

2.3. Метод стохастической аппроксимации для адаптации эконометрических моделей

В технической кибернетике часто приходится решать задачи такого типа. Объект управления представляет собой сложную систему, структура и взаимосвязи между элементами которой исследователю неизвестны. Поэтому объект представляется в виде «чёрного ящика» (рис.7).



Рис. 7. Объект исследования как «чёрный ящик»

Перед исследователем стоит задача найти такое управляющее воздействие x на систему из допустимого множества X , чтобы на выходе из нее было достигнуто некое оптимальное значение Y , численно равное наперед заданному U . Как найти это управляющее воздействие? Можно использовать метод простого перебора. Но при этом нет никакой гарантии, что решение будет найдено – простой перебор может привести к случайному нахождению этого решения, а может и не привести к этому. Поэтому надо использовать процедуры целенаправленного перебора. Но поскольку зависимость между входной переменной и выходной в явном виде не известна, не каждая процедура целенаправленного перебора может использоваться для решения этой задачи. Поскольку чаще всего стоит задача скорейшего поиска оптимального управляющего воздействия на объект, например, для корректировки полёта ракеты, то надёжность алгоритма и скорость поиска этого наилучшего управленческого решения являются преобладающими.

Одним из лучших методов, приспособленных для этого, является метод стохастической аппроксимации, суть которого впервые была опубликована в 1951 г. Г.Роббинсом и С.Монро¹. Этот метод и стал формальным основанием для целого ряда задач адаптации в технической кибернетике. Области применения и разновидности решения различных задач технической кибернетики с помощью метода стохастической аппроксимации разнообразны. В отечественной науке наиболее полно методы решения таких задач адаптации и управления представлены в работах Я.З. Цыпкина².

Суть метода стохастической аппроксимации заключается в следующем.

¹ Robbins H., Monro S. A stochastic approximation method. //Annual mathematics statistics, 1951, v.22. -pp. 400-407

² См. например: Цыпкин Я.З. Адаптация и обучение в автоматических системах. – М.: Наука, 1968 – 400 с.

В допустимой области X выбираем произвольное значение $x[0]$, проводим эксперимент с данным значением входа в систему и наблюдаем на выходе некоторое значение $Y(x[0])$. Таким образом, перед исследователем есть первая пара взаимосвязи между входной переменной и выходной. Если бы объект был стационарен, можно было бы с помощью конечного множества наблюдений собрать достаточное множество пар значений $\{x[n], Y(x[n])\}$ такое, чтобы построить регрессионную зависимость между переменными. Тогда, зная коэффициенты регрессионной зависимости, можно легко решить поставленную задачу – найти такое значение входного управляющего воздействия x , при котором на выходе из объекта наблюдается заданное U . Но объект не стационарен и его динамика необратима, он меняет во времени не только свои количественные характеристики, но и собственную структуру, состав элементов и взаимосвязь между ними, поэтому такой статистический подход не приведёт к нужному результату. Кроме того, если система отклоняется от некоторой траектории развития, необходимо срочно откорректировать её поведение для того, чтобы вернуть её на прежний путь, или близкий к нему. Поэтому возможности собирать статистические данные и их анализировать на предмет выявления вида и степени взаимосвязи нет возможности.

В методе стохастической аппроксимации выделяют две разновидности:

- процедура Роббинса-Монро,
- процедура Кифера-Вольфовица (в приращениях)³.

Применительно к задачам адаптации прогнозных моделей используется процедура Роббинса-Монро. В соответствии с её положениями, для поиска оптимального управляющего значения x^* выбираем убывающую с ростом n (числа испытаний) последовательность положительных чисел $\gamma[n]$. Необходимо за конечное число шагов испытаний определить такое значение x^* , принадлежащее множеству X , чтобы:

$$Y(x^*) = U. \quad (2.3.1)$$

Для выбора значения x в следующем эксперименте используется рекуррентное соотношение Роббинса-Монро:

$$x[n] = x[n-1] + \gamma[n](U - Y(x[n-1])). \quad (2.3.2)$$

Разность в скобках иногда называют «функцией невязки».

