НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

С.Г. СВЕТУНЬКОВ

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ: КОМПЛЕКСНОЗНАЧНЫЙ ПОДХОД

«Издательство «Левша. Санкт-Петербург»

Санкт-Петербург, 2015

УДК
ББК

**Светуньков С.Г. Моделирование экономической динамики: комплекснозначный подход**. – СПб.: «Издательство «Левша. Санкт-Петербург», 2015. – 136 с.

*Рецензент: д.э.н., проф. Е.Л.Торопцев*

Одним из разделов экономико-математического моделирования является раздел, посвящённый моделированию экономической динамики больших систем. В основе моделей этого раздела лежит система уравнений и неравенств, описывающих замкнутый производственный цикл – от формирования основных производственных ресурсов до их пополнения в следующем производственном цикле за счёт распределения результатов производства на возобновление и прирост ресурсов. Такая замкнутая система уравнений и неравенств отражает основные взаимосвязи реальных экономических производственных систем, а потому может использоваться в разнообразных экономических экспериментах. С их помощью удаётся определить результаты регулирующих воздействий на экономику, оценить значимость различных мер государственного регулирования – от изменений в налоговой системе до различных мер протекционистского характера.

В данной монографии представляется принципиально новая модель экономической динамики, основанная на принципах комплекснозначной экономики. Использование моделей комплексных переменных позволяет описать такие экономические процессы и взаимосвязи, которые либо сложно, либо вообще невозможно описать с помощью моделей действительных переменных.

Материалы, изложенные в данной монографии, являются результатами исследования, выполненного при финансовой поддержке РФФИ, грант № 13-06-00316 «Комплекснозначный анализ эффективности развития минерально-сырьевого комплекса России».

ISBN



# Введение

Экономика представляет собой сложную систему взаимосвязей объектов и взаимоотношений. Для того чтобы понять её, и принимать правильные экономические решения, приходится прибегать к методу научного абстрагирования и моделирования. Важнейшим инструментом моделирования экономики выступает её математическое моделирование.

Сегодня математическое моделирование используется в разнообразных приложениях экономики, в числе важнейших из них выступает раздел, получивший обобщённое название «моделирование экономической динамики». Началу исследований в этом направлении положило тщательное изучение свойств мультипликативной производственной функции с двумя ресурсами – трудом и капиталам, которое провели в 1928 году Чарльз Кобб и Пол Дуглас. В дальнейшем под влиянием идей Дж.М.Кейнса экономисты стали изучать экономическую динамику не столько как результат производства, сколько как результат распределения произведённого продукта. И после того, как Р.Солоу объединил модели производства и модели распределения в одну систему уравнений, и возник понастоящему раздел экономико-математического моделирования, называемый сегодня «моделированием экономической динамики».

Сегодня этот раздел включает в себя большое множество разнообразных моделей, учитывающих различные аспекты реальных экономических взаимосвязей. Тем не менее, не смотря на многолетние изыскания учёных и определённые успехи, сам раздел всё ещё не приводит к удовлетворительным результатам, если использовать их в реальной практике. Модели зачастую очень хорошо описывают прошлую динамику, но при этом не очень хорошо описывают будущее. Поэтому описываемые с их помощью траектории используются скорее как некоторые возможные направления экономической динамики, но не как реальные траектории, которым следует реальная экономика.

Бесспорным преимуществом этих моделей по сравнению с другими типами моделей, так или иначе описывающих динамику экономических систем, является возможность использования их в модельных экспериментах, когда задавая те или иные параметры, характеризующие регулирующие воздействия на экономическую систему, удаётся оценить их влияние на характер экономического роста. Например, с их помощью можно определить влияние на экономическую динамику различного рода налогов и таможенных сборов; условий, стимулирующих распределение прибыли организаций на накопление или на потребление и др.

Новые возможности для экономико-математического моделирования экономической динамики представляют модели и методы теории функций комплексной переменной, чьё применение для решения различных экономических задач уже показало свою результативность.

С 2013 по 2015 год группа учёных выполняла научное исследование при финансовой поддержке РФФИ, грант № 13-06-00316 «Комплекснозначный анализ эффективности развития минерально-сырьевого комплекса России». Началось это исследование в стенах Национального минерально-сырьевого университета «Горный», а завершено было в стенах Национального научно-исследовательского университета «Высшая школа экономики» Санкт-Петербург. В рамках этого исследования была выполнена и работа по построению комплекснозначной модели экономической динамики и изучению её основных свойств. Результаты этой части исследования и легли в основу данной научной монографии.

