2.5. НЕЛИНЕЙНЫЕ ПО ПАРАМЕТРАМ МОДЕЛИ ТРЕНДОВ

В предыдущем параграфе была приведена классификация моделей трендов в зависимости от того, каким образом представлены в них коэффициенты (параметры) трендов, а именно, выделялись:

- линейные по параметрам и
- нелинейные по параметрам модели.

Линейные по параметрам модели могут быть как линейными, так и нелинейными, но их отличительной чертой является возможность их линеаризации – с помощью логарифмирования или экспонирования, заменой переменных и т.п. Однако существует целый класс моделей, коэффициенты которых найти не так просто – линеаризовать эти модели невозможно. Эти модели и называются нелинейными по параметрам.

К числу основных из них относят следующие:

1) кривая Гомперца:

$$y_t = ab^{ct}, \tag{2.5.1}$$

где *a, b,c* – коэффициенты модели, являющиеся по определению в этой и во всех последующих нелинейных по параметрам моделях положительными числами, *t* – дискретное время.

2) логистическая кривая, которую иногда называют моделью Верхулста[1], а иногда – моделью Перла-Рида[2]:

$$y_t = \frac{a_0}{1 + a_1 e^{-a_2 t}}. \tag{2.5.2}$$

Поскольку в знаменателе этой модели используется показательная функция с основанием по экспоненте, то возможны и другие основания показательной функции, например, десятичное. Тогда логистическая кривая будет иметь другой вид:

$$y_t = \frac{a_0}{1 + a_1 10^{-a_2 t}}. \tag{2.5.3}$$

Понятно, что можно предлагать и иные основания в показательную функцию, получая тем самым разные модификации логистической кривой.

3) кривая Торнквиста первого рода:

$$y_t = \frac{a_0 t}{a_1 + t}, \tag{2.5.4}$$

4) кривая Торнквиста второго рода:

$$y_t = \frac{a_0 t^2 + a_1 t}{a_2 + t}, \tag{2.5.5}$$

5) модель Джонсона:

$$y_t = a_0 e^{\frac{a_1}{a_2 - t}}. \tag{2.5.6}$$

---

[1] Семёнычев В.К. Информационные системы в экономике. Эконометрическое моделирование инноваций. Часть 1: учеб. пособие / В.К.Семёнычев, Е.В.Семёнычев. – Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2006. - С. 66.

[2] Моделі і методи соціально-економиного прогнозування: Підручник / Геэць В.М., Клебанова Т.С., Черняк О.І. и др. – Х.: ВД «ІНЖЕК», 2008. – С.160.

Поскольку и в этой модели используется показательная функция, то и для неё, меняя основания функции, можно получить разнообразные модификации, например, такую:

$$y_t = a_0 10^{\frac{a_1}{a_2 - t}}. \qquad (2.5.7)$$

6) модель Чантера:

$$y_t = \frac{1}{a_0 + a_1 e^{-a_2(1-e^{a_3 t})}}, \qquad (2.5.8)$$

7) модель Рамсея:

$$y_t = a_0(1-(1+a_1 t)e^{-a_2 t}). \qquad (2.5.9)$$

8) кривая Пирсона[1]:

$$y_t = a_0(1-a_1 t)^{-a_2}(1-a_3 t)^{-a_4}. \qquad (2.5.10)$$

Стремление прогнозиста оценить коэффициенты этих моделей, непосредственно используя критерий МНК, а именно, пытаясь найти минимум функции

$$\sum_t (y_t - \hat{y}_t)^2 \to \min, \qquad (2.5.11)$$

не приведёт к успеху, поскольку системы уравнений, которые ему удастся получить, будут сложными нелинейными. Для их решения придётся использовать численные методы.

Решить задачу нахождения оценок МНК этих моделей так, как это делается для нелинейных моделей, линейных по параметрам, приведённых в предыдущем параграфе, также не получится – большую часть из них логарифмированием или экспонированием, заменой переменных и т.п. линеаризовать не удастся.

Общее решение для этих моделей – зная наиболее характерные точки этих кривых, например, значение функции в начальной точке (*t=0*), точке перегиба и конечной точке (*t→∞)*, можно подобрать по имеющимся численным значениям показателя коэффициенты модели.

Например, для логистической кривой (2.5.2) при *t=0* выполняется следующее равенство:

$$y_0 = \frac{a_0}{1+a_1}. \qquad (2.5.12)$$

А если *t*→∞, то в силу отрицательности показателя степени экспоненты в знаменателе функции (2.5.2), знаменатель будет стремиться к единице, откуда для точки насыщения:

$$y_\infty = \frac{a_0}{1+0} = a_0. \qquad (2.5.13)$$

Типичная логистическая кривая изображена на графике рис. 2.5.1.

