1.5. Основные модификации модели Брауна

Модель краткосрочного прогнозирования Брауна рассчитана на применение в случае прогнозирования процессов, которые не имеют ярко выраженной динамики роста или падения своих показателей. Она приемлема для рядов, уровень которых меняется относительно некоторой постоянной величины. С течением времени эта величина может изменяться, но для краткосрочной перспективы эти изменения ничтожны, как ничтожны изменения климата на Земле с позиций жизни отдельно взятой амёбы. Однако на практике при краткосрочном прогнозировании социально-экономической динамики приходится иметь дело и с такими ее показателями, которые имеют как раз ярко выраженную тенденцию.

Для того чтобы использовать достаточно простой и эффективный механизм модели Брауна для краткосрочного прогнозирования рядов, имеющих ярко выраженную тенденцию роста, был предложен ряд модификаций метода Брауна. В настоящее время известны метод Холта, метод Холта с модификациями Муира, метод двойного сглаживания Брауна, метод адаптивного сглаживания Брауна, метод Бокса-Дженкинса, метод Муира, сезонно-декомпозиционная прогностическая модель Холта-Винтера, модель с аддитивной сезонной составляющей Тейла-Вейджа, обобщенный адаптивно-сглаживающий метод Брауна, метод Брауна-Майера и другие[1].

Разберём суть этих модификаций. Начнём с самой простой модели – модели линейного тренда. Воспользуемся для этого материалами, изложенными в работе Ю.П.Лукашина. Для рядов, имеющих линейную динамику, можно построить следующую модель линейного тренда[2]:

$$\hat{Y}_{T+\tau} = a_{1,T} + \tau a_{2,T}\,, \qquad (1.5.1)$$

здесь $\hat{Y}_{T+\tau}$ - прогнозное значение ряда, сделанное на τ шагов вперёд,

$a_{1,T}$ - расчётное значение коэффициента, характеризующего начальное значение динамического ряда,

$a_{2,T}$ - расчётное значение коэффициента пропорциональности между изменяющимся временем τ и показателем Y_T, который характеризует прирост показателя во времени.

Ч.Холт предложил оценивать расчётные значения коэффициентов модели (1.5.1) так.

$$a_{1,T} = \alpha_1 Y_T + (1-\alpha_1)(a_{1,T-1} + a_{2,T-1}) \qquad (1.5.2)$$

$$a_{2,T} = \alpha_2 (a_{1,T} - a_{1,T-1}) + (1-\alpha_2) a_{2,T-1}\,. \qquad (1.5.3)$$

Если попытаться дать интерпретацию предложенным Холтом формул, опираясь на уравнение линейного тренда, то сделать это будет нелегко.

---

[1] Льюис К.Д. Методы прогнозирования экономических показателей. - М.: Финансы и статистика, 1986.

[2] Лукашин Ю.П. Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования временных рядов. – М.: Финансы и статистика, 2003. – С.36.

Поэтому обратимся непосредственно к сути формул (1.5.2) и (1.5.3) для того, чтобы понять логику рассуждений Холта. Коэффициент a_1 меняется во времени и растёт, не являясь постоянным, также как и другой коэффициент. Это следует из формулы (1.5.2), в которой первое слагаемое характеризует достигнутый уровень возрастающего ряда, а второе – прирост этого уровня.

Сразу необходимо обратить внимание на следующее. Если показатель Y_T измеряется, например, в рублях, то и коэффициент a_1 также измеряется в рублях. Из (1.5.1) следует, что другой коэффициент a_2 должен измеряться как скоростной параметр отношением руб/время. Поэтому непосредственно складывать коэффициент a_1 и коэффициент a_2, как это сделано во втором слагаемом правой части равенства (1.5.2), нельзя – как нельзя складывать расстояние и скорость. Поэтому можно предполагать, что в скобках второго слагаемого равенства (1.5.2) коэффициент a_2 умножается на время τ, которое в данном случае равно единице и поэтому в формулу не включено. Только в этом случае размерности слагаемых совпадут и можно производить их сложение. Таким образом, время в модели Холта не имеет точку отсчёта и его показатель τ является приростным, причём расстояния между двумя соседними наблюдениями равны единице. Время в модели Холта равномерно. Из этого следует, что модель (1.5.1) представляет собой не общеизвестное уравнение тренда, а модель линейной авторегрессии первого порядка с постоянным приростом, то есть:

$$\hat{Y}_T = \hat{Y}_{T-1} + \Delta Y = a_{1,T} + a_{2,T}\,. \tag{1.5.4}$$

Если рассматривать модель именно так, то смысл каждого равенства модели Холта становится очевидным.

