{1-(1-\alpha)^2}. \qquad (1.4.12)$$

Сравним теперь на условном примере, как работают модели (1.4.2), (1.4.4) и (1.4.12). Для того чтобы увидеть различия в прогнозах этих моделей был сгенерирован ряд с меняющимися тенденциями.

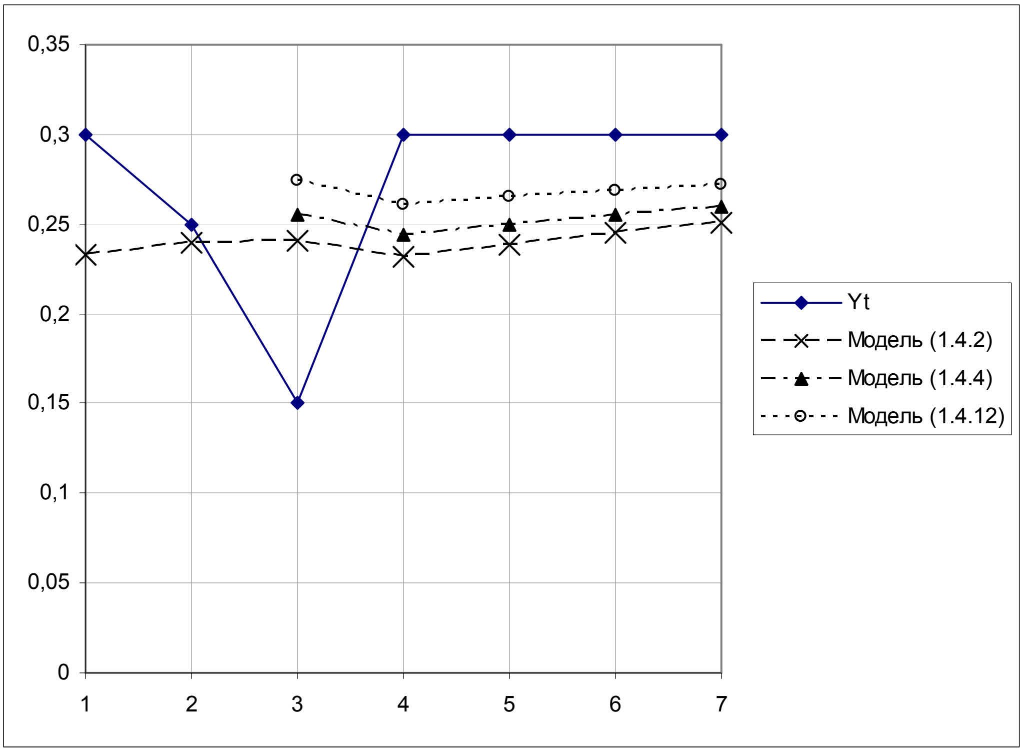

График 1 Поведение модели Брауна при задании первоначального значения разными способами и α=0,1.

В первом случае постоянная сглаживания для всех трёх моделей была равна 0,1. По графику 1 видно, что при таком маленьком значении α принцип задания первоначального значения играет немаловажную роль в формировании прогноза: модель (1.4.12) оказывается ближе всех к фактическим значениям на 4 – 7 наблюдениях. Стоит заметить, что оптимальная α оказалась разной для каждой из этих моделей. Так для модели (1.4.2) оптимальное значение составляет 0,21, для модели (1.4.4) – 0, а для модели (1.4.12) – вообще за пределами (1.2.9) и составила -0,17.

По мере увеличения значения постоянной сглаживания, разница между прогнозами по моделям (1.4.2), (1.4.4) и (1.4.12) уменьшается. Так при α=1 начиная с четвёртого наблюдения прогнозы всех трёх моделей совпадают (График 2).