Для нахождения точки перегиба, необходимо вычислить вторую производную функции (2.5.2) по времени и приравнять её нулю. Впрочем, в этом нет особой необходимости, поскольку из (2.5.13) находится коэффициент

---

[1] Моделі і методи соціально-економиного прогнозування: Підручник / Геэць В.М., Клебанова Т.С., Черняк О.І. и др. – Х.: ВД «ІНЖЕК», 2008. – С. 161

a_0, подставляя его значения в (2.5.12) получают коэффициент a_1, а затем, подставляя в (2.5.2) средние значения показателя и времени, вычисляют неизвестное значение коэффициента a_2.

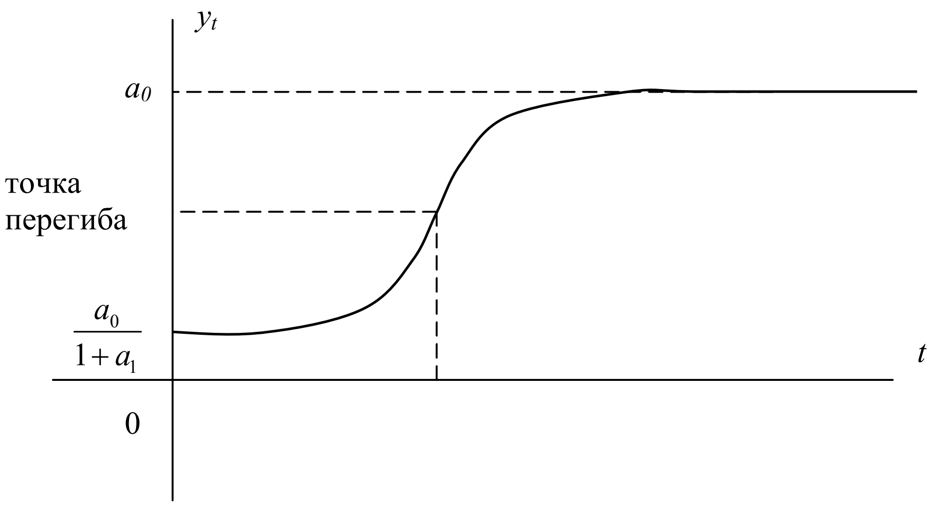

Рис. 2.5.1. График логистической функции (2.5.2)

Очевидно, что такой способ оценки параметров будет весьма не точным, поскольку используется только три значения из выборочного множества показателей y_t, а поэтому влияние случайной ошибки на значение каждого из коэффициентов будет существенным.

Поэтому в прогнозной практике по возможности используют другой, более эффективный способ оценивания коэффициентов логистической кривой. Суть его продемонстрируем на примере наиболее популярной логистической кривой (2.5.2). Для этого возьмём функции, обратные левой и правой части логистический функции. Получим:

$$\frac{1}{y_t} = \frac{1+a_1 e^{-a_2 t}}{a_0}. \qquad (2.5.14)$$

Или:

$$\frac{a_0}{y_t} == 1+a_1 e^{-a_2 t} \qquad (2.5.15)$$

Полученная форма записи даёт возможность более точного определения оценок коэффициентов логистической модели с использованием МНК. Она заключается в следующем. Поскольку из (2.5.13) следует, что коэффициент a_0 характеризует предел насыщения логистической функции, он может быть с некоторой ошибкой, но всё же определён численно. Иногда этот предел определяется некоторыми социально-экономическими или технико-экономическими показателями, которые могут быть вычислены из сути моделируемых процессов как некоторый предел насыщения количественного роста. Так или иначе, задаваясь некоторым численным значением коэффициента a_0, можно преобразовать (2.5.15) в следующую форму:

$$\frac{a_0}{y_t} - 1 = a_1 e^{-a_2 t}, \qquad (2.5.16)$$

откуда, заменив $\frac{a_0}{y_t} - 1 = z_t$, получим:

$$\ln z_t = \ln a_1 - a_2 t \qquad (2.5.17)$$

То есть, получена линеаризованная модель, коэффициенты которой легко могут быть найдены с помощью МНК. После чего легко найти искомые коэффициенты a_1 и a_2 исходной логистической модели. Конечно, такая оценка коэффициентов более точна, нежели простой подбор параметров. В то же время видно, что от верной оценки коэффициента a_0 зависит и точность всей модели, поскольку её оставшиеся коэффициенты вычисляются, исходя из знания a_0.

Современные программные продукты позволяют довольно быстро с помощью численных методов найти коэффициенты всех этих и иных нелинейных по параметрам моделей. Например, в MS Excel для этого можно воспользоваться встроенной функцией «поиск решения», задав критерий минимума суммы квадратов отклонений.