2.4. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ К ОЦЕНКЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ТРЕНДОВЫХ МОДЕЛЕЙ

Достаточно простые способы оценки коэффициентов линейного тренда, приведённые в предыдущее параграфе, обладают среди прочих одним существенным недостатком – они не сформулированы с позиций вероятностного подхода, поэтому им сложно дать какую-либо статистическую характеристику.

Так как в данной главе мы рассматриваем исключительно стационарные процессы, то для их прогнозирования правильно было бы использовать и инструментарий, специально разработанный для исследования характеристик таких процессов. Этим инструментарием прогнозиста вооружает теория вероятностей и математическая статистика, в арсенале которой результаты тщательного изучения свойств наиболее распространенных стационарных процессов. Каждый из них, являясь результатом реализации случайного процесса, может быть описан с помощью той или иной функции распределения вероятностей или соответствующей ей функции плотности распределения.

Пусть функция плотности распределения имеет вид $f(y,\theta)$, где y – это изучаемые случайные величины ($y=y_1,y_2,\dots$), имеющие распределение, форма которого задана этой функцией и определяется единственным параметром θ. Тогда событие, заключающееся в независимом отборе из этой совокупности N элементов, в соответствии с теоремой умножения вероятностей независимых событий будет описываться следующей общей функцией плотности вероятностей:

$$f(y_1, y_2, \dots, y_N, \theta) = f(y_1,\theta) f(y_2,\theta) \dots f(y_N,\theta). \qquad (2.4.1)$$

Так как случайные величины ($y=y_1,y_2,\dots,y_N$) уже имеются в распоряжении исследователя, то неизвестной переменной как раз выступает параметр θ. В рамках заданной функции плотности вероятности различные значения этого параметра приводят к тому, что случайные величины ($y=y_1,y_2,\dots,y_N$) принимают разные значения. Но в рассматриваемом случае эти величины нам заданы, следовательно, есть некоторое значение параметра θ, которому и соответствует имеющаяся выборка. Наша задача – найти это неизвестное значение параметра.

Теперь можно сформулировать правило нахождения данного параметра, а именно – надо найти оценки θ так, чтобы придать максимальное правдоподобие высказанному предположению о характере распределения вероятностей, в соответствии с которым получена данная выборка. Иначе говоря, нам надо найти такие значения параметра θ, при которых функция плотности вероятностей (2.4.1) принимала бы максимальные значений. Это правило, предопределяющее направление поиска наилучших оценок параметров модели, получило название принципа максимального правдоподобия. Так как нами априорно задан закон распределения вероятностей *f*, то, подставляя его математическое выражение в формулу (2.4.1), сводим тем самым задачу к поиску максимального значения этой функции по неизвестному параметру θ. Непосредственно применить этот подход к функции (2.4.1) можно, но значительно проще свести задачу к линейному виду с помощью логарифмирования, например, по натуральному основанию:

$$\ln f(y_1, y_2, ..., y_N, \theta) = \ln f(y_1, \theta) + \ln f(y_2, \theta) + ... + \ln f(y_N, \theta)\,. \qquad (2.4.2)$$

Правомерно ли это? Так как ln *f(y)* есть монотонная функция от самой *f(y)*, то её максимум достигается в той же самой точке, что и у исходной функции. Возьмём первую производную (2.4.2) по параметру θ:

$$\frac{\partial \ln f(y_1, y_2, ..., y_N, \theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{f(y_1, y_2, ..., y_N, \theta)}\left(\frac{\partial f(y_1, y_2, ..., y_N, \theta)}{\partial \theta}\right). \qquad (2.4.3)$$

Так как функция (2.4.1) по определению не равна нулю в точке своего максимума, то в этой точке из равенства

$$\frac{\partial \ln f(y_1, y_2, ..., y_N, \theta)}{\partial \theta} = 0$$

следует

$$\frac{\partial f(y_1, y_2, ..., y_N, \theta)}{\partial \theta} = 0\,.$$

Покажем, как, используя метод максимального правдоподобия, получить искомые оценки коэффициентов линейного тренда. Пусть закон плотности распределения вероятностей соответствует нормальному:

$$f(y, \theta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{y-\theta}{\sigma})^2}\,. \qquad (2.4.4)$$