Следует отметить, что в той или иной степени в работе над этой частью исследования принимали участие к.э.н. А.Ф.Чанышева и Чанцалмаа Бавуу, но особенно стоит отметить вклад А.И.Филиппова и Е.А.Прытковой. Совместно с А.И.Филипповым написан параграф 11 данной монографии, а параграф 12 написан совместно с Е.А.Прытковой.

Хочу поблагодарить своего давнего друга профессора Е.Л.Торопцева, который выразил готовность выступить рецензентом данной монографии и сделал это наилучшим образом.



# 1. Модель экономической динамики Солоу и варианты её развития

Р.Солоу опубликовал в 1956 году статью, в которой сформулировал базовую модель экономической динамики. Он, в основном опираясь на идею Харрода о взаимосвязи между производством и потреблением на макроуровне, в качестве основного недостатка существующей модели указывал именно то, что «имеется возможность замены труда капиталом в производстве» [7, с. 66], а модель Харрода этого не учитывает. Производственная функция в модели Харрода понимается как отдача производственных фондов $K_t$ с нормативным коэффициентом фондоотдачи $b$, а трудовые ресурсы вовсе не учитываются при вычислении результатов производства. Поэтому вместо элементарного равенства, описывающего производство через фондоотдачу, он предложил использовать более сложную производственную функцию с двумя производственными ресурсами – капиталом и трудом:

$$Y = F(K, L), \tag{1.1}$$

поскольку в результате этого она становится «более Рикардианской» [7, с. 67].

Продолжая придерживаться идеи Кейнса о распределении дохода на потребление и накопление, Солоу предположил, что чистые инвестиции представляют собой просто скорость увеличения капитала $\dot{K} = \dfrac{dK}{dt}$, а потому имеется основное тождество:

$$\dot{K} = sY, \tag{1.2}$$

где $s$ характеризует склонность к накоплению, $0 \le s \le 1$.

Подставляя (1.1) в (1.2), можно получить равенство:

$$\dot{K} = sF(K, L). \tag{1.3}$$

Как видно, получено уравнение с двумя неизвестными. Если предположить, что в результате экзогенного роста населения рабочая сила увеличивается с постоянной относительной скоростью $n$, то труд можно записать так:

$$L(t) = L_0 e^{\eta t}. \tag{1.4}$$

Тогда (1.3) упростится до вида:

$$\dot{K} = sF(K, L_0 e^{\eta t}). \qquad (1.5)$$

Используя эту функцию в виде дифференциального уравнения одной переменной, Солоу рассмотрел разные варианты экономического роста.

Ключевым в этой модели, конечно же, является вид производственной функции. Сам Солоу рассматривал три вида производственной функции:

Производственная функция Леонтьева.

Производственная функция Кобба-Дугласа с постоянной отдачей от масштаба.

Производственная функция с постоянной эластичностью замены.

Последующие интерпретаторы предложений Р.Солоу рассматривают только один из предложенных им вариантов модели, а именно – вариант использования производственной функции Кобба-Дугласа. Рассмотрим этот вариант модели Солоу, который и принято отождествлять с его именем.

Производственная функция Кобба-Дугласа меняется в дискретном времени $t$:

$$Y_t = aK_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}, \quad 0 \le \alpha \le 1. \qquad (1.6)$$

Распределение дохода $Y_t$ производится на валовые инвестиции $I_t$ и потребление $C_t$:

$$Y_t = I_t + C_t. \qquad (1.7)$$

Предполагается, что та часть дохода, которая идёт на инвестиции, задаётся в виде нормы накопления $\rho$:

$$I_t = \rho Y_t. \qquad (1.8)$$

Инвестиции, очевидно, способствуют приросту основных производственных фондов будущего года $K_{t+1}$ и выражаются через устаревшие фонды $K_t$ с учётом доли выбывших за год основных производственных фондов $\mu$:

$$K_{t+1} = (1-\mu)K_t + I_t. \qquad (1.9)$$

Число занятых в экономике $L_{t+1}$ удобнее определять через число занятых в текущем году $L_t$ с учётом годового темпа прироста числа занятых $\nu$:

$$L_{t+1} = (1+\nu)L_t. \qquad (1.10)$$



Сравнивая этот вид записи роста числа занятых с тем, что использовал Р. Солоу (1.4), получим:

$$(1+\nu)^n = e^n. \qquad (1.11)$$

Систему уравнений (1.6) – (1.10) в настоящее время и называют моделью Солоу.