Здесь положительное число $\gamma[n]$ получило название «параметр демпфирования колебаний». Именно способ задания параметров демпфирования колебаний определяет характеристики алгоритма метода стохастической аппроксимации, в первую очередь – скорость сходимости его к оптимальному значению. Теоретическим исследованиям процессов

³ Хасьминский Р.З. Стохастическая аппроксимация // Математическая энциклопедия, т. 5. – М.: «Советская энциклопедия», 1984. - С. 235-236.

адаптации на основе алгоритма Роббинса-Монро посвящено значительное число работ специалистов в области математики и технической кибернетики. Доказано⁴, что если

$$\sum \gamma[n] = \infty, \sum \gamma^2[n] < \infty, \quad (2.3.3)$$

то x стремится к x^* .

В зависимости от способа задания параметров демпфирования колебаний различают три различных алгоритма:

1) алгоритм адаптации с *постоянным* шагом:

$$\gamma[n] = \gamma < 1. \quad (2.3.4)$$

Например: $\gamma[n] = 1/2$

2) алгоритм адаптации с *переменным* шагом, когда параметры демпфирования колебаний изменяются в зависимости от числа испытаний n :

$$\gamma[n] = f(n). \quad (2.3.5)$$

Например: $\gamma[n] = 1/n+1$;

1) алгоритм адаптации с *нелинейным* шагом, когда параметры демпфирования колебаний определяются таким образом, чтобы в зависимости от конкретных величин $Y[n]$ и $x[n]$ при данном испытании наискорейшим путем приблизиться к оптимуму (2.3.1):

2)

$$\gamma[n] = F(Y, x, n). \quad (2.3.6)$$

Например, алгоритм Качмажа для линейной многофакторной модели:

$$\gamma[n] = \frac{Y[n] - \sum_i a_i x_i[n]}{\sum_i x_i^2[n]}$$

где i - число входных переменных объекта.

Первыми были использованы и исследованы на практике алгоритмы адаптации с переменным шагом. Здесь можно предложить самые различные способы задания параметра демпфирования колебаний, например:

$$\gamma[n] = 1/n \text{ или } \gamma[n] = 1/n^2 \text{ и т.п.}$$

⁴ Вазан М. Стохастическая аппроксимация. – М.: Наука, 1972. - 295 с.

В качестве преимущества такого подхода следует указать на его простоту и формализм – параметр меняется только в зависимости от шага аппроксимации, но не от его итогов.

Пусть перед нами стоит задача – найти корень:

$$x = \sqrt[3]{9}.$$

Задаём функцию невязки:

$$F = 9 - x^3[n].$$

Будем считать, что нас устраивает такое значение корня, когда функция невязки по своему абсолютному значению не превышает $\eta=0,1$. Выберем такой способ задания параметра γ :

$$\gamma = \frac{1}{1+n}$$

Пусть на первом шаге исследователь задаёт $x[0]=2$. Тогда в соответствии с алгоритмом Роббинса-Монро следующее значение $x[n]$ определится так:

$$x[1] = x[0] + \frac{1}{2}(9 - x^3[0]) = 2 + \frac{1}{2}(9 - 8) = 2,5.$$

Возводим $x[1]=2,5$ в третью степень и вычисляем модуль невязки: $|9 - 15,625|=6,625$. Она больше заданной $\eta=0,1$, поэтому продолжаем вычисления. Следующее значение входной переменной вновь вычислим, используя метод Роббинса-Монро:

$$x[2] = 2,5 + \frac{1}{3}(9 - 15,625) = 0,292$$

Возводим $x[2]=0,292$ в третью степень и вновь считаем невязку: $|9 - 0,025|=8,975$, которая больше допустимой, поэтому вычисляем новое значение корня:

$$x[3] = 0,292 + \frac{1}{4}(9 - 0,025) = 2,536$$

Возводим новое значение искомой переменной в третью степень и считаем невязку: $|9 - 16,305|$. Она оказалась больше допустимой, поэтому вычисляем новое значение корня на четвёртом и последующих шагах до тех пор, пока невязка не станет меньше допустимой величины:

$$x[4] = 2,536 + \frac{1}{5}(9 - 16,305) = 1,075$$

. Невязка $|9 - 1,242| > \eta$.

$$x[5] = 1,075 + \frac{1}{6}(9 - 1,242) = 2,368$$

. Невязка $|9 - 13,277| > \eta$.

$$x[6] = 2,368 + \frac{1}{7}(9 - 13,277) = 1,757$$

. Невязка: $|9 - 5,424| > \eta$.