Так как моделью процесса выступает линейный тренд, то параметр θ представляет собой уравнение этого тренда, то есть:

$$\theta = a_0 + a_1 t\,. \qquad (2.4.5)$$

Подставим (2.4.4) и (2.4.5) в (2.4.2). Получим:

$$\ln f(y, a_0 + a_1 t) = N \ln \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - a_0 - a_1 t)^2\,. \qquad (2.4.6)$$

Наша задача - нахождение максимума этой функции по параметрам a_0 и a_1. Легко убедиться в том, что первое слагаемое полученного выражения на зависит от этих параметров, поэтому максимум функции (2.4.6) равнозначен нахождению максимума такой функции:

$$F'(a_0, a_1) = -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - a_0 - a_1 t)^2$$

В свою очередь, так как сомножитель перед знаком суммы есть величина постоянная (неизвестны только a_0 и a_1), та максимум этой функции соответствует минимуму другой функции:

$$F(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - a_0 - a_1 t)^2 = \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^{\,2}\,. \qquad (2.4.7)$$

Полученная функция соответствует известному в математической статистике методу наименьших квадратов (МНК), ведь теперь нам нужно минимизировать сумму квадратов отклонений расчётных значений от фактических. Следовательно, принцип максимального правдоподобия в случае, когда есть основания утверждать наличие нормального закона распределения вероятностей, в качестве лучшего метода оценки параметров модели характеризует метод наименьших квадратов. А с учётом того, что для стационарных процессов чаще всего наблюдается именно нормальный закон вероятностей, то МНК получил максимальное распространение на практике.

Применительно к нашей модели линейного тренда условие минимума квадратов отклонений сводится к нахождению первых производных функции (2.4.7) по неизвестным параметрам a_0 и a_1 и приравнивание их к нулю, то есть:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(a_0,a_1)}{\partial a_0} = \dfrac{\partial \sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 t)^2}{\partial a_0} = -2\sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 t) = 0, \\ \dfrac{\partial F(a_0,a_1)}{\partial a_1} = \dfrac{\partial \sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 t)^2}{\partial a_1} = -2t\sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 t) = 0, \end{cases} . \tag{2.4.8}$$

Откуда легко найти систему уравнений, которая в данном случае будет называться «системой нормальных уравнений», поскольку соответствует нормальному закону распределения:

$$\begin{cases} \sum\limits_{t=1}^{T} y_t = n a_0 + a_1 \sum\limits_{t=1}^{T} t, \\ \sum\limits_{t=1}^{T} y_t t = a_0 \sum\limits_{t=1}^{T} t + a_1 \sum\limits_{t=1}^{T} t^2, \end{cases} . \tag{2.4.9}$$

При использовании МНК всегда будут выполняться следующие условия для случая линейного тренда:

$$\begin{cases} \sum\limits_{t} \varepsilon_t = 0, \\ \sum\limits_{t} \varepsilon_t t = 0. \end{cases} \tag{2.4.10}$$

Таким образом, при использовании МНК средняя арифметическая ошибки аппроксимации ε_t будет всегда равна нулю, то есть – оценки будут несмещёнными (первое равенство системы (2.4.9)) и при равномерном изменении t величина ε_t будет с одинаковой частотой принимать как отрицательные, так и положительные значения (второе равенство условия (2.4.9)).

С линейными трендами прогнозисты встречаются повсеместно. Но не менее часто встречаются случаи, когда тенденции изменения показателя носят нелинейный характер и использование линейных трендов в прогнозировании ошибочно. Тогда возникает задача нахождения коэффициентов таких нелинейных моделей.