Такой вид записи позволяет проводить расчёты всех показателей в динамике, ведь получив значение капитала и численности занятых в будущем году, можно вновь рассчитать доход, инвестиции и т.п. для следующего за ним года и вновь повторить вычисления.

Задавая различные значения констант, можно получить те или иные траектории развития. Можно поступать и наоборот – по имеющимся статистическим данным рассчитать значения констант и сделать выводы о том, какой характер имеет та или иная экономическая динамика. Модель Солоу является динамической, её сложность зависит от вида производственной функции и того, какие значения принимают константы $\nu$, $\mu$ и $\rho$.

Обратим внимание на следующие *недостатки* модели Солоу:

В основе уравнения, описывающего рост труда, лежит нелинейная модель (1.11), которая моделирует взрывной процесс роста числа занятых. Очевидно, что такие тенденции на практике не наблюдаются, поэтому и прогнозы по модели Солоу будут неточными.

В основе роста капитала так же лежит авторегрессия первого порядка, моделирующая нелинейную динамику, но поскольку коэффициент авторегрессии всегда меньше 1, моделируется уменьшение роста.

В модели Солоу предполагается замкнутость экономики – в ней нет экспорта и импорта. Это ещё один серьёзный источник ошибок.

В основе модели лежит производственная функция Кобба-Дугласа с постоянной отдачей от масштаба, которая сама по себе не универсальна: для каждого конкретного случая все-таки должна использоваться своя функция и не обязательно с ограничениями на показатели степени, которые налагает на них функция Кобба-Дугласа.

В модели так же предполагается постоянство всех коэффициентов, т.е. экономика в этой модели «экономической динамики» находится в «замороженном состоянии».

Конечно, обычно модель в первую очередь используется для получения рекомендаций относительно того, каких показателей стоит держаться для получения желаемой траектории, однако эти серьёзные недостатки приводят к сильному искажению любых получаемых результатов.

Модель Солоу представляет собой замкнутую модель с обратной связью. Извне задаются только начальные значения трудовых $L_0$ и капитальных $K_0$ ресурсов, а так же инвестиций $I_0$. Заранее определяются и все константы – $\mu$, $v$, $\rho$, $\alpha$ и $A$. Модель может быть рассчитана в динамике до некоторого заданного $T$. Коэффициентами, задающими характер моделируемой динамики, выступают параметры ПФ Кобба-Дугласа, а также норма накопления $\rho$, доля выбывших за год основных производственных фондов $\mu$ и годовой темп прироста числа занятых $v$.

Устранение указанных недостатков повышает аппроксимирующую точность модели Солоу. Она впервые позволила экономистам промоделировать экономику в целом, представить её как саморазвивающуюся систему, параметрами которой можно манипулировать (константы модели). На основе модели Солоу были предложены многочисленные модели экономической динамики, которые и сегодня дополняются и развиваются. В базовую модель вносятся уточняющие коэффициенты, новые переменные, уравнениям придаётся иной вид и т.п. При желании в качестве дополняющих модель Солоу элементов к ней можно подключать различные блоки – налоговой системы, кредитной системы, инновационных процессов и др. С этих позиций модель Солоу оказала решающее влияние на рост числа и разновидностей моделей экономической динамики.

В отличие от множества регрессионных моделей (в том числе и многофакторных) модель Солоу и её многочисленные модификации позволяют осуществить многовариантные прогнозы, т.е. получить удовлетворительные ответы на вопросы о том, как может развиваться социально-экономическая система, если в ней изменятся её отдельные характеристики. Например, можно определить траекторию развития экономики, если изменятся «склонность к потреблению» или же процесс роста трудовых ресурсов и т.п.

Покажем возможности модели Солоу на примере экономики Великобритании.



Табл. 1.1.

