2.4. Адаптация нелинейных и многофакторных моделей методом стохастической аппроксимации

Метод адаптации прогнозных эконометрических моделей с помощью алгоритма стохастической аппроксимации Роббинса-Монро можно использовать и для нелинейных моделей. Сами нелинейные модели, как известно, могут быть двух видов – линейные по параметрам и нелинейные по параметрам. Адаптация первого типа нелинейных по параметрам моделей осуществляется просто. Для этого следует линеаризовать модель и применить к ней алгоритм (2.3.20) – (2.3.21) с параметрами демпфирования колебаний, вычисляемых по формуле (2.3.15).

Пусть, например, необходимо адаптировать прогнозную модель в виде экспоненциального тренда, коэффициенты которой найдены с помощью какого-либо метода:

$$\hat{Y}_t = \hat{a}_0 e^{\hat{a}_1 t}. \tag{2.4.1}$$

Линеаризуем эту модель с помощью логарифмирования:

$$\ln \hat{Y}_t = \ln \hat{a}_0 + \hat{a}_1 t. \tag{2.4.2}$$

Применим к этой линеаризованной модели алгоритм Роббинса-Монро:

$$\ln \hat{a}_{0t}[n] = \ln \hat{a}_{0t}[n-1] + \gamma_t (\ln Y_t - \hat{a}_{1t-1} t - \ln \hat{a}_{0t}[n-1]), \tag{2.4.3}$$

$$\hat{a}_{1t}[n] = \hat{a}_{1t}[n-1] + \gamma_t \frac{(\ln Y_t - \ln \hat{a}_{0t-1} - \hat{a}_{1t-1} t)}{t}. \tag{2.4.4}$$

Как видно, никаких затруднений не возникает, и модели, линейные по параметрам, легко адаптируются с помощью алгоритма Роббинса-Монро.

Сложнее адаптировать нелинейные по параметрам модели, поскольку их невозможно привести к линейной форме. Покажем, как можно использовать метод стохастической аппроксимации применительно к моделям такого типа для целей адаптации прогнозных моделей.

Для определённости используем логистическую кривую:

$$\hat{Y}_t = \frac{\hat{a}_0}{1 + \hat{a}_1 e^{-\hat{a}_2 t}}. \tag{2.4.5}$$

Для того, чтобы осуществить адаптацию этой модели, следует, прежде всего, вывести из (2.4.5) каждый коэффициент модели, выраженный через переменные и остальные коэффициенты.

Для коэффициента a_0 это довольно просто:

$$\hat{a}_0 = \hat{Y}_t (1 + \hat{a}_1 e^{-\hat{a}_2 t}). \tag{2.4.6}$$

Немного сложнее сделать это для второго коэффициента a_1:

$$\hat{a}_1 = (\frac{\hat{a}_0}{\hat{Y}_t} - 1)e^{\hat{a}_2 t}. \qquad (2.4.7)$$

Без особых затруднений можно вывести теперь и третий коэффициент:

$$\hat{a}_2 = \frac{\ln \hat{a}_1 - \ln \frac{\hat{a}_0 - \hat{Y}_t}{\hat{Y}_t}}{t}. \qquad (2.4.8)$$

Подставляя теперь вместо расчётных значений показателя Y_t его фактические значения, получим коэффициенты, отражающие этот реальный уровень ряда:

$$a_0 = Y_t(1 + \hat{a}_1 e^{-\hat{a}_2 t}), \qquad (2.4.9)$$

$$a_1 = (\frac{\hat{a}_0}{Y_t} - 1)e^{\hat{a}_2 t}, \qquad (2.4.10)$$

$$a_2 = \frac{\ln \hat{a}_1 - \ln \frac{\hat{a}_0 - Y_t}{Y_t}}{t}. \qquad (2.4.11)$$

В соответствии с (2.3.13) применительно к каждому из коэффициентов алгоритм адаптации методом Роббинса-Монро будет записан так:

$$\hat{a}_{0t}[n] = \hat{a}_{0t}[n-1] + \gamma_0[n](a_{0t} - \hat{a}_{0t}[n-1]), \qquad (2.4.12)$$

$$\hat{a}_{1t}[n] = \hat{a}_{1t}[n-1] + \gamma_1[n](a_{1t} - \hat{a}_{1t}[n-1]), \qquad (2.4.13)$$

$$\hat{a}_{2t}[n] = \hat{a}_{2t}[n-1] + \gamma_0[n](a_{2t} - \hat{a}_{2t}[n-1]), \qquad (2.4.14)$$

где фактические значения коэффициентов определены ранее – (2.4.9), (2.4.10) и (2.4.11).

Для того, чтобы осуществить адаптацию логистической кривой к текущей информации, необходимо знать величины параметров демпфирования колебаний. К сожалению, получить простую формулу для вычисления этих величин так, как это было сделано для линейных моделей (2.3.15), для нелинейных по параметрам моделей не получится. Аналитические исследования показывают, что в оптимальном случае эти параметры должны быть различны для каждого коэффициента модели и не только определяются с помощью достаточно сложных вычислений[1], но и представляются весьма громоздкими, что не позволяет рекомендовать их для практического применения. Но для современного уровня вычислительной техники одноитеративную процедуру при точном вычислении оптимального значения параметров демпфирования колебаний легко заменить на многоитеративную. На практике можно взять значения этих трех параметров демпфирования колебаний в виде констант таких, чтобы их сумма была равна единице, они были бы не отрицательными и находились друг с другом в следующем соотношении:

$$\gamma_0 > \gamma_1 > \gamma_2 \text{, например, } \gamma_0 = \frac{3}{6}, \gamma_1 = \frac{2}{6}, \gamma_2 == \frac{1}{6}. \qquad (2.4.15)$$

Подставляя эти или аналогичные значения параметров демпфирования колебаний в разработанный алгоритм, можно осуществить адаптацию этой нелинейной по параметрам модели, повысив тем самым эффективность ее применения в прогнозировании социально-экономических процессов.

