1.6. Краткосрочное прогнозирование факторных зависимостей

Модификации метода Брауна, широко использующиеся на практике, позволяют выполнять удовлетворительные прогнозы для самых различных тенденций. Но у всех этих модификаций, как и у метода Брауна, имеется один недостаток – они разработаны исключительно для задач прогнозирования трендов, изменяющихся исключительно под влиянием равномерно текущего времени показателей. Но очень часто перед экономистом стоит более сложная задача – оценить как поведёт себя прогнозируемый показатель, если изменится фактор, влияющий на него. Например, руководителю предприятия важно знать: на сколько необходимо увеличить оплату труда (x_{T+1}) для того, чтобы работники организации повысили производительность труда до нужной величины (Y_{T+1}) при появлении срочного заказа. Поскольку зависимость производительности труда от его оплаты представляет собой результат эволюционного процесса, регрессионная модель будет с этой задачей справляться не очень хорошо, поскольку текущая информация о зависимости между производительностью труда и его оплатой отражает сложившиеся к настоящему моменту навыки, квалификацию и отношение к труду работников, а информация за прошлые периоды времени эти характеристики не отражает. Регрессионная же модель учитывает все данные одинаково. Поэтому для краткосрочного прогнозирования факторных зависимостей эволюционного процесса необходимо осуществить взвешивание наблюдений так, чтобы их ценность для прогнозной модели уменьшалась с убыванием наблюдений в прошлое. Но даже простую линейную однофакторную модель:

$$Y_t = aX_t \tag{1.6.1}$$

представить в виде авторегрессии (1.5.4) нельзя, а основные модификации метода Брауна, как было показано в предыдущем параграфе, исходят из представления модели именно в этом виде.

Для того чтобы использовать модель (1.6.1) для целей краткосрочного прогнозирования, специалистами был предложен очень громоздкий вариант, суть которого такова[1]. Прологарифмировав левую и правые части равенства (1.6.1), получим:

$$\ln Y_t = \ln a + \ln x_t$$

или

$$y_t = k + x_t\,.$$

---

[1] Лукашин Ю.П. Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования временных рядов. – М.: Финансы и статистика, 2003. – С. 305 -306.

Если от левой и правой части равенства отнять значения этих показателей в предыдущий момент времени, то будет получено следующее равенство:

$$y_t - y_{t-1} = x_t - x_{t-1}$$

или

$$y_t = x_t - x_{t-1} + y_{t-1}\,.$$

В результате хитроумных подстановок и преобразований предлагается такая модификация модели краткосрочного прогнозирования факторной зависимости:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + \beta_2 x_{t-1} + \alpha\, y_{t-1}\,. \qquad (1.6.2)$$

Для использования этой модели в целях краткосрочного прогнозирования, необходимо найти оптимальные значения четырёх постоянных сглаживания – β_0, β_1, β_2 и α. Таким образом задача краткосрочного прогнозирования факторной зависимости превращается в сложную и трудоёмкую задачу, решение которой под силу далеко не каждому экономисту, прогнозирующему линейную факторную зависимость. Попытки использовать более сложные, чем (1.6.1) модели для краткосрочного прогнозирования оказываются ещё более громоздкими и запутанными. А задача краткосрочного прогнозирования многофакторных зависимостей превращается в такую головоломку, что для использования метода Брауна предлагается применять метод градиентного спуска и именно к полученным уравнениям и алгоритму их решения реализовывать метод Брауна[2]. Именно потому, что математический аппарат краткосрочного прогнозирования факторных и многофакторных зависимостей очень сложен, он остаётся уделом учёных, упражняющихся в соревновании по применению всё более сложных и сложных подходов, но не практикующих экономистов.

Покажем, что на самом деле метод Брауна легко может быть модифицирован к задачам краткосрочного прогнозирования с помощью факторных моделей[3]. Для этого следует изменить сам принцип применения метода Брауна – вместо попыток использования авторегрессионных моделей, уровни которой адаптируются методом Брауна, будем адаптировать коэффициенты моделей.

