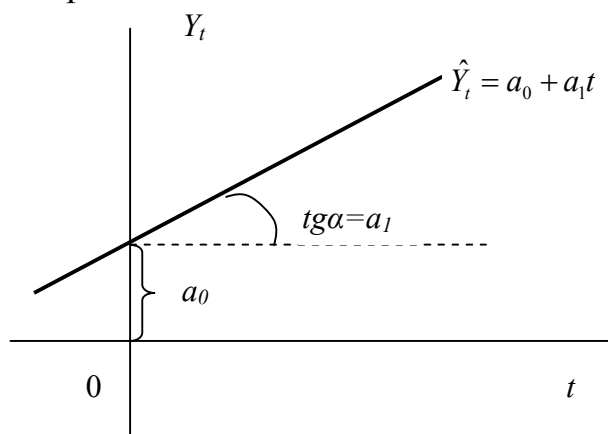


2.2. ОСНОВНЫЕ ФУНКЦИИ, ВЫСТУПАЮЩИЕ КАК МОДЕЛИ ТРЕНДА

Если в ходе предварительного анализа временного ряда удалось обнаружить в его динамике некоторую закономерность, возникает задача описать математически эту закономерность для того, чтобы, предполагая продолжение этой закономерности в будущем, на основе её математического выражения оценить количественные значения показателей временного ряда. Математически выраженная временная тенденция называется трендом. Поскольку тенденции изменения временных рядов социально-экономических показателей весьма многообразны, то и тренды могут иметь самые различные формы. Чаще всего в практике социально-экономического прогнозирования используют в качестве моделей трендов несколько элементарных функций. Рассмотрим их.



Линейная функция:

$$\hat{Y}_t = a_0 + a_1 t \quad (2.2.1)$$

График этой функции приведён на рисунке 2.2.1. Свободный член этой функции означает отрезок, который отсекает прямая линия на оси OY_t , а коэффициент пропорциональности a_1 характеризует тангенс угла наклона этой прямой к оси Ox_t .

Модель линейной функции очень часто

Рис. 2.2.1. Линейная модель и геометрическая интерпретация значений её коэффициентов

используют в прогнозировании. По крайней мере, исходя из общенаучного принципа «от простого – к сложному», изучают свойства этой модели, для неё разрабатывают различные методы оценивания её коэффициентов, а также их пересчёта при появлении новой информации, либо адаптации модели; выполняют прогнозы и считают доверительные интервалы, а затем на основе полученных знаний и навыков переходят к изучению более сложных моделей. На практике эту модель также довольно часто предпочитают другим более сложным моделям, поскольку другой общенаучный принцип «простоты» гласит о том, что если сложная модель не значительно улучшает понимание процесса, то ей надо предпочесть более простую модель – нет смысла усложнять задачу, если она имеет простое решение.

Значительно реже, чем линейную модель, используют модель *квадратичной функции*, которая применительно к трендам может быть записана так:

$$\hat{Y}_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \quad (2.2.2)$$

Графиком этой функции является парабола с осью симметрии, параллельной оси ординат. Характер функции определяется её коэффициентами. Если коэффициент $a_2 > 0$, то ветви параболы направлены вверх (рис. 2.2.2); если этот коэффициент меньше нуля, $a_2 < 0$, то ветви параболы направлены вниз. Ось ординат пересекается в точке $Y_0 = a_0$. Поэтому значение свободного члена модели этого тренда также характеризует начальный уровень тренда. Эта модель используется в тех случаях, когда временной ряд имеет нелинейную тенденцию, но, используя эту модель, необходимо помнить о том, что при довольно большом периоде прогнозирования сам показатель Y_t , который вычисляется по формуле (2.2.2), значительно меняет свои значения.

Крайне редко используются тренды, представляющие собой модель *многочлена третьей степени*. Вообще-то многочлены выше третьей степени в практике прогнозирования не используются, поскольку они являются неустойчивыми. Да и многочлены третьей степени имеют непростую форму, поскольку они при определённом сочетании значений коэффициентов имеют локальный минимум и локальный максимум и соответственно точку перегиба. В общем виде эта модель будет записана так:

$$\hat{Y}_t = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3. \quad (2.2.3)$$

Графиком такой функции является кубическая парабола. Одной из её характеристик выступает такая расчётная величина:

$$\Delta = 3a_3a_1 - a_2^2. \quad (2.2.4)$$

Если, например, $\Delta > 0$, то кубическая парабола имеет возрастающий характер при $a_3 > 0$ и убывает при $a_3 < 0$. А если $\Delta < 0$ и $a_3 > 0$, то она имеет вид, представленный на рисунке 2.2.3.