Формула (1.5.2), позволяющая вычислить адаптивное значение коэффициента a_1, представляет собой модель Брауна, первое слагаемое которого характеризует фактически достигнутый уровень ряда в момент времени t, а второе слагаемое – характеризует его расчётное значение в предыдущий момент. Иначе говоря, метод Брауна в этой ситуации применим к прогнозированию значений коэффициента a_1.

Легко понять теперь и смысл второго уравнения модели Холта (1.5.3). Первое слагаемое равенства (1.5.3) представляет характеристику постоянного прироста модели авторегрессии (1.5.4), а второе слагаемое – характеризует состояние коэффициента a_2 в предыдущий момент времени. Вновь методом Брауна прогнозируется значение коэффициента a_2.

Принципиальный недостаток этого подхода заключается в том, что необходимо оптимизировать одновременно два параметра – α_1 и α_2, что не всегда представляет собой простую вычислительную задачу.

В существующей теории и практике социально-экономического прогнозирования значения постоянных сглаживания ограничиваются пределами от 0 до 1. Если в модели Брауна, разработанной для прогнозирования некоторого изменяющегося во времени показателя ограничения на постоянную сглаживания логично следовали из предпосылок самой модели, поскольку она представляла собой среднюю взвешенную ряда, то в модели Холта (как и во многих других модификациях метода Брауна) такое ограничение не вытекает из свойств модели. Это возможно только в том случае, когда есть основания априорно предполагать, что коэффициенты линейного тренда меняются во времени относительно некоторого постоянного уровня, это – во-первых, и они не зависимы друг от друга, это – во-вторых.

Весьма часто прогнозист может предполагать, что на определённом промежутке времени значения коэффициентов модели меняются относительно некоторого своего уровня. Но независимость коэффициентов a_1 и a_2 не выполняется никогда: в (1.5.2) при расчёте коэффициента a_1 используется значение коэффициента a_2, а при вычислении с помощью (1.5.3) коэффициента a_2 напрямую используется коэффициент a_2. Поскольку каждый из коэффициентов вычисляется с помощью собственного значения постоянной сглаживания, получается, что постоянная сглаживания α_1 влияет на постоянную сглаживания α_2 и наоборот. Это говорит о том, что использование классических пределов на области изменения постоянных сглаживания в методе Холта является необоснованным.

Для того чтобы понять, каким же должно быть ограничение на постоянные сглаживания на самом деле попробуем так же, как это было сделано ранее, выразить прогнозное значение через предыдущие фактические. Для начала подставим в формулу (1.5.1), предполагая, что $\tau = 1$, из формулы (1.5.3) значение коэффициента $a_{2,T}$. Получим:

$$\hat{Y}_{T+1} = a_{1,T} + \alpha_2\left(a_{1,T} - a_{1,T-1}\right) + \left(1-\alpha_2\right)a_{2,T-1}. \qquad (1.5.5)$$

Теперь подставим в (1.5.5) значение коэффициента $a_{1,t}$ из (1.5.2):

$$\hat{Y}_{T+1} = \alpha_1 Y_T + \left(1-\alpha_1\right)\left(a_{1,T-1} + a_{2,T-1}\right) + \alpha_2\left(\alpha_1 Y_T + \left(1-\alpha_1\right)\left(a_{1,T-1} + a_{2,T-1}\right) - a_{1,T-1}\right) + \left(1-\alpha_2\right)a_{2,T-1}.$$

Раскроем скобки:

$$\begin{gathered}\hat{Y}_{T+1} = \alpha_1 Y_T + \alpha_2\alpha_1 Y_T + \left(1-\alpha_1\right)a_{1,T-1} + \left(1-\alpha_1\right)a_{2,T-1} + \alpha_2\left(1-\alpha_1\right)a_{1,T-1} + \\ \alpha_2\left(1-\alpha_1\right)a_{2,T-1} - \alpha_2 a_{1,T-1} + \left(1-\alpha_2\right)a_{2,T-1}\end{gathered}. \qquad (1.5.6)$$

Сгруппировав слагаемые, получим:

$$\hat{Y}_{T+1} = Y_T\alpha_1\left(1+\alpha_2\right) + a_{1,T-1}\left(\left(1-\alpha_1\right)\left(1+\alpha_2\right) - \alpha_2\right) + a_{2,T-1}\left(\left(1-\alpha_1\right)\left(1+\alpha_2\right) + \left(1-\alpha_2\right)\right) \quad (1.5.7)$$