$$x[7] = 1,757 + \frac{1}{8}(9 - 5,424) = 2,204$$

. Невязка: $|9 - 10,71| > \eta$.

$$x[8] = 2,204 + \frac{1}{9}(9 - 10,71) = 2,014$$

. Невязка: $|9 - 8,174| > \eta$.

$$x[9] = 2,014 + \frac{1}{10}(9 - 8,174) = 2,096$$

. Невязка на этом шаге: $|9 - 9,208| > \eta = 0,1$

$$x[10] = 2,096 + \frac{1}{11}(9 - 9,208) = 2,076$$

. Невязка: $|9 - 8,95| < \eta = 0,1$, что нас вполне устраивает.

Итак, окончательное решение задачи поставленной задачи: $x^* = 2,076$.

В том, что параметр демпфирования колебаний не зависит от величины невязки и вообще определяется только шагом аппроксимации, видится недостаток алгоритма с переменным шагом - моделируемые процессы могут быть самыми различными по сложности, отличаясь друг от друга; первое приближение $x[0]$ в одном случае может быть достаточно далёким от оптимума, а в другом – близким к нему, а алгоритм этих особенностей не учитывает.

Поэтому алгоритмы аппроксимации с нелинейным шагом являются более предпочтительными, поскольку их задают так, чтобы параметр демпфирования колебаний учитывал величину невязки. В каждом конкретном случае исследователю приходится подбирать свой вид функции, которая описывает процесс изменения параметра демпфирования колебаний.

Если, например, между входной переменной и выходной есть линейная связь:

$$Y = ax,$$

то параметр a является неизвестным и его можно найти с помощью такого способа задания параметра демпфирования колебаний:

$$\gamma[n] = \frac{Y[n] - ax[n]}{x^2[n]}.$$

Легко убедиться, что размерность параметра демпфирования колебаний такова, что его умножение на невязку (числитель дроби), даст размерность коэффициентов. Алгоритмы с нелинейным шагом имеют большую скорость сходимости, чем алгоритмы с переменным шагом, но они и значительно более сложны.

Алгоритмы адаптации с постоянным шагом не нашли широкого применения в задачах технической кибернетики, хотя известно, что скорость сходимости к оптимуму в этих случаях может быть наибольшей.

Успех применения адаптивного алгоритма идентификации моделей технической кибернетики с помощью методов Роббинса-Монро дал основания надеяться на успех его применения и в экономической практике. Огромным преимуществом здесь по сравнению с другими методами адаптации прогнозных моделей является отсутствие каких-либо априорных предположений о характере процесса. Есть просто некоторый, явно заданный оптимум, который необходимо достичь. Поэтому в конце XX века многие специалисты в области экономико-математического моделирования пытались использовать этот метод применительно к задачам социально-экономического прогнозирования. Из множества этих попыток следует отметить работы Е.М.Левицкого⁵, заложившего основы адаптации эконометрических моделей для целей прогнозирования. Впрочем, желание совместить несовместимое – метод стохастической аппроксимации (наилучшим образом подходящий для моделирования для необратимых процессов) и выборочный метод (наилучшим образом подходящий для обратимых процессов), сделали методы Е.М.Левицкого непригодными для широкого применения в практике социально-экономического прогнозирования. Его стремление втиснуть аппарат стохастической аппроксимации в "прокрустово ложе" классической эконометрии, в результате чего вычисления "обрастают" такими многочисленными ограничениями, дополнительными уравнениями и переменными, привело к таким громоздким процедурам и необходимости введения дополнительных ограничений, что теряется вообще какой-либо смысл их практического использования, не говоря уже о том, что они становятся методологически бессмысленными.

Воспользуемся самим принципом Е.М.Левицкого, в соответствии с которым основой для адаптации являются некоторые статистические оценки модели, например, оценки МНК. А алгоритм Роббинса-Монро используется для корректировки коэффициентов этой модели в том случае, когда модель начинает плохо аппроксимировать фактические данные и её требуется адаптировать.

⁵ Левицкий Е.М. Адаптация в моделировании экономических систем - Акад. наук СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т экономики и орг. пром. пр-ва. - Новосибирск : Наука. Сиб. отд-ние, 1977. - 208 с.; Левицкий Е.М. Адаптивные эконометрические модели. – Новосибирск: Наука, 1981. – 223 с.