В случае использования в прогнозировании других нелинейных по параметрам эконометрических моделей следует для их адаптации осуществлять аналогичные действия.

Пример.

Построим логистическую кривую на тех же самых статистических данных табл. 2.1, которые использовались ранее. Используем для оценки коэффициентов логистического тренда первые пятнадцать наблюдений. Получим модель такого вида:

$$\hat{Y}_t = \frac{30,587}{1 + 8,0597e^{-0,13378(t+4)}}. \qquad (2.4.16)$$

Средняя ошибка аппроксимации исходных данных этой моделью равна *0,27*. Будем использовать этот показатель в качестве граничного значения, то есть - η*=0,27*. Адаптация логистической модели с помощью приведённых выше расчётных формул (2.4.12) – (2.4.14) с параметрами демпфирования колебаний (2.4.15) привела ее к виду:

$$\hat{Y}_t = \frac{30,728}{1 + 8,0226e^{-0,12906(t+4)}}. \qquad (2.4.17)$$

Сравним прогнозные свойства адаптированной и неадаптированной моделей логистической кривой. Результаты ретропрогноза приведены в табл. 2.5.

---

[1] Светуньков С.Г. Параметры демпфирования колебаний при адаптивном подходе к задаче идентификации динамических систем // Моделирование и разработка технических средств для АСУ ТП. - Ташкент: ТашПИ, 1987 г.

Результаты адаптации прогнозной нелинейной по параметрам модели вновь, как показывают данные табл. 2.5, улучшают точность прогнозирования модели.

Разработанный алгоритм адаптации эконометрических моделей может быть использован не только для адаптации сложных однофакторных моделей, но и для адаптации многофакторных моделей.

Табл. 2.5

Сравнительный анализ точности ретропрогноза неадаптированной и адаптированной моделей логистической кривой

Год наблюдения, t	Электропотребление промышленностью, млрд. кВт час, Y_t	Ошибка прогноза модели (2.4.16)	Ошибка прогноза модели (2.4.17)
16	18,48	-1,18965	-0,63926
17	19,22	-1,36989	-0,81574
18	19,91	-1,55851	-1,007
19	21,10	-1,201	-0,65814
20	22,10	-0,98404	-0,45534
21	23,40	-0,41555	0,09414
22	24,30	-0,19457	0,292008
23	25,05	-0,07112	0,389007
Средняя абсолютная ошибка ретропрогноза		0,873041	0,543828

Покажем, как это сделать на примере простой линейной многофакторной модели, коэффициенты которой найдены на некотором статистическом множестве:

$$\hat{Y}_t = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_{1t} + \ldots + \hat{a}_i x_{it} + \ldots + \hat{a}_{m-1} x_{m-1t}\,. \qquad (2.4.18)$$

Сначала необходимо вывести каждый из коэффициентов модели чер исходные переменные и другие коэффициенты модели. Для коэффициента – свободного члена многофакторной модели имеем:

$$\hat{a}_0 = \hat{Y}_t - (\hat{a}_1 x_{1t} + \ldots + \hat{a}_i x_{it} + \ldots + \hat{a}_{m-1} x_{m-1t})\,. \qquad (2.4.19)$$

Подставляя вместо расчётного значения моделируемого показателя его фактическое значение, получим «фактическое» значение коэффициента, к которому следует адаптировать расчётное:

$$a_0 = Y_t - (\hat{a}_1 x_{1t} + \ldots + \hat{a}_i x_{it} + \ldots + \hat{a}_{m-1} x_{m-1t})\,. \qquad (2.4.20)$$

Поскольку модель аддитивна и линейна, все остальные расчётные коэффициенты выводятся одинаковым образом. Для *i*-го коэффициента модели имеем:

$$\hat{a}_i = \frac{\hat{Y}_t - (\hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_{1t} + ... + \hat{a}_{i-1} x_{i-1} + \hat{a}_{i+1} x_{i+1} + ... + \hat{a}_{m-1} x_{m-1t})}{x_{it}}. \quad (2.4.21)$$

Подставляя вместо расчётного значения моделируемого показателя его действительные значения, вычисляются «фактические» значения коэффициента, к которым в результате адаптации как бы «подтягиваются» расчетные значения:

$$a_i = \frac{Y_t - (\hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_{1t} + ... + \hat{a}_{i-1} x_{i-1} + \hat{a}_{i+1} x_{i+1} + ... + \hat{a}_{m-1} x_{m-1t})}{x_{it}}. \quad (2.4.22)$$

Адаптация модели (2.4.18) осуществляется в соответствии с вышеизложенным алгоритмом. Для свободного члена для этого используется формула:

$$\hat{a}_{0t} = \hat{a}_{0t-1} + \gamma_{0t} \varepsilon_t. \quad (2.4.23)$$

Адаптация каждого последующего за свободным членом коэффициента осуществляется по формуле:

$$\hat{a}_{it} = \hat{a}_{it-1} + \gamma_{it} \frac{\varepsilon_t}{x_{it}}. \quad (2.4.24)$$

Здесь параметры демпфирования колебаний вычисляются по формуле (2.3.14), а если степень адаптации каждого из коэффициентов одинакова, то по формуле (2.3.15):

$$\gamma_{it} = \gamma_t = \frac{1}{m}\left|\frac{|\varepsilon_t| - \eta}{\varepsilon_t}\right|.$$