Уже на этом этапе видно, что веса при фактических значениях в ряде данных не имеют ничего общего с весами в модели Брауна: коэффициенты сглаживания α_1 и α_2 складываются, вычитаются, перемножаются. Если попытаться раскрыть эту формулу на большее число шагов назад (а не на один, как это мы только что проделали), то можно прийти к достаточно сложному ряду, веса при фактических значениях в котором будут сходиться к *1* при выполнении условия, которое явно не идентично ограничению постоянных сглаживания в пределах от *0* до *1*. Ограничения на область изменения постоянных сглаживания будут описываться сложной функциональной зависимостью между ними: $\alpha_1 = f(\alpha_2)$. Однако, в связи с тем, что вывод этой зависимости представляет собой нетривиальную задачу, не представляющую интереса с позиций задач, изучаемых в учебнике, заметим лишь, что эти пределы не определены.

Из этого следует, что ограничение каким-либо образом области определения постоянных сглаживания данной модели означает в первую очередь обеднение её свойств. В связи с тем, что пределы изменения постоянных сглаживания в методе Холта нет, единственным разумным ограничением будет принадлежность коэффициентов к области действительных чисел:

$$\alpha_1, \alpha_2 \in \Re. \tag{1.5.8}$$

В наше время решение задачи выбора постоянных сглаживания не представляет особой сложности, так как практически любой программный продукт (MS Excel, MathCad, Mathemathica) позволяет подобрать коэффициенты любой модели, используя численные методы с каким-либо условием (например, минимизация суммы квадратов отклонений фактических значений от расчётных).

Эта особенность с ограничениями коэффициентов характерна не только для модели Холта, но и для всех других модификаций метода Брауна, в которых используется несколько постоянных сглаживания.

Ещё одна проблема, связанная с моделью Холта, заключается в том, что для начала расчётов по модели прогнозисту нужно каким-то образом задать начальные значения коэффициентов $a_{1,0}$ и $a_{2,0}$, но никакого универсального принципа задания этих коэффициентов не существует, а их первоначальное значение, естественно, влияет на прогнозные свойства модели. Коэффициенты модели можно рассчитать, используя метод наименьших квадратов, по всему ряду наблюдений, по какой-то его части, задать на основе экспертных суждений – вариантов много, никакого одного единственно верного принципа не существует. Таким образом, при построении модели Холта прогнозист вынужден подбирать не только оптимальные постоянные сглаживания, но ещё и выбирать принцип задания коэффициентов модели (1.5.1), благодаря которому можно было бы получить наиболее точный прогноз.

Ещё одним существенным недостатком модели Холта является допущение о том, что ряд данных имеет некоторую тенденцию к линейному росту либо к линейному снижению, изменяющуюся во времени. На практике это допущение выполняется не часто – линейные тенденции роста показателя сменяются участками нелинейной динамики, которая вновь приобретает характер линейного тренда. В таких ситуациях модель Холта даёт посредственные прогнозы – нередко получается так, что прогноз, полученный по простой модели Брауна, оказывается более точным, нежели прогноз по модели Холта.

Кроме указанных выше недостатков, обостряются проблемы расчёта модели на малых выборках. В предыдущем параграфе 1.4 мы показали их суть и пути решения на примере простой модели Брауна. Эти же самые проблемы, но в более сложной форме возникают и применительно к методу Холта и другим модификациям модели Брауна. Удовлетворительного решения этих проблем пока нет. Поэтому все рассматриваемые модификации применимы исключительно к длинным выборкам, на которых влияние первых расчётных значений модели на прогноз мизерно.

Продолжая логику модификаций метода Брауна, в 1960-м году П.Р. Уинтерс предложил модель с мультипликативной сезонной составляющей. Эта модель строится из предположения о том, что в ряде данных помимо линейных тенденций имеются ещё и сезонные составляющие, которые повторяются с одинаковой периодичностью s.