Для того чтобы эффективно использовать алгоритм адаптации Роббинса-Монро в прогнозной практике, необходимо четко выяснить:

- что является целью адаптации;
- что является предметом адаптации;
- каковы ожидаемые результаты адаптации?

В конечном итоге под адаптацией понимается такое изменение коэффициентов эконометрической модели, чтобы расчетное значение показателя Y_t наилучшим образом приближалось к некоторому оптимальному значению U_t . С учетом того, что адаптация эконометрических моделей - не самоцель, а попытка описать изменившееся качественное состояние системы в результате эволюционного развития, становится ясно, что это оптимальное значение U_t представляет собой фактическое наблюдение. Подверженное влиянию различных факторов.

Поэтому *целью адаптации методом стохастической аппроксимации является корректировка модели для лучшего описания с её помощью эволюционирующего процесса.*

Поскольку социально-экономическая динамика многообразна, её каждый тип описывается с помощью соответствующей модели. Модель должна следовать за объектом, который она описывает, меняться, адаптируясь к изменениям в тенденциях. Делать это можно, либо меняя модель, либо корректируя коэффициенты модели. Для того, чтобы поменять модель, необходимо провести тщательное обоснование этого: вывести форму зависимости из множества возможных, определить значения коэффициентов этой модели одним из методов и определить перспективы использования модели в прогнозировании. Всё это довольно сложно, во-первых, а во-вторых, вносит элементы субъективизма. Поэтому, оставляя неизменным вид модели, будем изменять её так, что *предметом адаптации выступают коэффициенты эконометрической модели.*

Для того, задать ожидаемые результаты адаптации, необходимо вспомнить, что для эволюционных процессов его показатели Y_t формируются под воздействием трех составляющих:

- детерминированной \tilde{Y}_t ;
- случайной ε_t ;
- неопределенной μ_t .

Этот процесс формирования итогового показателя можно, с учётом введённых обозначений, представить так:

$$Y_t = \tilde{Y}_t + \varepsilon_t + \mu_t. \quad (2.3.7)$$

Однако при построении модели выделить все три составляющие невозможно, поэтому реальный процесс приходится описывать с помощью двух слагаемых - собственно модели (регулярная составляющая) и некоторой ошибки аппроксимации, которая характеризует и воздействие случайных процессов, и воздействие неизвестных факторов и процессов:

$$Y_t = \hat{Y}_t + \varepsilon_t. \quad (2.3.8)$$

Регулярная составляющая построена не только с учетом детерминированных факторов, но и с учётом факторов, неизвестных исследователю, которые мы ранее назвали «неопределёнными». Поэтому, даже после выявления степени и силы взаимодействия факторов при построении модели, нет никаких гарантий того, что конкретные численные значения определенных коэффициентов модели отражают только влияние детерминированных факторов. Поэтому, если модель хорошо описывает развитие системы в среднем, в той или иной степени отражая происходящие в действительности процессы, то в результате эволюционного изменения самой системы модель начинает хуже описывать реальные процессы. Для улучшения ее свойств и возникает необходимость адаптации эконометрической модели, ее приспособления к этим наметившимся изменениям в тенденциях динамики, суть и причина которых прогнозисту ещё не ясна.

Точность описания фактических значений с помощью модели отражает ошибка аппроксимации ε_t . Очевидно, нет никакой необходимости требовать сведения этой ошибки к нулю, наоборот, эта ошибка не должна превышать некоторого допустимого значения η . Причем этим допустимым значением может быть и среднее абсолютное отклонение, и СКО, и границы, определенные с помощью t -статистики Стьюдента, и другие критерии, применяемые в зависимости от апостериорно выявленного характера исследуемого процесса. Таким образом, адаптацию эконометрической модели следует производить только в случае, когда абсолютное значение текущего отклонения расчетных значений от фактических превышает некоторое наперед заданное допустимое значение:

$$|\varepsilon_t| > \eta. \quad (2.3.9)$$

В этом случае адаптация производится с целью изменения коэффициентов модели так, чтобы расчетные значения вновь удовлетворительно описывали реальный ряд значений.