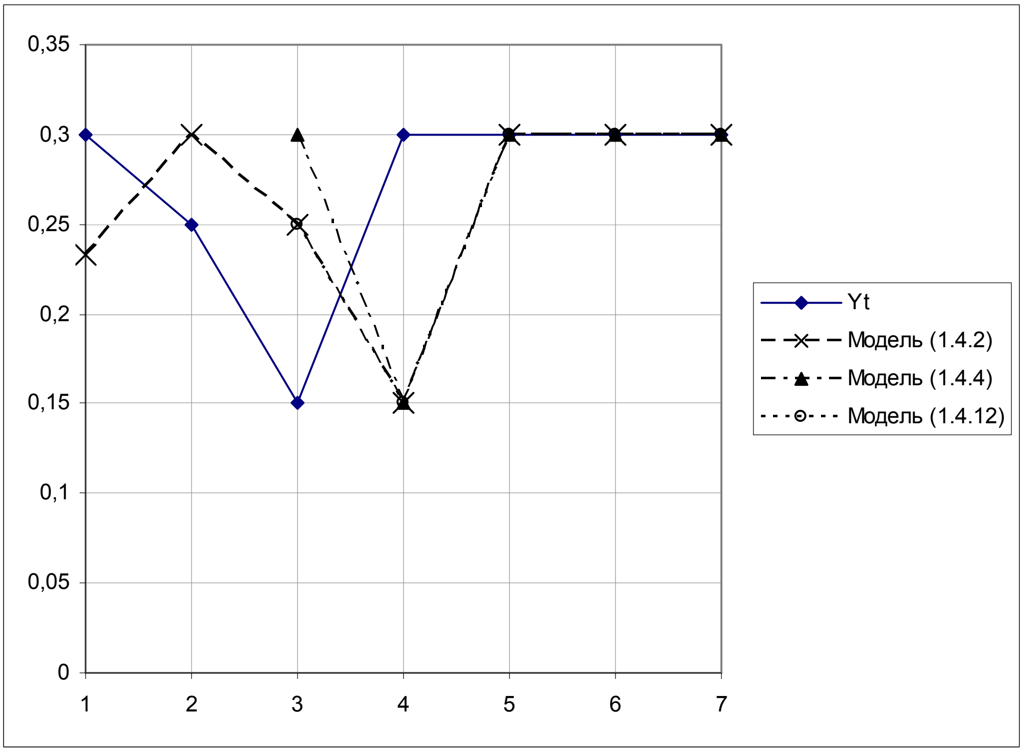

График 2 Поведение модели Брауна при задании первоначального значения разными способами и α=1.

Однако затем разница между прогнозами начинает увеличиваться и принцип задания первого значения снова начинает играть немаловажную роль. На графике 3 показано, как ведут себя модели при α=1,8.

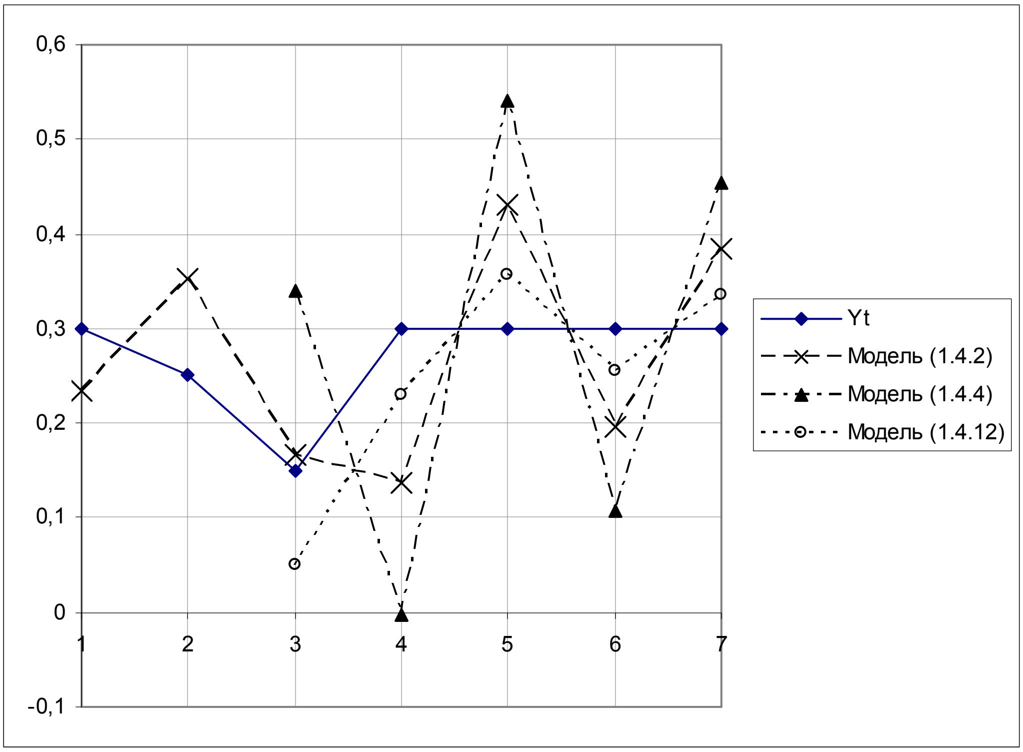

График 3 Поведение модели Брауна при задании первоначального значения разными способами и α=1,8.

Видно, как различаются прогнозы по моделям при разном задании первоначального расчётного значения. В частности, в конкретно этом случае получилось, что прогноз по модели (1.4.12) оказался точнее двух других прогнозов.

Таким образом, при построении модели Брауна на малых выборках надо иметь в виду, что принцип задания первого расчётного значения значительно влияет на получаемый исследователем прогноз. Если у исследователя в ходе расчётов в таких условиях значение α получается близким либо к 0, либо к 2, то стоит попробовать разные принципы задания первого значения – возможно одно из них повысит точность прогноза. Более того, на малых выборках рекомендуется использовать либо формулу (1.4.4), либо (1.4.12), применение которых приводит к тому, что модель Брауна сохраняет свои свойства.