Модель Холта в таком случае модифицируется, дополняясь новыми составляющими, и представляет собой систему из четырёх формул:

$$\hat{Y}_{t+\tau} = \left(a_{1,t} + \tau a_{2,t}\right)c_{t-s}, \tag{1.5.9}$$

$$a_{1,t} = \alpha_1 \frac{Y_t}{c_{t-s}} + \left(1-\alpha_1\right)\left(a_{1,t-1} + a_{2,t-1}\right), \tag{1.5.10}$$

$$a_{2,t} = \alpha_2\left(a_{1,t} - a_{1,t-1}\right) + \left(1-\alpha_2\right)a_{2,t-1}, \tag{1.5.11}$$

$$c_t = \alpha_3 \frac{Y_t}{a_{1,t}} + \left(1-\alpha_3\right)c_{t-s}. \tag{1.5.12}$$

В формулах (1.5.9) – (1.5.12) c_{t-s} – сезонная составляющая с лагом в s шагов, α_3 – постоянная сглаживания при сезонной компоненте, а все остальные обозначения имеют тот же смысл, что и в модели Холта (1.5.1) – (1.5.3).

Алгоритм построения модели заключается в следующем. Сначала исследователь рассчитывает коэффициенты $a_{1,0}$ и $a_{2,0}$ линейного тренда по какой-либо части либо по всему ряду данных, после чего на некотором его участке, состоящем из s наблюдений, рассчитывает сезонные составляющие c_t по формуле:

$$c_t = \frac{Y_t}{a_{1,0} + a_{2,0}t}.$$

В результате данных вычислений исследователь получает ряд данных по сезонным коэффициентам c_t, состоящий из s элементов, которые и используются в уравнениях (1.5.9), (1.5.10) и (1.5.12).

Очевидным достоинством данной модели является то, что она позволяет учитывать линейные тенденции с цикличностью, что довольно часто встречается в прогнозировании социально-экономической динамике.

Однако к явным недостаткам модели можно отнести как раз то, что в основе модели лежит допущение о наличии только двух типов тенденций в рядах данных, которое на практике не всегда выполняется: линейные тенденции, в рядах данных могут сменяться нелинейными, а периодичность циклической составляющей не постоянна. Из-за этого у модели, спустя некоторое время, начинаются серьёзные расхождения с реальными данными.

Кроме того, большие сложности вызывает применение этой модели на малых выборках. В результате этого исследователю приходится много времени тратить на подбор значений первых расчётных значений коэффициентов модели.

В случае если исследователь решает подобрать постоянные сглаживания, используя какой-нибудь из критериев (например, минимум суммы квадратов отклонений), в его распоряжении должны находиться 3 одинаковых части ряда данных: по первой рассчитываются сезонные коэффициенты, по второй строится модель (но в расчёте используются ещё не адаптированные сезонные коэффициенты), и только по третьей можно подобрать оптимальные постоянные сглаживания (из-за лага сезонности s).

Ещё одним недостатком модели Уинтерса является необходимость нахождения оптимальных значений трех постоянных сглаживания. При этом все коэффициенты модели и постоянные сглаживания взаимосвязаны, поэтому их область ограничений ещё более сложно определить, чем в модели Холта. И вновь, задание по инерции области изменения постоянных сглаживания в классических пределах от нуля до единицы является совершенно не обоснованным и резко ограничивает прогнозные свойства модели.

Так как экономическая динамика многообразна в своих проявлениях, то и типы динамики временных рядов многообразны. Априорное предположение наличия линейной, некоторой однозначно заданной нелинейной или регулярной сезонной составляющих не всегда верно для социально-экономических процессов. Для краткосрочного прогнозирования таких рядов со сложной неоднозначной по своему характеру динамикой предлагается воспользоваться методом разложения её в степенной ряд Тейлора. Таким образом, задача упрощается до создания модели краткосрочного прогнозирования динамики с помощью полиномиальных трендов[3]:

---

[3] Лукашин Ю.П. Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования временных рядов. – М.: Финансы и статистика, 2003. – С. 63.

$$\hat{x}_{\tau}(\tau) = \hat{a}_1 + \hat{a}_2\tau + \frac{1}{2!}\hat{a}_3\tau^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\hat{a}_{n+1}\tau^n. \qquad (1.5.13)$$

Если вновь представить ряд как некоторое подобие авторегрессии и промежуток времени τ представить одинаковым и равным единице, задача вновь сводится к краткосрочному прогнозированию коэффициентов модели (1.5.13) с помощью метода Брауна.

Продуктивность подхода, представляющего тренд в виде простой линейной авторегрессии первого порядка применительно к модели Брауна, заставила учёных развить этот подход и распространить его на более сложные авторегрессионные модели. Этот класс моделей получил название "модели авторегрессии - скользящего среднего (метод Бокса-Дженкинса)", известный за рубежом под аббревиатурой «ARIMA» (Autoregressive integrated moving average).