2.5. Метод z-множителей для построения адаптированных моделей

Мало разработанным, и существенно отличающимся от методов дисконтирования и стохастической аппроксимации, является метод построения моделей для среднесрочного прогнозирования эволюционных процессов, базирующийся на методе z-множителей, основные положения которого были изложены в параграфе 2.1. Применительно к задаче оценивания коэффициентов однофакторной линейной модели этот метод предлагает задавать некоторые значения z-множителей так, чтобы с их помощью можно было бы сформировать систему двух уравнений с двумя неизвестными (2.1.11):

$$\begin{cases} \sum_t Y_t z_{ot} = a_0 \sum_t z_{ot} + a_1 \sum_t x_t z_{ot}, \\ \sum_t Y_t z_{1t} = a_0 \sum_t z_{1t} + a_1 \sum_t x_t z_{1t}. \end{cases} \tag{2.5.1}$$

При решении этой системы получаются такие оценки коэффициентов прогнозных моделей, для которых всегда выполняется равенство (2.1.10):

$$\begin{cases} \sum_t \varepsilon_t z_{ot} = 0, \\ \sum_t \varepsilon_t z_{1t} = 0. \end{cases} \tag{2.5.2}$$

Сами z-множители могут задаваться бесчисленным количеством способов, в том числе и способом, соответствующим оценкам МНК, но при выполнении обязательных условий:

множитель $z_{0t} \neq z_{1t} \neq 0$ *и* z_{1t} *не является линейным преобразованием множителя* z_{0t}. (2.5.3)

Генерируя многочисленные способы оценивания коэффициентов прогнозных моделей, можно для каждого ряда значений подобрать таким образом наилучшую пару z-множителей. Поскольку отбор этой лучшей пары нацелен на задачу среднесрочного прогнозирования, то эта пара должна давать такие значения, которые наиболее пригодны именно для прогнозирования.

Применительно к методу задания пары z-множителей напрашивается сама собой процедура ретропрогноза. Поскольку можно генерировать огромное множество пар z-множителей, то одна из них наверняка даст наилучшие прогнозы в процедуре ретропрогнозирования. Таким образом метод z-множителей позволяет формально, не задавая каких-либо априорных предположений об исследуемом процессе, оценить наилучшим образом с позиций предстоящего прогнозирования коэффициенты модели. Поскольку осуществляется именно подбор наилучшей пары значений z-множителей, сама процедура напоминает адаптацию метода оценивания применительно к данному прогнозируемому процессу – ведь для других процессов оптимальной будет иная пара z-множителей. Поэтому с определённой степенью уверенности можно отнести метод z-множителей, применённый к задаче прогнозирования, к адаптивным методам прогнозирования.

Впрочем, в совокупности самых разнообразных методов задания z-множителей определённый интерес представляет возможность комбинирования уже существующих методов, в частности, метода Брауна.

Действительно, можно задать первый множитель z_{0t} как убывающую в прошлое последовательность геометрической прогрессии, сумма которой равна единице:

$$\alpha_{0T}(1-\alpha_{0T})^0,\ \alpha_{0T-1}(1-\alpha_{0T-1})^1,\ ...,\ \alpha_{0t}(1-\alpha_{0t})^{T-t},\ ... \qquad (2.5.4)$$

Используя таким образом задаваемый z-множитель для первого уравнения системы (2.1.11) будет получено такое равенство:

$$\sum_t Y_t z_{ot} = a_0 \sum_t z_{ot} + a_1 \sum_t x_t z_{ot}\ . \qquad (2.5.5)$$

Для его левой части:

$$\sum_t Y_t z_{ot} = \alpha_{0T} Y_T + \alpha_{0T-1}(1-\alpha_{0T-1}) Y_{T-1} + ... \alpha_{0t}(1-\alpha_{0t})^{T-t} Y_{T-t} = \alpha_{0T} Y_T + (1-\alpha_{0T-1}) \hat{Y}_T\ . \quad (2.5.6)$$

Где $\hat{Y}_T$ - усреднённое значение показателя для предыдущих T-1 наблюдений, которое выступает прогнозной оценкой для показателя на наблюдении T. Таким образом, сумма произведений показателя Y_t на множитель z_{0t}, который задаётся так, как это показано в (2.5.4), даёт не что иное, как краткосрочный прогноз этого показателя на шаг вперёд:

$$\sum_t Y_t z_{ot} = \hat{Y}_{T+1}\ . \qquad (2.5.7)$$

Первое слагаемое правой части рассматриваемого равенства представляет собой произведение свободного коэффициента на сумму множителей z_{0t}. Эта сумма для рассматриваемого способа задания множителей (2.5.4) равна единице. Поэтому первое слагаемое правой части равенства просто будет равно свободному коэффициенту a_0:

$$a_0 \sum_t z_{ot} = a_0\ . \qquad (2.5.8)$$

Второе слагаемое правой части равенства представляет собой произведение коэффициента пропорциональности a_1 на сумму произведений переменной x_t на z-множители, которые задаются по закону (2.5.4). Эта сумма также представляет собой не что иное, как модель краткосрочного прогнозирования Брауна, применённая теперь к динамическому ряду переменной x_t. В результате получим:

$$\sum_t x_t z_{ot} = \alpha_{0T} x_T + \alpha_{0T-1}(1-\alpha_{0T-1})x_{T-1} + ...\alpha_{0t}(1-\alpha_{0t})^{T-t} x_{T-t} + ... = \alpha_{0T} x_T + (1-\alpha_{0T-1})\hat{x}_T . \quad (2.5.9)$$

Или:

$$\sum_t x_t z_{ot} = \hat{x}_{T+1} . \quad (2.5.10)$$

То есть, коэффициент пропорциональности умножается на краткосрочный прогноз факторной переменной, полученный методом Брауна при заданном значении постоянной сглаживания α_0.