С позиций того, насколько просто удаётся применить МНК к оценке параметров таких моделей нелинейного тренда, выделяют два вида моделей:

- линейных по параметрам,
- нелинейным по параметрам.

К первому типу моделей относят те из них, оценки МНК которых получаются либо непосредственно применяя МНК, либо осуществляя линеаризацию модели. Вторые модели невозможно привести к линейному виду.

Рассмотрим сначала линейные по параметрам нелинейные модели и способы нахождения выборочных значений коэффициентов этих моделей. Основные из них приведены в параграфе 2.2.

Довольно просто найти оценки МНК коэффициентов моделей полиномов разных степеней, например, для квадратичного тренда:

$$\hat{y}_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 . \qquad (2.4.11)$$

Применяя МНК к этой модели, получим такую систему нормальных уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{t=1}^{T} y_t = na_0 + a_1 \sum_{t=1}^{T} t + a_2 \sum_{t=1}^{T} t^2, \\ \sum_{t=1}^{T} y_t t = a_0 \sum_{t=1}^{T} t + a_1 \sum_{t=1}^{T} t^2 + a_2 \sum_{t=1}^{T} t^3, \\ \sum_{t=1}^{T} y_t t^2 = a_0 \sum_{t=1}^{T} t^2 + a_1 \sum_{t=1}^{T} t^3 + a_2 \sum_{t=1}^{T} t^4. \end{cases} \qquad (2.4.12)$$

Решая её относительно неизвестных коэффициентов, можно получить оценку МНК их выборочных значений.

Известно, что полиномы высоких степеней очень неустойчивы, поэтому на практике стремятся избегать моделей в форме полиномов со степенью, большей двух, хотя системы нормальных уравнений для этих моделей вычисляются довольно просто.

Также просто найти систему нормальных уравнений для других аддитивных нелинейных моделей. Например, для модели:

$$\hat{y}_t = a_0 + a_1 / t , \qquad (2.4.13)$$

получим систему уравнений МНК:

$$\begin{cases} \sum_{t=1}^{T} y_t = na_0 + a_1 \sum_{t=1}^{T} 1/t, \\ \sum_{t=1}^{T} y_t / t = a_0 \sum_{t=1}^{T} 1/t + a_1 \sum_{t=1}^{T} 1/t^2, \end{cases} \qquad (2.4.14)$$

решая которую, найдём оценки коэффициентов модели (2.4.13), соответствующие оценкам МНК.

Применение МНК к этим аддитивным моделям будет давать несмещённые оценки коэффициентов, когда сумма отклонений расчётных значений показателя от его фактических величин будет равна нулю (первое равенство (2.4.10)). Это свидетельствует о том, что модель в среднем проходит через все точки временной тенденции так, что количество точек, расположенных выше модели примерно равно количеству точек, расположенных ниже модели.

Но в случае моделей, в которых неизвестные коэффициенты представлены в мультипликативной форме, ситуация изменяется. Рассмотрим в качестве примера задачу оценивания коэффициентов одной из простых прогнозных моделей нелинейного тренда, а именно – экспоненту:

$$\hat{y}_t = a_0 e^{a_1 t}\,. \tag{2.4.15}$$

Как следует из логики МНК, необходимо найти такие значения коэффициентов a_0 и a_1 этой модели, для которых выполняется условие:

$$\sum_t (y_t - \hat{y}_t)^2 = \sum_t (y_t - a_0 e^{a_1 t})^2 \to \min\,. \tag{2.4.16}$$

Поскольку сумма квадратов отклонений расчётных значений от фактических представляет собой функцию от двух переменных a_0 и a_1, то для нахождения этого минимума необходимы вычислить первые производные функции (2.16) от каждой из переменных и приравнять их к нулю. Решая полученную систему уравнений, можно найти искомые значения коэффициентов.