Статистические данные об экономике Великобритании[1]

| Год | Валовой национальный располагаемый доход $Y_t$, млн.ф.ст. | Фактическое конечное потребление $C_t$, млн.ф.ст. | Валовые сбережения $I_t$, млн.ф.ст. | Капитал $K_t$, млн.ф.ст.* | Количество занятых в экономике $L_t$, тыс.чел. |
|---|---|---|---|---|---|
| 1991 | 591966 | 499761 | 92199 | 2830115 | 28260 |
| 1992 | 615772 | 526784 | 88982 | 2887131 | 27630 |
| 1993 | 646627 | 554791 | 91837 | 2963986 | 27422 |
| 1994 | 689148 | 580508 | 108643 | 3047664 | 27638 |
| 1995 | 725059 | 608369 | 116692 | 3135036 | 27910 |
| 1996 | 774818 | 649179 | 125641 | 3283962 | 28168 |
| 1997 | 824812 | 682144 | 142670 | 3347802 | 28660 |
| 1998 | 882775 | 724274 | 158503 | 3480794 | 28936 |
| 1999 | 920508 | 774147 | 146363 | 3711077 | 29348 |
| 2000 | 968466 | 821912 | 146558 | 3913115 | 29724 |
| 2001 | 1024528 | 867090 | 157443 | 4072979 | 30058 |
| 2002 | 1084998 | 919627 | 165372 | 4288172 | 30265 |

* Величина основного капитала вычислена нами через показатели валового накопления основного капитала и потребление основного капитала.

При построении по данным таблицы 1.1 степенной производственной функции откажемся от ограничений на показатели степени за исключением одного требования – их положительности. Тогда эта модель имеет вид:

$$Y_t = 1{,}1163 K_t^{0{,}9787} L_t^{1{,}6077}, \tag{1.12}$$

Накопление с учётом соответствующей нормы $\rho$, будет моделироваться так:

$$I_t = 0{,}1577 Y_t. \tag{1.13}$$

Прирост основных производственных фондов будущего года $K_{t+1}$ выражается через устаревшие фонды $K_t$ с учётом доли выбывших за год основных производственных фондов $\mu$:

$$K_{t+1} = (1 - 0{,}0267) K_t + I_t. \tag{1.14}$$

Число занятых в экономике $L_{t+1}$ определяется через число занятых в текущем году $L_t$ с учётом годового темпа прироста числа занятых $v$:

[1] http://data.un.org/

$$L_{t+1} = (1 + 0,0067)L_t . \qquad (1.15)$$

Теперь модель типа Солоу можно использовать для моделирования и прогнозирования экономического роста экономики Великобритании. В таблице 1.2 приведены расчёты по этой модели с 2003 по 2010 год и фактические данные.

Табл. 1.2.

Развитие экономики Великобритании и её описание моделью типа Солу

| *Год* | $Y_t$ | $\hat{Y}_t$ | $I_t$ | $\hat{I}_t$ | $C_t$ | $\hat{C}_t$ | $K_t$ | $\hat{K}_t$ | $L_t$ | $\hat{L}_t$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2003 | 1147371 | 1209096 | 172584 | 190631 | 974791 | 1018465 | 4348548 | 4637297 | 30593 | 30467 |
| 2004 | 1211130 | 1239402 | 180392 | 195409 | 1029732 | 1043992 | 4411629 | 4704305 | 30913 | 30671 |
| 2005 | 1264273 | 1270994 | 181082 | 200390 | 1083246 | 1070604 | 4477524 | 4774304 | 31326 | 30876 |
| 2006 | 1326220 | 1303938 | 189531 | 205584 | 1136698 | 1098353 | 4546351 | 4847419 | 31662 | 31083 |
| 2007 | 1413583 | 1338300 | 221900 | 211002 | 1191720 | 1127298 | 4618232 | 4923778 | 31890 | 31291 |
| 2008 | 1453240 | 1374154 | 223885 | 216655 | 1229357 | 1157499 | 4693296 | 5003519 | 31993 | 31500 |
| 2009 | 1399127 | 1411576 | 177720 | 222555 | 1221454 | 1189021 | 4771679 | 5086788 | 31434 | 31711 |
| 2010 | 1451897 | 1450646 | 172497 | 228715 | 1279409 | 1221931 | 4853527 | 5173736 | 31213 | 31923 |

Как видно, в среднем модель типа Солоу, коэффициенты которой были оценены на статистических данных Великобритании за период с 1991 по 2002 год, показала удовлетворительную точность описания развития экономики этой страны в последующие восемь лет. Валовой национальный располагаемый доход $Y_t$ за эти годы моделируется со средней абсолютной ошибкой аппроксимации, равной 2,7%; фактическое конечное потребление $C_t$ – с ошибкой в 3,6%; валовые сбережения $I_t$ – с ошибкой 13%; капитал $K_t$ – с ошибкой в 6,6%, а труд $L_t$ – с ошибкой в 1,4%.