[2] Лукашин Ю.П. Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования временных рядов. – М.: Финансы и статистика, 2003

[3] Светуньков С.Г. Количественные методы прогнозирования эволюционных составляющих экономической динамики. – Ульяновск: Изд-во УлГУ, 1999.

Рассмотрим вначале простую линейную модель, когда для момента t показатель Y_t может быть представлен в виде линейной зависимости от x_t в этот же момент времени:

$$Y_t = a_0 + a_1 x_t \,. \tag{1.6.3}$$

В предыдущий момент времени t-1 показатель Y_{t-1} будет определяться равенством:

$$Y_{t-1} = a_0 + a_1 x_{t-1}\,, \tag{1.6.4}$$

С учётом этого, (1.6.3) можно записать так:

$$Y_t = a_0 + a_1 x_{t-1} + a_1(x_t - x_{t-1}) = Y_{t-1} + a_1(x_t - x_{t-1})\,. \tag{1.6.5}$$

Из формулы (1.6.5) легко определить коэффициент a_1:

$$a_1 = \frac{Y_t - Y_{t-1}}{x_t - x_{t-1}}\,. \tag{1.6.6}$$

Поскольку реальные экономические зависимости не являются функциональными, а в лучшем случае – регрессионными, то подставляя в исходную модель (1.6.3) реальные данные, получим изменяющийся во времени коэффициент (1.6.6), то есть, представлять собой временной ряд $\{a_{1t}\}$. Если, например, наблюдается краткосрочная тенденция к некоторому нелинейному росту прогнозируемого показателя, то это будет отражаться увеличением коэффициента пропорциональности, высчитываемого по формуле (1.6.6). Если же наоборот, наблюдается кратковременная тенденция к замедлению роста, отличной от линейной тенденции, то и это найдёт отражение в кратковременном уменьшении коэффициентов модели, если их считать по формуле (1.6.6). После того, как эти кратковременные тенденции прекратятся, коэффициент пропорциональности вновь будет колебаться под влиянием случайных факторов относительно некоторого своего среднего значения. Таким образом, именно коэффициент a_1 будет отражать те самые изменения в тенденциях, которые следует учесть при краткосрочном прогнозировании. То есть в качестве того самого ряда, чьи значения необходимо прогнозировать, должен выступать коэффициент пропорциональности a_1. А далее, по прогнозным значениям этого коэффициента и значениям фактора можно будет прогнозировать сам показатель.

Эта модификация метода Брауна для краткосрочного прогнозирования показателя Y_t в зависимости от фактора x_t, будет с учётом изложенной выше логики иметь следующий вид.

Вначале рассчитываются экспоненциально взвешенные значения коэффициента пропорциональности a_1 по методу Брауна:

$$\hat{a}_{1T+1} = \alpha \frac{Y_T - Y_{T-1}}{x_T - x_{T-1}} + (1-\alpha)\hat{a}_{1T} \quad (1.6.7)$$

Затем выполняется прогноз показателя Y на следующий шаг наблюдения ($T+1$).

$$\hat{Y}_{T+1} = Y_T + \hat{a}_{1T+1}(x_{T+1} - x_T) \quad (1.6.8)$$

Как легко можно убедиться из (1.6.8), вычислять значения свободного члена не обязательно, и оптимизировать необходимо только один параметр.

Так как все наиболее часто применяемые модификации метода Брауна предназначены для прогнозирования временных рядов, рассмотрим возможность применения нашего подхода к краткосрочному прогнозированию временного ряда, имеющего линейную тенденцию.

Фактором, определяющим изменение показателя Y, выступает время t, а это означает, что зависимость (1.6.3) будет иметь вид:

$$Y_t = a_0 + a_1 t \, . \quad (1.6.9)$$

Тогда, воспользовавшись (1.6.7) – (1.6.8), имеем для ряда с постоянным шагом наблюдения, равным единице $(t-(t-1))=1$:

$$\hat{a}_{1T+1} = \alpha(Y_T - Y_{T-1}) + (1-\alpha)\hat{a}_{1T} \, . \quad (1.6.10)$$

Прогноз показателя Y на следующий шаг наблюдения ($T+1$) выполняется так:

$$\hat{Y}_{T+1} = Y_T + \hat{a}_{1T+1} \, . \quad (1.6.11)$$

Если сравнить предложенную модификацию метода Брауна с модификацией Холта и другими модификациями, изложенными в предыдущем параграфе, то легко убедиться в преимуществах предложенного подхода (1.6.7) – (1.6.8). Помимо простоты вычисления, важно то, что оптимизации подвергается только один параметр α, в то время как, например, у Холта – два параметра α_1 и α_2.