Применительно к модели (2.4.15) это условие запишется так:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(\sum_t (y_t - a_0 e^{a_1 t})^2)}{\partial a_0} = 0 \\ \dfrac{\partial(\sum_t (y_t - a_0 e^{a_1 t})^2)}{\partial a_1} = 0 \end{cases}. \tag{2.4.17}$$

Вычисляя первые производные каждого равенства системы (2.4.17), и подставляя их, получим искомую систему нормальных уравнений:

$$\begin{cases} \sum_t y_t e^{a_1 t} - a_0 \sum_t e^{2a_1 t} = 0 \\ a_0 \sum_t y_t t e^{a_1 t} - a_0^2 \sum_t t e^{2a_1 t} = 0 \end{cases}. \tag{2.4.18}$$

Получена система нелинейных уравнений, которую невозможно решить известными методами линейной алгебры. Необходимо использовать для решения этой системы многоитеративную процедуру одного из численных методов. Для специалиста в области экономико-математического моделирования это не представляет методологических проблем, проблемы могут быть чисто методическими – необходимо выбрать один из алгоритмов нахождения оптимума численных методов, реализовывать его в той или иной программной среде и т.п. То есть, затратить довольно большой промежуток времени на решение довольно тривиальной задачи. Несколько десятков лет назад, когда учёные не были вооружены вычислительной техникой так, как это имеет место сегодня, задача нахождения коэффициентов мультипликативных моделей решалась с помощью линеаризации нелинейных моделей. Применительно к модели (2.4.15) это делается так. Прологарифмируем левую и правые части равенства (2.4.15) по натуральному основанию. Получим:

$$\ln \hat{y}_t = \ln a_0 + a_1 t\,. \qquad (2.4.19)$$

Как видно, в результате логарифмирования модель из мультипликативной формы превратилась в модель аддитивной формы, да к тому же ещё и линейного вида. Именно поэтому подобная процедура и получила название «линеаризация».

Теперь, после линеаризации, задача нахождения коэффициентов модели с помощью МНК ставится следующим образом. Логарифмы фактических наблюдений y_t должны описываться логарифмами (2.4.19) так, чтобы сумма квадратов отклонений между ними была минимальна, то есть:

$$\sum_t (\ln y_t - \ln \hat{y}_t)^2 = \sum_t (\ln y_t - \ln a_0 - a_1 t)^2 \to \min\,. \qquad (2.4.20)$$

Находя первые производные этой функции по её параметрам – $\ln a_0$ и a_1 и приравнивая их к нулю, получим систему нормальных уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{t=1}^{T} \ln y_t = n \ln a_0 + a_1 \sum_{t=1}^{T} t, \\ \sum_{t=1}^{T} t \ln y_t = \ln a_0 \sum_{t=1}^{T} t + a_1 \sum_{t=1}^{T} t^2. \end{cases} \qquad (2.4.21)$$

Эта система имеет довольно простое алгебраическое решение, что позволяет легко найти коэффициенты модели. Но поскольку, решая систему, находятся значения $\ln a_0$, а не a_0, как это необходимо для построения прогнозной модели (2.4.15), следует из логарифма коэффициента найти его исходное значение. Делается это элементарно:

$$a_0 = e^{\ln a_0}\,. \qquad (2.4.22)$$

Теперь полученные с помощью МНК оценки коэффициентов можно подставлять в модель и выполнять с её помощью модели.

Точно таким же образом поступают с другими нелинейными моделями. Покажем как это делается, на примере основных из них, приведённых в параграфе 2.2.

Если прогнозист считает необходимым использовать в качестве модели тренда степенную функцию:

$$\hat{y}_t = a_0 t^{a_1}\,, \qquad (2.4.23)$$

то для её линеаризации вновь надо прологарифмировать по любому основанию левую и правую части равенства. Получим:

$$\ln \hat{y}_t = \ln a_0 + a_1 \ln t\,, \qquad (2.4.24)$$

Тогда, применяя для линеаризированной модели МНК, получим систему нормальных уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{t=1}^{T} \ln y_t = n \ln a_0 + a_1 \sum_{t=1}^{T} \ln t, \\ \sum_{t=1}^{T} \ln t \ln y_t = \ln a_0 \sum_{t=1}^{T} \ln t + a_1 \sum_{t=1}^{T} \ln^2 t. \end{cases} \qquad (2.4.25)$$