Теперь можно первое уравнение системы метода z-множителей после умножения левой и правой части равенства на z-множители, задаваемые по способу (2.5.4), представить в таком удобном итоговом виде

$$\hat{Y}_{T+1} = a_0 + a_1 \hat{x}_{T+1} . \quad (2.5.11)$$

Второй множитель z_{1t} можно задавать так, чтобы $z_{1t} \neq 0$ и z_{1t} не является линейным преобразованием множителя z_{0t}. Если, например, задать $z_{1t} = 1$, то система z-множителей будет иметь вид:

$$\begin{cases} \hat{Y}_{T+1} = a_0 + a_1 \hat{x}_{T+1} \\ \sum_t Y_t = a_0 T + a_1 \sum_t x_t . \end{cases} \quad (2.5.12)$$

Или:

$$\begin{cases} \hat{Y}_{T+1} = a_0 + a_1 \hat{x}_{T+1} \\ \bar{Y} = a_0 + a_1 \bar{x} . \end{cases} \quad (2.5.13)$$

Если использовать эту систему для оценки коэффициентов линейной однофакторной модели, то обязательно должны выполняться такие условия для ошибок аппроксимации:

$$\begin{cases} \sum_t \varepsilon_t z_{ot} = \hat{\varepsilon}_{T+1} = 0, \\ \sum_t \varepsilon_t z_{1t} = \sum_t \varepsilon_t = 0. \end{cases} \quad (2.5.14)$$

Первое уравнение полученной системы свидетельствует о том, что средневзвешенная ошибка аппроксимации будет равна нулю, и её значение на следующий шаг наблюдения ожидается равной нулю. Второе условие полученной системы говорит о том, что модель пройдёт через среднюю точку $(\overline{Y}, \overline{x})$, а сумма ошибок аппроксимации модели по всем исходным данным будет равна нулю. Иначе говоря, адаптированная таким образом модель пройдёт через две точки – первая точка, это точка средних арифметических значений исходных переменных, а вторая точка – точка средних взвешенных значений исходных переменных.

Легко убедиться в том, что эта система имеет элементарное решение, поскольку, отнимая от правых частей первого уравнения правые части второго уравнения, и, соответственно, отнимая от левых частей первого уравнения левые части второго уравнения, получим сразу же формулу для расчёта коэффициента пропорциональности:

$$a_1 = \frac{\hat{Y}_{T+1} - \overline{Y}}{\hat{x}_{T+1} - \overline{x}}. \qquad (2.5.15)$$

Значение коэффициента, характеризующего свободный член, легко вычислить, подставляя величину коэффициента пропорциональности (2.5.15) в первое или второе уравнение системы (2.5.13).

Интересным представляется метод *z*-множителей для ситуации, когда первый множитель z_{0t} задаётся как геометрическая прогрессия (2.5.4), а второй множитель z_{1t} задаётся как аналогичная геометрическая прогрессия, но с другим значением постоянной сглаживания:

$$\alpha_0 \neq \alpha_1, \qquad (2.5.16)$$

$$\alpha_{1T}(1-\alpha_{1T})^0,\ \alpha_{1T-1}(1-\alpha_{1T-1})^1,\ \ldots,\ \alpha_{1t}(1-\alpha_{1t})^{T-t},\ \ldots \qquad (2.5.17)$$

Запишем первое равенство системы с индексом *0* для взвешенных с помощью α_0 средних, а второе равенство – с индексом *1*, поскольку здесь взвешивание производится с помощью другой постоянной сглаживания α_1.

С учётом этих обозначений получим систему следующего вида:

$$\begin{cases} \hat{Y}^0_{T+1} = a_0 + a_1 \hat{x}^0_{T+1} \\ \hat{Y}^1_{T+1} = a_0 + a_1 \hat{x}^1_{T+1} \end{cases}. \qquad (2.5.18)$$

Она также как и в прежнем случае, легко решается, поскольку, отнимая от правой и левой части первого равенства правую и левую части второго равенства, сразу же сокращается одна из неизвестных, а именно – свободный коэффициент a_0. В результате этого получим формулу для вычисления коэффициента пропорциональности:

$$a_1 = \frac{\hat{Y}^0_{T+1} - \hat{Y}^1_{T+1}}{\hat{x}^0_{T+1} - \hat{x}^1_{T+1}}. \qquad (2.5.19)$$

Соответственно, просто вычислить и значение свободного коэффициента.

Простота вычисления коэффициентов такой адаптивной модели несколько омрачается необходимостью оптимизацией сразу двух неизвестных постоянных сглаживания α_0 и α_1 при обязательном выполнении условия (2.5.16). Но для современной вычислительной техники и имеющихся в распоряжении прогнозиста программных продуктов эта задача не представляется особо сложной.