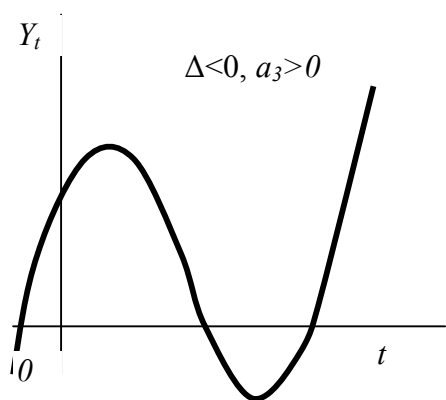


Рис. 2.2.3. Кубическая парабола (2.2.3)

части графика. Поэтому кубическая парабола может хорошо описать внутреннюю часть некоторой изменяющейся временной динамики, а вот для прогноза будет моделировать либо резкий рост, либо резкое падение в зависимости от

При этом ветви такой параболы, устремляются резко вниз в левой части графика и резко вверх в правой

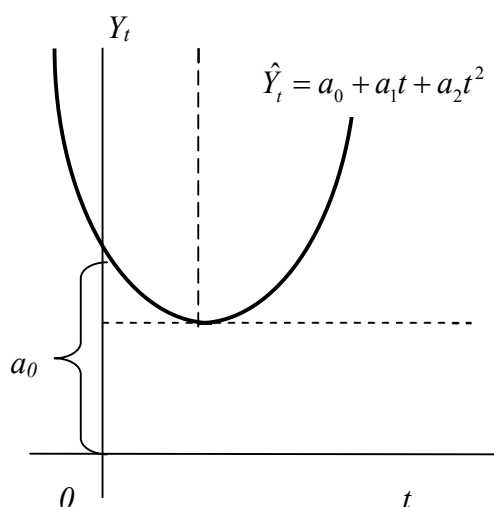


Рис. 2.2.2. Квадратичный тренд, $a_2 > 0$

коэффициентов тренда.

Именно это и определило то, что такие модели очень редко встречаются в прогнозировании вообще, а в прогнозировании социально-экономической динамики тем более.

Значительно чаще используется в практике прогнозирования *степенная функция* как модель тренда. Она имеет вид:

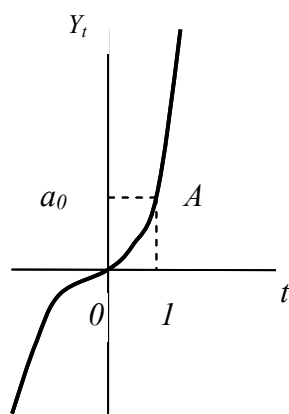
$$\hat{Y}_t = a_0 t^{a_1}. \quad (2.2.5)$$

Графиком этой функции является парабола порядка a_1 , которая проходит через точки $O(0,0)$ и $A(1,a_0)$, и касается оси Ox в начале координат. Если показатель степени целое положительное число, то при его чётном значении график функции симметричен относительно оси Oy и в начале координат имеет минимум при $a_0 > 0$ и максимум при $a_0 < 0$.

Поскольку параметры тренда в виде степенной функции оцениваются по статистическим данным, вероятность того, что показатель степени будет числом целым да ещё чётным, практически равна нулю.

Маловероятно, что показатель степени будет целым нечётным числом. К тому же, в подавляющем большинстве случаев тренды социально-экономических показателей располагаются в первом квадранте. Поэтому на

Случай I, когда $a_1 > 1$



Случай II, когда $0 < a_1 < 1$

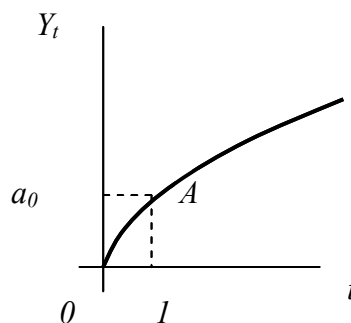


Рис. 2.2.4. Тренд в виде степенной функции

практике можно встретиться с двумя случаями (рис. 2.2.4).