Если в основании показательной степени лежит число десять, то показательная функция имеет вид:

$$\hat{y}_t = a_0 10^{a_1 t}\,. \qquad (2.4.26)$$

Для того чтобы можно было найти коэффициенты этой модели, необходимо её линеаризовать. Поскольку основанием показательной степени является число десять, то и логарифмировать левую и правую части равенства (2.4.26) надо по десятичному основанию:

$$\lg \hat{y}_t = \lg a_0 + a_1 t . \tag{2.4.27}$$

Тогда задача ставится так – минимизировать сумму квадратов отклонений логарифмов расчётных значений от фактических. Для получения решения такой задачи, формируется система нормальных уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{t=1}^{T} \lg y_t = n \lg a_0 + a_1 \sum_{t=1}^{T} t, \\ \sum_{t=1}^{T} t \lg y_t = \lg a_0 \sum_{t=1}^{T} t + a_1 \sum_{t=1}^{T} t^2. \end{cases} \tag{2.4.28}$$

Её решение даёт расчётные значения $\lg a_0$ и a_1. Для того, чтобы использовать модель (2.4.26) в прогнозировании, находим исходное значение коэффициента a_0:

$$a_0 = 10^{\lg a_0} . \tag{2.4.29}$$

При использовании в прогнозировании показательной модели с любым основанием:

$$\hat{y}_t = a_0 k^{a_1 t} \tag{2.4.30}$$

поступают также. Но поскольку основание этой модели не равно *e* и не равно *10*, то не понятно, по какому же основанию логарифмировать левую и правые части модели для того, чтобы линеаризовать её? На самом деле – никакой особенной разницы здесь нет, поэтому логарифмировать можно по любому основанию. Для определённости прологарифмируем левую и правую части (2.4.30) до натуральному основанию. Получим:

$$\ln \hat{y}_t = \ln a_0 + a_1 t \ln k . \tag{2.4.31}$$

Система нормальных уравнений для МНК применительно к этой линеаризованной модели будет иметь вид:

$$\begin{cases} \sum_{t=1}^{T} \ln y_t = n \ln a_0 + a_1 \ln k \sum_{t=1}^{T} t, \\ \sum_{t=1}^{T} t \ln y_t = \ln a_0 \sum_{t=1}^{T} t + a_1 \ln k \sum_{t=1}^{T} t^2. \end{cases} \tag{2.4.32}$$

Из решения данной системы нормальных уравнений легко перейти к к исходному виду модели (вычисляя коэффициент a_0) так, как это делается для других моделей:

$$a_0 = e^{\ln a_0} . \tag{2.4.33}$$

Казалось бы – найдены оценки этих нелинейных моделей, и не надо ничего больше выдумывать и усложнять. Надо брать полученные расчётные значения и, подставляя их в модель, вычислять для заданного прогнозного периода значения прогнозируемого показателя. Но поскольку мы вычисляем коэффициенты модели на выборочном множестве вероятного процесса, необходимо оценить доверительные границы этих коэффициентов. Тогда на основе этих границ вычисляются интервальные значения прогнозируемой величины. Эта процедура рассмотрена в параграфе 3.6 на более общем примере факторной зависимости (время рассматривается как фактор, определяющий изменение показателя).

Но простота указанных рассуждений скрывает за собой одну сложную проблему. Дело в том, что МНК применяется не для исходной модели, а для линеаризованной модели. Поэтому все замечательные свойства оценок коэффициентов, полученных для случайных нормально распределённых процессов с помощью МНК, а именно – состоятельность, несмещённость, и эффективность, соответствуют не исходным моделям, а линеаризованным.

Напомним, что оценки коэффициентов модели будут являться состоятельными, если они по вероятности сходятся к оцениваемому параметру при неограниченном возрастании объёма выборки. То есть, чем большее число наблюдений учитывается при оценивании коэффициентов модели, тем точнее становится оценка выборочного значения коэффициента.