Следовательно, *ожидаемые результаты адаптации – корректировка коэффициентов модели таким образом, чтобы модель вновь описывала исходные значения в заданных границах, обусловленных действием случайных факторов.*

Итак, предметом адаптации являются коэффициенты эконометрических моделей, которые в случае их корректировки с помощью метода Роббинса-Монро должны приблизиться к некоторому оптимальному своему значению для новых изменившихся условий функционирования системы. Как определить это оптимальное значение коэффициентов - ведь они зависят и от вида модели, и от конкретных значений и факторов, и показателя?

Рассмотрим вначале однофакторную эконометрическую модель вида:

$$\hat{Y}_t = f(x_t, \hat{a}_t), \quad (2.3.10)$$

где - \hat{a}_i коэффициенты модели, найденные с помощью МНК, $i=0,1,2, \dots, m-1$;

m - число коэффициентов модели;

x_t - фактор, влияющий на экономический показатель Y_t .

Критерий адаптации и сам алгоритм адаптации можно представить следующим образом. Выразим из (2.3.10) каждый коэффициент модели через значения \hat{Y}_t, x_t и оставшиеся коэффициенты:

$$\hat{a}_i = F(\hat{Y}_t, x_t, \hat{a}_0, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{m-1}). \quad (2.3.11)$$

Если теперь для некоторого момента наблюдения t в полученное выражение (2.3.11) подставить вместо расчетного значения показателя \hat{Y}_t его фактическое значение Y_t , то будет получен такой коэффициент a_{it} , отличный от расчетного \hat{a}_i , который, при подстановке его в модель, позволяет модели в точности описывать фактическое наблюдение.

$$a_{it} = F(Y_t, x_t, \hat{a}_0, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{m-1}). \quad (2.3.12)$$

В общем случае значения полученных таким образом коэффициентов модели a_{it} будут отличаться от рассчитанных ранее значений \hat{a}_i . Назовем для определенности, полученные с помощью (2.3.12), коэффициенты *фактическими*. Чем хуже модель описывает реальное значение показателя, тем сильнее отличаются друг от друга расчётные и фактические значения коэффициентов модели. Поэтому необходимо в том случае, когда модель начинает плохо описывать реальный процесс, откорректировать коэффициенты модели так, чтобы их расчётные значения (2.3.11) приближались к фактическим (2.3.12). Поскольку в процессе адаптации расчётные значения коэффициентов меняют со временем свои значения, следует ввести в их обозначения индекс t , то есть, будем их обозначать \hat{a}_{it} .

Адаптация модели в момент времени t осуществляется при выполнении условия (2.3.9) по следующей модификации формулы Роббинса-Монро⁶:

$$\hat{a}_{it}[n] = \hat{a}_{it}[n-1] + \gamma[n](a_{it} - \hat{a}_{it}[n-1]) \quad (2.3.13)$$

Здесь $\hat{a}_{it}[0] = \hat{a}_{it-1}[N]$, где N – последний шаг адаптации коэффициента на предыдущем наблюдении.

⁶ Светуных С.Г. Адаптивные методы в процессе оптимизации режимов электропотребления // Нормирование и учет в системе энергосбережения // Межвузовский сборник, Ленинград: ЛИЭИ, 1985 г.

Для адаптации прогнозных моделей можно использовать любой из алгоритмов (2.3.3) – (2.3.5). Проведенные исследования показали, что наилучшими в случае аддитивных моделей будут являться алгоритмы адаптации с постоянным шагом⁷, если параметр демпфирования колебаний будет рассчитываться по формуле:

$$\gamma_{it} = k_i \left| \frac{|\varepsilon_t| - \eta}{\varepsilon_t} \right|, \quad (2.3.14)$$

где весовой коэффициент k_i характеризует степень адаптации данного коэффициента по сравнению с остальными коэффициентами, причем сумма этих весовых коэффициентов должна быть равна единице:

$$\sum_i k_i = 1$$

В общем случае нет оснований считать, что адаптация одних коэффициентов должна осуществляться в более значительной степени, чем других, поэтому можно принять указанный весовой коэффициент k_i одинаковым для всех коэффициентов, и тогда параметр демпфирования колебаний для каждого из m коэффициентов рассчитывается достаточно просто:

$$\gamma_{it} = \gamma_t = \frac{1}{m} \left| \frac{|\varepsilon_t| - \eta}{\varepsilon_t} \right|. \quad (2.3.15)$$

Исследования показали, что рассчитываемое с помощью формулы (2.3.13) или (2.3.14) значение параметров демпфирования колебаний действительно является оптимальным, так как адаптация при этом не имеет многоитеративный характер, а осуществляется за один шаг.