Первый случай соответствует ситуации, когда показатель степени больше единицы. Тогда это возрастающая функция, причем, чем больше показатель степени, тем более резко возрастает функция (случай I рисунка 2.2.4.). Впрочем, в реальных социально-экономических процессах такой резкий рост показателей встречается довольно редко. А если он и встречается, то такая тенденция длится не очень долго. Чаще всего приходится иметь дело с более пологим характером степенной функции, и вполне может быть так, что применение МНК приведёт к тому, что показатель степени будет лежать в пределах $0 < a_1 < 1$. Тогда функция будет возрастать не так быстро и её характер

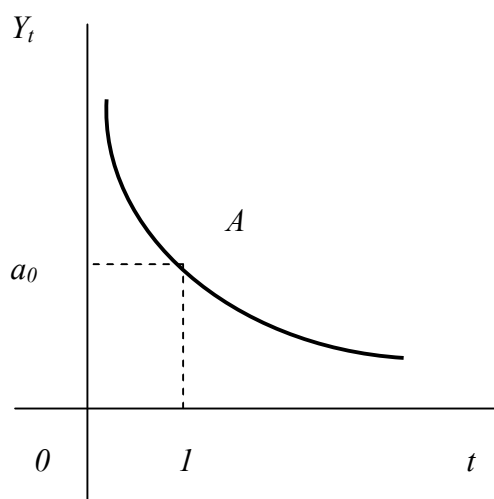


Рис. 2.2.5. Тренд в виде степенной функции при $a_1 < 0$

отрицателен, $a_1 < 0$. Тогда степенная функция (2.2.5) имеет график равнобочной гиперболы, ветви которой симметричны относительно начала координат. Но поскольку тренды рассматривают применительно к первому квадранту, то в практике прогнозирования используется только одна ветвь гиперболы (рис. 2.2.5).

Очевидно, что при малых значениях времени t моделируемый показатель устремлён в бесконечность, но поскольку мы рассматриваем в прогнозировании чаще всего дискретное время с шагом, равным единице, то участком модели при $0 < t < 1$ можно пренебречь и рассматривать динамику показателя, например в промежутке от $t=1$ до $t=T$.

К числу элементарных функций, которые используют в социально-экономическом прогнозировании, относится модель *показательной функции*. В общем виде эта модель может быть представлена так:

$$Y_t = a_0 k^{at}. \quad (2.2.6)$$

Здесь k – основание показательной функции, $k > 0$. Основанием показательной функции может быть любое число. Как легко убедиться из уравнения показательной функции, при любом её основании функция будет проходить через точку $(0; a_0)$ и асимптотически приближаться к оси Ox . Если основание показательной функции лежит в пределах $0 < k < 1$, то с ростом t функция убывает и стремится к оси Ox . Если же основание показательной функции больше единицы, то функция возрастает с ростом t . Основание показательной функции, равное единице исключается, потому что это означает постоянство результата, то есть – отсутствие функции как таковой.

Если коэффициент пропорциональности $a_0 > 0$, то значения функции всегда положительны, а отрицательные значения этого коэффициента обычно не рассматривают.

можно определить как пологий (случай II рисунка 2.2.4.). Подобные ситуации встречаются довольно часто. В качестве примера можно привести известную производственную функцию Кобба-Дугласа, которая представляет собой, правда не тренд, а многофакторную зависимость, но зависимость эта как раз степенная, а показатели степени у каждого фактора такой модели по определению лежат именно в пределах от нуля до единицы.

Интересен случай степенной функции, когда показатель степени

Важный частный случай показательной функции – экспоненциальная функция, когда её основанием служит число $e \approx 2,72$. Для этого случая модель записывается так:

$$Y_t = a_0 e^{a_1 t}. \quad (2.2.7)$$

График экспоненциальной функции (экспоненты) приведён на рисунке 2.2.6. Если показатель степени этой функции $a_1 < 0$, то функция убывающая; если $a_1 > 0$, то функция возрастает. Значительно реже, чем основание по числу $e \approx 2,72$ применяют *показательную функцию с десятичным основанием*:

$$Y_t = a_0 10^{a_1 t}. \quad (2.2.8)$$

Её графическое изображение подобно экспоненте, только в случае, когда $a_1 t = 1$, функция пройдёт через значение $Y = 10$, а не через $Y = e$ как в случае с экспонентой.