Несмещёнными называются такие оценки выборочного значения параметра, если в них отсутствуют систематические отклонения от оцениваемого параметра.

Поскольку по выборочным значениям можно оценить коэффициенты модели разными способами, то каждый из них даст различную величину дисперсии отклонения расчётных значений от фактических. Тот метод оценивания, который даст наименьшую дисперсию, и будет являться эффективным.

Давно уже доказано, что в случае нормально распределённой случайной величины использование МНК приводит к тому, что полученные выборочные оценки будут являться состоятельными, несмещёнными и эффективными. Но, ещё раз необходимо указать на то, что эти оценки характерны для линеаризованных моделей, но не для исходных моделей. Покажем, какими будут оценки для исходных нелинейных мультипликативных моделей. Вновь воспользуемся для этого моделью экспоненциального тренда:

$$\hat{y}_t = a_0 e^{a_1 t}.$$

Линеаризованная модель будет описывать логарифм исходного ряда с некоторой ошибкой ε_t:

$$\varepsilon_t = \ln y_t - \ln \hat{y}_t. \qquad (2.4.34)$$

Поэтому критерий МНК

$$\sum_t (\ln y_t - \ln \hat{y}_t)^2 = \sum_t (\ln y_t - \ln a_0 - a_1 t)^2 \to \min$$

по сути сводится к минимизации суммы квадратов этой ошибки:

$$\sum_t (\ln y_t - \ln \hat{y}_t)^2 = \sum_t \varepsilon_t^2 \to \min. \qquad (2.4.35)$$

Несмещённость оценок МНК коэффициентов линеаризованной модели означает, что на рассматриваемом выборочном множестве сумма отклонений ε_t будет равна нулю:

$$\sum_t \varepsilon_t = 0. \qquad (2.4.36)$$

Из (2.4.34) легко получить следующее равенство:

$$\ln y_t = \ln \hat{y}_t + \varepsilon_t . \qquad (2.4.37)$$

Откуда:

$$y_t = \hat{y}_t e^{\varepsilon_t} . \qquad (2.4.38)$$

То есть, ошибка ε_t является мультипликативной ошибкой по отношению к исходной модели.

Обозначим аддитивную ошибку отклонений расчётных значений модели от фактических через μ_t:

$$\mu_t = y_t - \hat{y}_t . \qquad (2.4.39)$$

Откуда:

$$y_t = \hat{y}_t + \mu_t . \qquad (2.4.40)$$

Левые части (2.4.38) и (2.4.40) равны друг другу, следовательно, равны друг другу и правые части этих равенств, то есть:

$$\hat{y}_t e^{\varepsilon_t} = \hat{y}_t + \mu_t . \qquad (2.4.41)$$

Тогда можно вывести аддитивную ошибку в зависимости от расчётных значений показателя и мультипликативной ошибки, характерной для оценок МНК линеаризованной модели:

$$\mu_t = (e^{\varepsilon_t} - 1)\hat{y}_t . \qquad (2.4.42)$$

Поскольку исходный ряд значений y_t положителен и не равен нулю – он изменяется по тенденции, близкой к экспоненте, значит и его расчётные значения положительны. Тогда из полученного равенства видно, что аддитивная ошибка μ_t будет равна нулю только в одном случае, когда мультипликативная ошибка ε_t также будет равна нулю. Поскольку относительно мультипликативных ошибок ε_t, соответствующих оценке МНК, известно, что они в сумме дают нуль (2.4.36), а поскольку оценки МНК состоятельны и эффективны, то дисперсия этой ошибки мала, а размахи отрицательных

$$\varepsilon_{\min} = \min_t \varepsilon_t$$

и положительных величин

$$\varepsilon_{\max} = \max_t \varepsilon_t$$

этих ошибок по вероятности равны друг другу:

$$| \varepsilon_{\min} | = \varepsilon_{\max} . \qquad (2.4.43)$$

Множитель при расчётных значениях показателя представляет собой функцию, изображённую на графике рисунка (2.4.1).