Покажем алгоритм адаптации для случая однофакторной линейной модели.

Как и следует из логики процесса адаптации прогнозных моделей, адаптация коэффициентов модели происходит в том случае, когда на некотором наблюдении t реальные значения, вычисленные по предыдущим расчётным значениям коэффициентов \hat{a}_{0t-1} и \hat{a}_{1t-1} , выходят за допустимые границы:

$$|\varepsilon_t| > \eta,$$

$$\text{где } \varepsilon_t = Y_t - (\hat{a}_{0t-1} + \hat{a}_{1t-1}x_t).$$

⁷ Светуных С.Г. Параметры демпфирования колебаний при адаптивном подходе к задаче идентификации динамических систем // Моделирование и разработка технических средств для АСУ ТП. - Ташкент: ТашПИ, 1987 г.

Вычисляем для этого наблюдения в соответствии с (2.3.15) параметр демпфирования колебаний:

$$\gamma_t = \frac{1}{2} \left| \frac{|\varepsilon_t| - \eta}{\varepsilon_t} \right|$$

Выразим, в соответствии с вышеизложенным, каждый коэффициент линейной однофакторной модели через Y_t , x_t и другой коэффициент. Для коэффициента a_0 линейной однофакторной модели в момент времени t имеем:

$$a_{0t} = Y_t - \hat{a}_{1t} x_t. \quad (2.3.16)$$

Для коэффициента a_1 :

$$a_{1t} = \frac{Y_t - \hat{a}_{0t}}{x_t}. \quad (2.3.17)$$

Подставим в (2.3.13) полученные в (2.3.16) и (2.3.17) значения коэффициентов:

$$\hat{a}_{0t}[n] = \hat{a}_{0t}[n-1] + \gamma_t (Y_t - \hat{a}_{1t-1} x_t - \hat{a}_{0t}[n-1]), \quad (2.3.18)$$

$$\hat{a}_{1t}[n] = \hat{a}_{1t}[n-1] + \gamma_t \left(\frac{Y_t - \hat{a}_{0t-1}}{x_t} - \hat{a}_{1t}[n-1] \right). \quad (2.3.19)$$

В этом случае, используя коэффициенты \hat{a}_{0t-1} и \hat{a}_{1t-1} как значения коэффициентов на начальном шаге адаптации $\hat{a}_{0t}[0] = \hat{a}_{0t-1}$ и $\hat{a}_{1t}[0] = \hat{a}_{1t-1}$, получим:

$$\hat{a}_{0t}[n] = \hat{a}_{0t}[n-1] + \gamma_t (Y_t - \hat{a}_{1t-1} x_t - \hat{a}_{0t-1}),$$

$$\hat{a}_{1t}[n] = \hat{a}_{1t}[n-1] + \gamma_t \frac{(Y_t - \hat{a}_{0t-1} - \hat{a}_{1t-1} x_t)}{x_t}.$$

С учетом того, что выражения в скобках есть не что иное, как текущая ошибка аппроксимации ε_t , и поскольку адаптация осуществляется за один шаг, получим очень простую запись для вычисления адаптированных коэффициентов:

$$\hat{a}_{0t} = \hat{a}_{0t-1} + \gamma_t \varepsilon_t, \quad (2.3.20)$$

$$\hat{a}_{1t} = \hat{a}_{1t-1} + \gamma_t \frac{\varepsilon_t}{x_t}, \quad (2.3.21)$$

Из полученных формул (2.3.20), (2.3.21) ясен смысл алгоритма адаптации с помощью метода стохастической аппроксимации - с его помощью модель как бы "подтягивается" к фактическим значениям на расстояние, равное η .

Для большей наглядности на рис. 8 приведёна схема алгоритма адаптации модели. Вначале тем или иным способом (например, с помощью МНК) оцениваются коэффициенты модели на всём имеющемся множестве наблюдений. Выбор модели определяется свойствами объекта прогнозирования и характером статистической взаимосвязи между прогнозируемым показателем и факторами. Модель в среднем должна неплохо описывать исходные данные, но если в тенденциях развития прогнозируемого процесса наблюдаются некоторые систематические отклонения, вызванные адаптацией объекта прогнозирования к неизвестным пока новым факторам и условиям, модель также должна адаптироваться к этим изменениям в тенденциях и повторять траекторию движения во времени прогнозируемого показателя.