Но при этом следует обратить внимание на то, что мы отказались от ограничений на показатели степени производственной функции, что повысило аппроксимационные свойства модели в целом. Производственная функция Кобба-Дугласа, коэффициенты которой найдены по имеющимся статистическим данным, имеет вид:

$$Y_t = 1,05 K_t^{0,15} L_t^{0,85} \qquad (1.16)$$

И её подстановка в модель типа Солоу (1.12) – (1.15) существенно ухудшает точность модели – наименьшая ошибка аппроксимации показателей экономики Великобритании становится равной 11%.



Из этого следует вывод о том, что, уточняя и развивая отдельные составляющие модели экономической динамики типа Солоу, мы можем добиться ещё большей точности в описании экономических процессов. И в этом направлении развитии моделей экономической динамики принципиально важную роль играют производственные функции.

## 2. Основы комплекснозначной экономики

Задачи принятия решений, которые непрерывно возникают в процессе управления экономикой на любом уровне иерархии управления – от рабочего места и производственного участка до мировой экономики, требуют обработки значительных массивов информации для информационного обеспечения процесса принятия решений. И если на нижнем уровне иерархии принятия решений – рабочем месте, – чаще всего можно обойтись интуитивными экспертными оценками, поскольку задача принятия решений тривиальна, а количество и состав обрабатываемой информации касающейся ситуации представляются элементарными, то с увеличением уровня иерархии задача становится всё более и более сложной. Здесь уже невозможно обойтись без использования математических методов, разнообразие и сложность которых возрастает с ростом сложности самой задачи, изменяющейся при переходе ко всё более высокому уровню управления экономикой.

Сегодня арсенал математических методов и моделей, используемых в экономике, весьма обширен. Но это разнообразие отнюдь не гарантирует успешного решения задач управления, напротив, можно привести, по крайней мере, десятки направлений экономико-математического моделирования, когда модели действительных переменных, упираясь в естественные рамки своих возможностей, описывают экономику весьма посредственно. В этих условиях экономисты либо полностью отказываются от применения математических методов, либо переводят экономико-математические модели из области решения практических задач в область теории условных объектов, имеющих мало общего с реальной экономикой. В этом случае учёные вынуждены вводить ограничения и предположения, которые преобразуют эти модели из множества абстрагированных образов в множество образов идеализированных, обладающих свойствами, которые ни один реальный экономический объект не имеет.

Ограниченность экономико-математических моделей действительных переменных очевидна. Попытки развить их за счёт включения в модели новых переменных или усложнения вычислительного аппарата посредством всё более производительной вычислительной техники, – важное направление совершенствования экономико-математического моделирования, отрицать которое ни в коем случае не стоит. Но сегодня уже ощутима потребность в использовании иных принципов экономико-математического моделирования, и такие принципы представляются теорией функций комплексного переменного (ТФКП).

Следует отметить, что экономисты давно сталкивались с ситуациями, когда в ходе построения и реализации некоторых моделей им приходилось вычислять мнимые корни. Наиболее смелые из них исследовали поведение таких моделей комплексной переменной, как одно из интересных явлений в моделировании экономики, но и только. Практических рекомендаций и предложений по широкому использованию комплексной переменной из таких построений не следовало. Вот, например, В.А.Колемаев при рассмотрении однономенклатурной системы управления запасами как колебательным звеном предлагает решать дифференциальные уравнения [1, с. 27–29], корни которых являются комплексными и сопряжёнными, модель в результате этого становится колебательной, но и только. Комплексные числа в этом примере скорее выступают как демонстрация возможностей математических методов, но не как инструмент моделирования экономики.

В экономической литературе известны попытки использования в моделировании экономики преобразования Лапласа, когда для моделирования сложных процессов, описываемых моделями действительных переменных, прибегают к их трансформации в модели комплексной переменной, работать с которыми оказалось проще. Решив задачу в области комплексных переменных, осуществляется обратное преобразование в область действительных переменных. И.З. Мустаев, например, применяет преобразование Лапласа к моделированию чистой приведённой стоимости денежного потока. В итоге получается комплексная переменная, действительная часть которой, по мнению автора, имеет экономический смысл среднерыночной доходности в пересчёте на один год, а мнимая – смысл частоты экономических процессов [3, с. 91 – 93].



*Z*-преобразования Лорана применительно к задаче прогнозирования социально-экономической динамики как модификацию дискретного преобразования Лапласа, предлагают В.К.Семёнычев и Е.В.Семёнычев [6, с. 101]. В этом случае модель нелинейного тренда преобразуется с помощью *z*-преобразования в модель комплексной переменной, с помощью чего достигается перепараметризация исходной модели, что облегчает задачу оценки коэффициентов исходного нелинейного тренда. Здесь аппарат ТФКП используется как инструмент, поддержки использования в экономике моделей действительных переменных.