Иногда в социально-экономическом прогнозировании циклических процессов используют элементарные тригонометрические функции – синусоиды и косинусоиды, обычно в сочетании с другими элементарными функциями. Функции, описывающие окружности и эллипсы и другие функции более сложных форм в виде трендов, как правило, не используются.

Объясняется это тем, что тренд представляет собой довольно устойчивую траекторию развития процесса, для которой не характерны резкие изменения

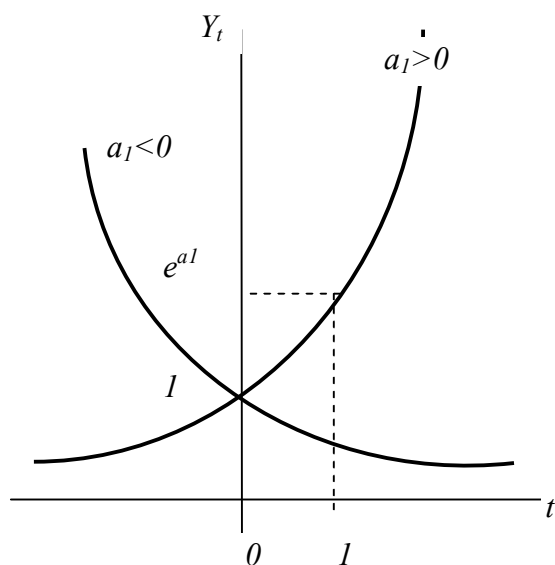


Рис.2.2.6. График экспоненты при $a_0=1$ и различных значениях a_1

характеристик. Даже динамические ряды стоимости ценных бумаг на фондовых рынках, которые имеют сложные графические изображения, стараются при прогнозировании «сгладить» для того, чтобы определить общую тенденцию. Эта тенденция получается в виде некоторой гладкой функции, чьи коэффициенты и необходимо найти для того, чтобы спрогнозировать уровень изучаемого показателя.

Любой экономист скажет, что ни один социально-экономический объект не имеет в динамике тенденцию, точно

совпадающую с той или иной функцией – всегда будут отклонения от этой функции. Если отклонения носят случайный характер, то подобранная функция может выступать моделью тренда - некоторой динамики, освобождённой от влияния случайных факторов. Если отклонения являются систематическими, значит, необходимо подобрать другую модель.

Зная графики этих элементарных функций, прогнозист может, изучив график прогнозируемого процесса, оценить, какая функция лучше всего

описывает процесс, и принять её в качестве основной. При этом конечно, ни в коем случае нельзя утверждать о том, что сам моделируемый процесс подчиняется выбранному характеру функции. Можно лишь утверждать, что на рассматриваемом временном промежутке социально-экономический процесс лучше всего может быть описан этой моделью, поскольку другие элементарные модели имеют другой характер. В силу инерционности большей части социально-экономических процессов можно предполагать, что сложившиеся в рассматриваемый промежуток времени закономерности, проявляющиеся в характере динамики, и некоторое время дальше будут вести себя также. И выбранная модель некоторое время будет соответствовать этой динамике.

Но не всегда выбор модели прогнозисты доверяют визуальному анализу. Всё более и более доступными становятся вычислительные методы с развитием соответствующей техники. Поэтому очень часто прогнозист априорно задаёт некоторый набор элементарных или несколько более сложных моделей, а затем запускает процесс нахождения коэффициентов каждой из модели, чаще всего, с помощью МНК. Затем, вычислив дисперсию ошибок аппроксимации каждой модели, он выбирает ту из них, у которой эта дисперсия минимальна, поскольку минимальная дисперсия свидетельствует о том, что модель лучше всего описала имеющийся исходный ряд значений. При этом надо иметь в виду, что не всегда самая точная в аппроксимации модель действительно лучше всего описала ряд значений. Например, известно, что по двум точкам можно найти коэффициенты линейной модели, так, что модель пройдёт через все две точки и дисперсия ошибки аппроксимации будет равна нулю. По трём точкам можно точно также построить квадратичную функцию и дисперсия ошибки аппроксимации также будет равна нулю. По N точкам можно построить полином $(N-1)$ -й степени. Дисперсия ошибки его будет равна нулю. Но разве эта модель лучше всего описала происходящие процессы? Конечно – нет!

В любом случае окончательный выбор вида модели должен оставаться за прогнозистом – его опыт и интуиция плюс формальные методы – вот формула выбора приемлемой модели прогнозирования.