Для этого прогнозист задаёт величину доверительной границы модели η , в рамках которой отклонения модели от фактических значений объясняется действием случайных величин, а выход за эти рамки служит основанием для адаптации.

В начале алгоритма задаются исходные условия – оценки коэффициентов и η . На первом же наблюдении $t=1$ проверяется выполнение условия (2.3.9). Если условие не выполняется, то есть, модель хорошо описывает исходные данные, следует переходить к следующему наблюдению.

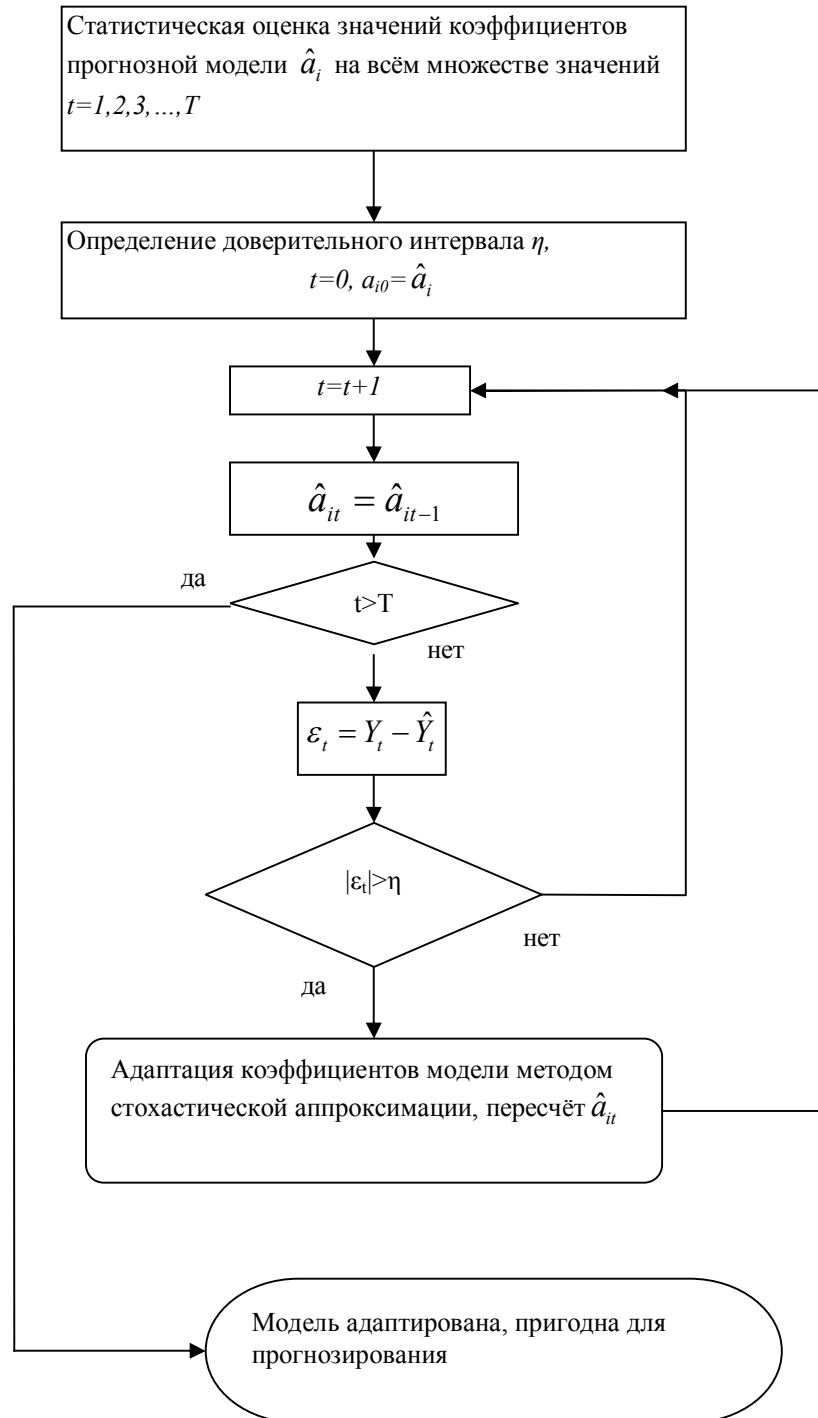


Рис. 8. Алгоритмическая схема адаптации прогнозной модели

Но если это условие выполняется, что означает выход модели за доверительные границы, необходимо адаптировать модель, корректируя её коэффициенты указанным выше способом. Эти адаптированные коэффициенты подставляются в модель, и для следующего наблюдения $t=t+1$ и вновь проверяется выполнение условия (2.3.8). Этот процесс продолжается на всей базе данных до последнего наблюдения $t=T$.

Последние адаптированные коэффициенты модели и дают прогнозисту ту модель, которая адаптировалась к изменениям в тенденциях, если они были. Если же изменений в тенденциях не было, то коэффициенты модели не пересчитывались, и модель не изменила своего вида.

Пример.

По данным таблицы 2.1 на первых десяти наблюдениях с помощью МНК была построена следующая модель:

$$\hat{Y}_t = 8,027x_t - 10,45,$$

где Y_t - электропотребление промышленностью, млрд. кВт. час,

x_t - численность занятых в промышленности, млн. человек.

Средняя абсолютная ошибка аппроксимации равна 0,28. Эти исходные значения дают возможность для проведения адаптации модели с помощью модификации метода стохастической аппроксимации.

Процесс адаптации данной модели заключается в изменении коэффициентов модели в том случае, когда текущее отклонение модели от фактических данных будет превышать среднее абсолютное отклонение, равное $\eta=0,28$. Последовательность изменений коэффициентов модели в процессе её адаптации сведена в табл. 2.3. В том случае, когда ошибка аппроксимации не превышала указанный предел, параметры модели оставались неизменными (второе, шестое, седьмое и восьмое наблюдения).