Для того чтобы получить иные модификации краткосрочного прогнозирования факторных зависимостей, используя подход, изложенный в данном параграфе, обобщим его на более широкий класс моделей. Для использования метода Брауна для различных моделей в целях краткосрочного прогнозирования, необходимо, прежде всего, определить объект усреднения и прогнозирования, который осуществляется с помощью метода Брауна. Действительно, метод Брауна представляет собой экспоненциально взвешенную среднюю некоторой переменной, поэтому его следует применять там, где некоторый параметр или переменная меняется во времени и может быть представлена в виде скользящей взвешенной средней. При этом в процессе усреднения в большей степени должна учитываться текущая информация, чем прошлая.

Как видно из (1.6.7) – (1.6.8), там таким параметром выступил коэффициент пропорциональности a_1. Как предложенный подход применить, например, к квадратичной зависимости? Запишем вначале уравнение этой зависимости:

$$Y_t = a_0 + a_1 x_t + a_2 x_t^2 . \qquad (1.6.12)$$

Если от этой модели, построенной для момента времени *t* отнять эту же модель, построенную в предыдущий момент времени *t-1*, получим:

$$Y_t - Y_{t-1} = a_1 (x_t - x_{t-1}) + a_2 (x_t^2 - x_{t-1}^2) . \qquad (1.6.13)$$

Разделив левую и правые части полученного равенства на приращение аргумента, получим некоторую оценку первой производной функции в промежутке времени между *t* и *t-1*:

$$\frac{Y_t - Y_{t-1}}{x_t - x_{t-1}} = a_1 + a_2 (x_t + x_{t-1}) . \qquad (1.6.14)$$

Как и следовало ожидать, эта оценка представляет собой линейную функцию. Если теперь от левой и правой частей полученного значения (1.6.14) отнять левые и правые части этого же равенства, но вычисленного в предыдущий промежуток времени между *t-1* и *t-2*

$$\frac{Y_{t-1} - Y_{t-2}}{x_{t-1} - x_{t-2}} = a_1 + a_2 (x_{t-1} + x_{t-2}) ,$$

то коэффициент a_1 сокращается и получаем формулу для вычисления единственного коэффициента модели (1.6.12):

$$a_2 = \left(\frac{Y_t - Y_{t-1}}{x_t - x_{t-1}} - \frac{Y_{t-1} - Y_{t-2}}{x_{t-1} - x_{t-2}}\right) / (x_t - x_{t-2}) . \qquad (1.6.15)$$

Теперь можно сформулировать простую процедуру краткосрочного прогнозирования квадратичной факторной зависимости с помощью метода Брауна.

Значение коэффициента a_2, вычисленное в соответствии с (1.6.15) для любого реального ряда социально-экономической динамики, отражает текущие изменения в этой динамике и представляет собой некоторый динамический ряд $\{a_{2t}\}$. Само значение коэффициента будет меняться относительно некоторого среднего значения, которое и будет являться лучшей прогнозной оценкой этого коэффициента на краткий срок. При этом, поскольку ряд эволюционный, то текущая информация о значении коэффициента важнее, чем прошлая, поэтому усреднение следует осуществлять с помощью скользящей взвешенной средней, а из множества возможных способов такого вычисления средней мы отдаём предпочтение методу Брауна:

$$\hat{a}_{2T+1} = \alpha\left(\frac{Y_T - Y_{T-1}}{x_T - x_{T-1}} - \frac{Y_{T-1} - Y_{T-2}}{x_{T-1} - x_{T-2}}\right)/(x_T - x_{T-2}) + (1-\alpha)\hat{a}_{2T}. \qquad (1.6.16)$$