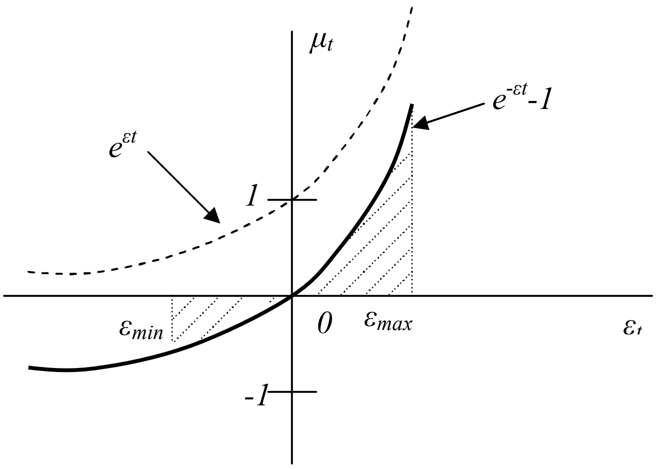

Рис. 2.4.1. Функция изменения множителя ($e^{-\varepsilon t}$-1) в зависимости от ε_t

Зная, как ведёт себя этот множитель в зависимости от мультипликативной ошибки, можно ответить и на вопрос: чему в среднем будет равна сумма отклонений μ_t? То есть – как пройдёт модель с коэффициентами, оценёнными с помощью МНК по линеаризованной модели, поскольку:

$$\sum_t \mu_t = \sum_t (y_t - \hat{y}_t)\,. \tag{2.4.44}$$

Исходная модель будет несмещённой, если эта сумма будет равна нулю.

Равенство (2.4.44) с учётом (2.4.42) можно записать так:

$$\sum_t \mu_t = \sum_t (e^{\varepsilon_t} - 1)\hat{y}_t\,. \tag{2.4.45}$$

Для того чтобы ответить на поставленный вопрос, примем для простоты вначале, что $\hat{y}_t = const > 0$.

Тогда знак суммы (2.4.45) определяется знаком суммы

$$\sum_t (e^{\varepsilon_t} - 1)\,. \tag{2.4.46}$$

Его можно понять, если обратиться к графику рисунка 2.4.1. Эта сумма будет представлять собой площадь фигуры, изображённой на графике двумя заштрихованными областями. Левее нулевой точки расположена отрицательная часть этой суммы, правее – положительная часть. Из рисунка наглядно видно, что площадь отрицательной части меньше, чем площадь положительной части. Это означает, что знак суммы будет положительным:

$$\sum_t \mu_t > 0\,. \tag{2.4.47}$$

Но поскольку $y_t \neq cons$ и являются положительными величинами, знак меняться не будет.

Таким образом, линеаризация исходных моделей и применение к ним МНК приводит к смещению оценок исходных моделей – они будут смещёнными, а значит, и не эффективными. Применение МНК непосредственно к исходной модели, хотя и приводит к серьёзным вычислительным сложностям, поскольку необходимо решать систему нелинейных уравнений типа (2.4.18), но позволяет получить несмещённые оценки модели так, что дисперсия аппроксимации при этом будет минимальной.

Кстати, из вывода о том, что сумма аддитивной ошибки модели положительна, следует вывод о том, как опишет исходный ряд модель нелинейного тренда со смещёнными оценками. Действительно, подставим в (2.4.47) значения ошибки из (2.4.40):

$$\sum_t \mu_t = \sum_t (y_t - \hat{y}_t) > 0 . \qquad (2.4.48)$$

Это означает, что модель в среднем пройдёт ниже исходных точек:

$$\sum_t y_t > \sum_t \hat{y}_t . \qquad (2.4.49)$$

Следовательно, и прогноз, который будет выполняться с помощью такой модели, будет давать прогнозисту искажённые оценки.