Мы уже упомянули о том, что ряд весов (1.2.5) на малых выборках при определённых значениях постоянной сглаживания (близких к 0 или 2) не сходится к единице. Для того чтобы учесть это явление, учёные предложили несколько процедур, в частности, широко известна процедура Р.Вельда[3], которая предполагает использовать поправочный коэффициент:

$$k_T = \frac{1}{\sum_{t=1}^{T} \alpha (1-\alpha)^{T-1}} . \tag{1.4.13}$$

Вычисляя с помощью модели Брауна для малых рядов некоторое расчётное значение $\hat{Y}_T$, его умножают на этот коэффициент и получают скорректированное прогнозное значение:

$$\tilde{Y}_T = k_T \hat{Y}_T . \tag{1.4.14}$$

При этом рекомендуется возвращаться к модели метода Брауна в том случае, когда значение введённого Р.Вейдом коэффициента приближается к величине 0,995.

Можно решить эту проблему значительно проще, не прибегая к вычислению коэффициента Вейда.

Ранее было показано, что для малых выборок модель Брауна должна иметь либо такой вид (1.4.4):

$$\hat{Y}_{T+1} = \alpha Y_T + (1-\alpha)\hat{Y}_T, \text{ T} \geq 3, \text{ при } \hat{Y}_3 = \alpha Y_2 + (1-\alpha) Y_1 ,$$

либо такой (1.4.12):

[3] Лукашин Ю.П. Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования временных рядов: Учеб. пособие. – М.: Финансы и статистика, 2003. – С. 23.

$$\hat{Y}_{T+1} = \alpha Y_T + (1-\alpha)\hat{Y}_T,\ \mathrm{T} \geq 3,\ \text{при } \hat{Y}_3 = \frac{\alpha Y_2 + \alpha(1-\alpha)Y_1}{1-(1-\alpha)^2}.$$

Можно заметить, что ряд весов при вычислении средней взвешенной для оценки третьего прогнозного значения в этих обоих случаях равна единице:

$$\alpha + (1-\alpha) = 1 \text{ и } \frac{\alpha + \alpha(1-\alpha)}{1-(1-\alpha)^2} = \frac{2\alpha - \alpha^2}{1-1+2\alpha-\alpha^2} = \frac{2\alpha-\alpha^2}{2\alpha-\alpha^2} = 1, \qquad (1.4.15)$$

и нет смысла делать какие-либо преобразования с моделью Брауна и вводить в неё поправочный коэффициент. Используя процедуру дальше, в модели (1.4.4) получим для четвёртого прогнозного значения:

$$\begin{aligned} \hat{Y}_4 &= \alpha Y_3 + (1-\alpha)\hat{Y}_3 = \alpha Y_3 + (1-\alpha)(\alpha Y_2 + (1-\alpha)Y_1) = \\ &= \alpha Y_3 + \alpha(1-\alpha)Y_2 + (1-\alpha)^2 Y_1 \end{aligned}. \qquad (1.4.16)$$

Здесь сумма всех весов также равна единице:

$$s_3 = \alpha + \alpha(1-\alpha) + (1-\alpha)^2 = \alpha + \alpha - \alpha^2 + 1 - 2\alpha + \alpha^2 = 1. \qquad (1.4.17)$$

На следующем шаге, вычисляя пятое прогнозное значение получим:

$$\begin{aligned} \hat{Y}_5 &= \alpha Y_4 + (1-\alpha)\hat{Y}_4 = \alpha Y_4 + (1-\alpha)(\alpha Y_3 + \alpha(1-\alpha)Y_2 + (1-\alpha)^2 Y_1) = \\ &= \alpha Y_4 + \alpha(1-\alpha)Y_3 + \alpha(1-\alpha)^2 Y_2 + (1-\alpha)^3 Y_1 \end{aligned}. \qquad (1.4.18)$$

Вычислим сумму весов этой модели, то есть – сумму членов такого ряда:

$$s_4 = \alpha + \alpha(1-\alpha) + \alpha(1-\alpha)^2 + (1-\alpha)^3. \qquad (1.4.19)$$

Представим сумму первых трёх слагаемых (1.4.19) так:

$$s = \alpha + \alpha(1-\alpha) + \alpha(1-\alpha)^2 = \alpha + \alpha(1-\alpha) + (1-\alpha)^2 - (1-\alpha)^2 + \alpha(1-\alpha)^2.$$

Откуда, с учётом (1.4.17):

$$s = 1 - (1-\alpha)^2 + \alpha(1-\alpha)^2 = 1 - (1-\alpha)^3.$$

Подставляя полученное значение в (1.4.19), получим:

$$s_4 = 1 - (1-\alpha)^3 + (1-\alpha)^3 = 1. \qquad (1.4.20)$$

Вновь сумма весов оказалась равной единице. Будет она равна единице и для любого другого значения $T>2$. Аналогичным образом можно доказать, что ряд весов при использовании принципа (1.4.12) будет сходиться к 1 для любого значения $T>2$.

Теперь можно сделать однозначный вывод о том, что метод Брауна при начальных условиях, определённых как (1.4.4) или (1.4.12), автоматически приводит к тому, что сумма весов (1.2.5) всегда равна единице и вносить поправочные коэффициенты в модель Брауна так, как это было предложено Р.Вейдом нет смысла!

Таким образом, при работе с малыми выборками для применения метода Брауна предлагается пользоваться формулами (1.4.4) или (1.4.12). Эти формулы, разработанные для коротких рядов, могут использоваться и для длинных рядов, поэтому они могут быть приняты за основу как универсальные.