Для того чтобы спрогнозировать экономический показатель Y_{t+1} по известному значению показателя x_{t+1} и прогнозному значению a_{2t+1}, воспользуемся формулой (1.6.15), из которой следует:

$$\hat{Y}_{t+1} = Y_t + \left[\hat{a}_{2t+1}(x_{t+1} - x_{t-1}) + \frac{Y_t - Y_{t-1}}{x_t - x_{t-1}}\right](x_{t+1} - x_t)$$

Вновь, как видно, оптимизируется только одно значение постоянной сглаживания, что логично, поскольку именно этот параметр корректирует поведение модели в условиях меняющихся внешних условий, способствуя соответствующему изменению параметров модели. Применительно к временному ряду, когда в качестве объясняющего фактора выступает время, алгоритм ещё более упрощается. Действительно, если вместо x_t поставить t, а вместо x_{t-1} подставить $t-1$, то формулы (1.6.15) – (1.6.19) будут преобразованы следующим образом:

$$a_2 = \frac{y_t - 2y_{t-1} + y_{t-2}}{2}. \qquad (1.6.20)$$

Прогнозное значение коэффициента a_2 на следующий шаг наблюдения будет вычисляться по методу Брауна в соответствии с формулой (1.6.16), а все остальные коэффициенты (при необходимости) так:

$$\hat{a}_{1,t+1} = y_t - y_{t-1} - \hat{a}_{2,t+1}(2t-1). \qquad (1.6.21)$$

Свободный член модели (1.6.12) определяется ещё проще:

$$\hat{a}_{0,t+1} = y_t - \hat{a}_{1,t+1}t - \hat{a}_{2,t+1}t^2. \qquad (1.6.22)$$

Зная прогнозные значения всех трёх коэффициентов модели (1.6.12), можно спрогнозировать значение временного ряда на следующий шаг:

$$\hat{y}_{t+1} = \hat{a}_{0,t+1} + \hat{a}_{1,t+1}(t+1) + \hat{a}_{2,t+1}(t+1)^2 . \qquad (1.6.23)$$

Можно выполнить прогноз на два, три и т.п. шагов прогнозирования.

Предложенный подход легко распространить и на авторегрессионные модели. Покажем теперь, как его применить к нелинейным моделям, которые представлены в мультипликативной форме, например, к экспоненциальной модели типа:

$$y_t = a_0 e^{a_1 x_t} . \qquad (1.6.24)$$

Для этого следует линеаризовать модель, прологарифмировав левую и правую части модели:

$$\ln y_t = \ln a_0 + a_1 x_t . \qquad (1.6.25)$$

Для полученной линейной модели типа (1.6.3) необходимо применить логику, изложенную в (1.6.6) – (1.6.8). В соответствии с ней сначала находится коэффициент a_1:

$$a_1 = \frac{\ln y_{t+1} - \ln y_t}{x_{t+1} - x_t} . \qquad (1.6.26)$$

Затем рассчитываются экспоненциально взвешенные значения коэффициента a_1 по методу Брауна:

$$\hat{a}_{1t+1} = \alpha \frac{\ln y_{t+1} - \ln y_t}{x_{t+1} - x_t} + (1-\alpha)\hat{a}_{1t} . \qquad (1.6.27)$$

После чего выполняется прогноз самого показателя на следующий шаг наблюдения (*t+1*).

$$\ln y_{t+1} = \ln y_t + \hat{a}_{1t+1}(x_{t+1} - x_t) . \qquad (1.6.28)$$

Или

$$y_{t+1} = y_t e^{\hat{a}_{1t+1}(x_{t+1} - x_t)} . \qquad (1.6.29)$$

Если перед прогнозистом стоит более простая задача, а именно – прогнозирование временного ряда, описываемого экспоненциальным трендом, то задача эта решается с помощью следующих формул, которые со всей очевидностью вытекают из предыдущих рассуждений:

$$\hat{a}_{1t+1} = \alpha (\ln y_{t+1} - \ln y_t) + (1-\alpha)\hat{a}_{1t} . \qquad (1.6.30)$$

$$\ln y_{t+1} = \ln y_t + \hat{a}_{1t+1} . \qquad (1.6.31)$$

Или

$$y_{t+1} = y_t e^{\hat{a}_{1t+1}} . \qquad (1.6.32)$$

Как видно, возможности для применения различных модификаций метода Брауна ограничены лишь классом применяемых моделей.