Поэтому, хотя процедура линеаризации и применяется повсеместно на практике для применения МНК, необходимо помнить, что при прогнозе такие модели будут неточны и содержать в себе систематическую составляющую.

Продемонстрируем всё, сказанное выше, на условном примере. Пусть исходный ряд представляет собой некоторую возрастающую последовательность, подчиняющуюся экспоненциальному закону изменения:

$$y_t = 2e^{0,1t} + \varepsilon_t ,$$

где ε_t – случайная нормально распределённая величина с нулевым математическим ожиданием (Табл.2.4.1).

Логарифмируя исходный ряд, тем самым его линеаризуя, мы приводим его к виду, удобному для применения МНК. Третий столбец табл. 2.4.1 содержит эти значения.

МНК, применённый к этим логарифмам так, как это показано в системе нормальных уравнений (2.4.21), позволяет найти значения коэффициентов линеаризованной модели:

$$\ln \hat{y}_t = 0{,}0992t + 0{,}6933. \qquad (2.4.50)$$

Экспонируя полученную функцию, найдём модель экспоненциального тренда:

$$\hat{y}_t = 2{,}000306e^{0,6933t} . \qquad (2.4.51)$$

В четвёртом столбце таблицы 2.4.1 приведены эти расчётные величины. Теперь можно вычислить ошибку аппроксимации этой модели – она приведена в этой же таблице в последнем пятом столбце. Просуммировав значения этого столбца по всем наблюдениям, найдём сумму ошибок аппроксимации:

$$\sum_t \mu_t = 1,047957 > 0$$

Табл. 2.4.1.
Условный пример, демонстрирующий смещённость оценок МНК
для линеаризованной модели

t	y_t	**ln**y_t	$\hat{y}_t$	ε_t
1	***2***	***3***	***4***	***5***
1	2,008566	0,697421	2,208912	-0,20035
2	3,24032	1,175672	2,439273	0,801047
3	2,65681	0,977126	2,693658	-0,03685
4	3,39807	1,223208	2,974572	0,423499
5	2,713979	0,998416	3,284781	-0,5708
6	3,797837	1,334432	3,627341	0,170496
7	3,077158	1,124006	4,005627	-0,92847
8	4,793351	1,56723	4,423362	0,369989
9	3,958396	1,375839	4,884662	-0,92627
10	6,293568	1,839528	5,394069	0,899499
11	5,223219	1,653114	5,956601	-0,73338
12	7,632559	2,032423	6,577798	1,054762
13	7,320308	1,990652	7,263777	0,056531
14	8,617874	2,153838	8,021296	0,596578
15	8,196442	2,1037	8,857814	-0,66137
16	10,60422	2,361252	9,78157	0,822649
17	10,07862	2,310417	10,80166	-0,72304
18	12,22765	2,5037	11,92814	0,299518
19	12,60843	2,534366	13,17209	-0,56366
20	15,44334	2,737178	14,54577	0,897569

Как и ожидалось, эта сумма не равна нулю, а это значит, что построенная модель смещена, то есть она в среднем проходит ниже, чем фактические наблюдения. Причём если каждое расчётное значение модели сдвинуть вверх на величину

$$\frac{1}{T}\sum_t \mu_t = \frac{1,047957}{20} = 0,052398,$$

то модель перестанет быть смещённой.

Применительно к математической форме записи модели (2.4.51) это означает её модификацию к следующему виду:

$$\hat{y}_t = 2,000306e^{0,6933t} + 0,052398. \qquad (2.4.52)$$

Сумма ошибок аппроксимации такой модели действительно станет тогда равной нулю, и дисперсия этой модели слегка уменьшится, но всё равно эта модель не будет обладать свойствами оценок МНК (несмещённость, состоятельность и эффективность). Модели типа (2.4.52) иногда называют моделями модифицированной экспоненты, оценку коэффициентов которой осуществляют чаще всего именно так, как это было показано выше на условном примере.