Таблица 2.3.

Адаптация линейной однофакторной модели во времени

Год	Текущее отклонение, ε_t	Коэффициенты модели	
1	0,347	-10,42	8,045
2	0,245	-10,42	8,045
3	-0,514	-10,81	7,872
4	0,590	-10,65	7,939
5	0,311	-10,63	7,948
6	0,224	-10,63	7,948
7	0,057	-10,63	7,948
8	0,192	-10,63	7,948
9	0,548	-10,49	7,995
10	0,709	-10,27	8,068

Теперь сравним полученный результат с исходной моделью. Модель с оценками МНК имеет вид:

$$\hat{Y}_t = 8,027x_t - 10,45 \quad (2.3.22)$$

Адаптированная методом стохастической аппроксимации модель имеет другой вид:

$$\hat{Y}_t = 8,068x_t - 10,27 . \quad (2.3.23)$$

Как видно коэффициент пропорциональности увеличился, также как увеличился и свободный член. Это свидетельствует о том, что адаптированная модель отразила тенденцию усиления влияния фактора x_t на результат Y_t .

Теперь сравним прогнозные свойства моделей – адаптированной и неадаптированной. Результаты ретропрогноза приведены в табл. 2.4.

Табл. 2.4

Сравнительный анализ точности ретропрогноза неадаптированной и адаптированной моделей

Год наблюдения, t	Электропотребление промышленностью, млрд. кВт час, Y_t	Численность занятых в промышленности, млн. чел., x_t	Ошибка прогноза модели (2.3.22)	Ошибка прогноза модели (2.3.23)
11	14,95	3,056	0,87	0,56
12	16,12	3,153	1,26	0,95
13	17,10	3,252	1,45	1,13
14	17,49	3,334	1,18	0,86
15	17,90	3,415	0,94	0,62
16	18,48	3,469	1,08	0,76
17	19,22	3,551	1,17	0,84
18	19,91	3,644	1,11	0,78
19	21,10	3,721	1,68	1,35
20	22,10	3,819	1,89	1,56
21	23,40	3,950	2,14	1,80
22	24,30	4,090	1,92	1,57
23	25,05	4,170	2,03	1,68
Средняя ошибка ретропрогноза			1,44	1,11

Адаптированная модель, как и ожидалось, даёт более точные прогнозы, нежели модель неадаптированная.