Продемонстрируем приемлемость изложенных положений на одном из примеров, а именно на курсе доллара США, меняющегося в ходе торгов на ММВБ. Для того чтобы демонстрация была наиболее убедительной, был взят участок нестационарного поведения курса доллара США – с 08.06.1992 по 01.12.1992 (табл. 1.2). Начало 90-х годов прошлого века в России характеризовалось изменением всех экономических взаимоотношений, структуры и механизмов хозяйствования. Курс доллара США в эти годы также находился под влиянием этих процессов, отражая сложность экономической динамики. Как легко убедиться из данных таблицы, динамика курса доллара нестационарна и необратима по своей сути, поэтому при прогнозировании курса доллара США следует воспользоваться или непосредственно методикой Брауна или одной из ее модификаций. В данном случае можно предположить возможность использования как аддитивных моделей, так и моделей в мультипликативной форме.

Воспользуемся алгоритмами, подробно рассмотренными в данном параграфе, применяя временную зависимость показателя курса доллара США. В качестве критерия оптимизации постоянной сглаживания будем использовать критерий минимизации дисперсии отклонения фактических значений курса доллара от рассчитываемых по модели Брауна или её модификаций.

Расчёты показали, что лучшей из всех аддитивных моделей, прогнозирующей указанные данные с наименьшей среднеквадратичной ошибкой δ (СКО), оказалась линейная модель (1.6.9). Для нее оптимальное значение постоянной сглаживания оказалось равным *0,191*. При этом δ*=20.07 руб./долл.* Малое значение оптимального значения постоянной сглаживания α*=0,191* говорит о незначительной адаптивности модели к текущей информации и о её сильной инерционности.

Табл. 1.2.

Курс доллара США на торгах ММВБ (руб/долл.)

Дата	*Курс*	*Дата*	*Курс*	*Дата*	*Курс*
08.06.92	112,0	***14.08.92***	162,0	***03.10.92***	317,0
12.06.92	112,5	***18.08.92***	161,0	***06.10.92***	342,0
16.06.92	120,0	***22.08.92***	162,0	***08.10.92***	335,0
20.06.92	127,53	***25.08.92***	167,0	***11.10.92***	335,0
23.06.92	146,3	***27.08.92***	208,0	***13.10.92***	338,0
25.06.92	147,0	***31.08.92***	213,0	***17.10.92***	369,0
28.06.92	144,3	***04.09.92***	213,0	***20.10.92***	370,0
03.07.92	135,08	***08.09.92***	205,0	***24.10.92***	383,0
07.07.92	131,3	***11.09.92***	203,0	***29.10.92***	397,0
11.07.92	131,3	***14.09.92***	205,0	***02.11.92***	395,0
16.07.92	137,0	***17.09.92***	207,0	***06.11.92***	401,0
20.06.92	153,08	***20.09.92***	241,0	***10.11.92***	403,5
24.07.92	157,0	***14.09.92***	205,0	***14.11.92***	420,0
28.07.92	160,0	***17.09.92***	207,0	***17.11.92***	448,0
01.08.92	162,0	***20.09.92***	241,0	***19.11.92***	448,0
04.08.92	162,0	***23.09.92***	249,0	***22.11.92***	450,0
07.08.92	161,0	***29.09.92***	255,0	***27.11.92***	447,0
10.08.92	162,0	***01.10.92***	280,0	***01.12.92***	417,0

Значительно лучше описывают данный отрезок динамики курса доллара США на ММВБ модели в мультипликативной форме. Из них лучшей оказалась экспоненциальная модель (1.6.30) – (1.6.32). Для нее оптимальное значение постоянной сглаживания $\alpha=0.048$. СКО оказалось в этом случае равным $\delta=9.858$ *руб/долл*. Модель, как видно, также в малой степени адаптивна к текущей информации.

Если теперь воспользоваться непосредственно моделью Брауна, то оптимальное значение постоянной сглаживания оказалось равным $\alpha=1,249$, что свидетельствует о хаотичном характере динамики курса доллара, при этом среднеквадратичная ошибка ретропрогноза оказалась равна $\delta=2,041$ *руб./долл*.

Таким образом, модель Брауна, рассчитанная на запредельном множестве, оказалась для данного участка временного ряда значительно точнее, чем более сложные линейные и нелинейные модели трендов.

В краткосрочном прогнозировании производственных процессов можно использовать производственную функцию Кобба-Дугласа. Покажем, как можно достаточно просто использовать наш подход к этому случаю.

Производственная функция Кобба-Дугласа имеет вид:

$$Y_t = AL_t^{\alpha} K_t^{1-\alpha}, \qquad (1.6.33)$$

где Y_t – производственный результат,

L_t – затраты трудовых ресурсов,

K_t – затраты капитальных ресурсов,

α - параметр, меняющийся в пределах от нуля до единицы.

Для применения метода Брауна к задаче краткосрочного прогнозирования производственных процессов следует прологарифмировать левую и правую части равенства (1.6.33). Получим:

$$\ln Y_t = \ln A + \alpha \ln L_t + (1-\alpha)\ln K_t . \qquad (1.6.34)$$

Откуда после небольших преобразований и замены переменных получим простую линейную однофакторную модель:

$$\ln \frac{Y_t}{K_t} = \ln A + \alpha \ln \frac{L_t}{K_t} \Leftrightarrow \; y_t = a_0 + a_1 x_t . \qquad (1.6.35)$$

Способ адаптации этой модели, которая представляет собой простую линейную однофакторную модель, с помощью метода Брауна изложен выше (1.6.7), (1.6.8).

В заключение следует указать на принципиальную возможность применения метода Брауна при краткосрочном прогнозировании многофакторных зависимостей.

Пусть необходимо для краткосрочного прогнозирования использовать многофакторную модель, учитывающую влияние *n* факторов:

$$y_t = f(x_{1,t}) + f(x_{2,t}) + \ldots + f(x_{n,t}) . \qquad (1.6.36)$$

Построение такой модели само по себе зачастую представляет сложную задачу, решение которой подробно изложено в одной из работ[4]. Так как параметры этой модели должны быть адаптированы к текущим изменениям, к ним нет смысла требовать выполнения обычных условий, при которых лучшей оценкой является оценка метода наименьших квадратов (МНК). Напротив, в этом случае наилучшим способом построения и адаптации модели будет выступать метод синтеза однофакторных моделей в многофакторную[5]. Для этого строится *n* однофакторных моделей:

$$y_t = F(x_{i,t}), i = 1,2,3,\ldots,n , \qquad (1.6.37)$$

которые с помощью весовых коэффициентов v_i синтезируются в единую модель:

$$y_t = v_1 F(x_{1,t}) + v_2 F(x_{2,t}) + \ldots + v_n F(x_{n,t}) . \qquad (1.6.38)$$

[4] Светуньков С.Г. Методы маркетинговых исследований. – СПб.: Изд-во ДНК, 2003. – 352 с.

[5] Рабочая книга по прогнозированию. – М.: Мысль, 1982. – 430 с.

Весовые коэффициенты рассчитываются по известной методике[6], исходя из точности аппроксимации каждой из однофакторных моделей (1.6.37). Эти коэффициенты остаются неизменными, а каждая из однофакторных моделей адаптируется вышеизложенным способом, а затем с помощью этих весовых коэффициентов v_i синтезируют общую прогнозную модель.

Очевидно, что количество постоянных сглаживания α_i будет в точности равно количеству n моделей (1.6.37).

Здесь уместно напомнить, что в существующем разделе теории краткосрочного прогнозирования для решения этой задачи предлагается использовать сложную и очень трудоёмкую процедуру численных методов (чаще всего – метод градиентного спуска).

Обобщая всё вышесказанное, можно сделать вывод о том, что модель любой сложности, если её возможно линеаризовать, может быть использована для краткосрочного прогнозирования в экономике с помощью предложенного подхода методом Брауна.

---

[6] Рабочая книга по прогнозированию. – М.: Мысль, 1982. – 430 с.