Встречаются и иные отдельные примеры использования комплексных переменных для моделирования частных экономических задач. Но представление экономики как объекта для моделирования с помощью методов ТФКП ни в одной из этих работ не осуществляется.

Здесь следует отметить, что в естественно-научных и инженерно-технических науках без комплексных переменных сегодня вообще немыслимо что-либо рассчитать. Задачи гидродинамики и газовой динамики, теория упругости, расчёт электрических контуров и электрических переходных процессов, физика микро- и макромира, авиастроение, самолётостроение и многие, многие другие разделы современной науки используют комплексные переменные как основной математический инструмент моделирования. А в экономике его нет.

Примерно сотню лет назад учёные начали использовать теорию функций комплексных переменных для описания неравномерных полей, для моделирования сложных потоков, для описания вращающихся полей и стали получать модели комплексных переменных, которые значительно проще описывают сложные объекты и явления, нежели модели действительных переменных. Теория функций комплексного переменного дала учёным удобный инструмент моделирования сложных объектов, но экономисты до сих пор игнорируют мощь и богатство инструментария этой теории.

Вызвано это, в первую очередь, привычкой использования ряда общенаучных методов и принципов исследования, таких как метода аналогии и принципа простоты.

Принцип простоты учит использовать простые модели, если нет необходимости использовать более сложные; а метод аналогии упорно ведёт учёных, задумывающихся над самой возможностью использования теории функции комплексного переменного (ТФКП) в экономике, к поиску вращающихся полей и экономическому смыслу действительной и мнимой составляющих комплексной переменной.

Учёные, занимающиеся экономико-математическим моделированием, проходят мимо очевидного факта – комплексная переменная сама по себе может рассматриваться как модель, модель, которая характеризует свойства объекта более комплексно, поскольку состоит из двух действительных переменных, а не из одной, как это характерно для моделей действительных переменных.

Когда мы в экономике рассматриваем такой экономический показатель, как, например, валовая прибыль *G*, то мы понимаем, что он представляет нам возможность оценить только одну сторону сложного экономического явления – результаты производственного процесса. Не случайно, когда возникает ситуация принятия решений, никто не довольствуется только критерием максимума валовой прибыли, для осмысления ситуации и принятия правильного решения изучают дополнительные показатели результатов производства. В реальной экономике в качестве не менее важного экономического показателя рассматривают показатели затрат на производство продукции, или, как чаще выражались в прежние годы – издержки производства *C*. А потом, соотнеся валовую прибыль с издержками производства, вычисляют, например, рентабельность. Поскольку именно рентабельность является тем экономическим показателем, который отражает и затраты, и результаты, то есть, является показателем экономической эффективности производства, его используют как ещё один дополнительный показатель для принятия экономического решения.

В реальной экономической практике, описывая с помощью моделей действительных переменных некоторый производственный процесс, для принятия решения учёные вынуждены моделировать и валовую прибыль, и издержки производства. Поскольку построе-



ние двух моделей не очень удобно и более затратно, строят одну модель, складывая валовую прибыль с издержками, в результате чего получают валовой выпуск. Именно валовой выпуск и рассматривается в экономико-математическом моделировании как основной производственный результат.

Желание одновременного моделирования двух экономических переменных – валовой прибыли и издержек производства легко удовлетворяется, если рассматривать производственный результат как комплексное число. Это комплексное число в таком случае само по себе выступает как модель, отражающая результаты производства. Для рассматриваемого случая она может быть представлена в таком виде:

$$Z = G + iC\,. \qquad (2.1)$$

Здесь $i$ – мнимая единица, относительно которой известно, что она обладает свойством $i^2=-1$.

Рассматривая и моделируя новое число *Z*, мы тем самым одновременно учитываем и валовую прибыль *G*, и издержки производства *C*, поскольку они являются неотъемлемыми характеристиками комплексного числа. То есть, выполняя действия с какой-либо одной комплексной переменной, исследователь выполняет тем самым действие с двумя действительными переменными. Следовательно, использование комплексной переменной типа (2.1) как некоторой модели, связывающей воедино две экономические переменные, позволяет получить значительно более компактную запись, с одной стороны, и включить в экономико-математическую модель более подробную информацию о моделируемом объекте, с другой стороны, и рассматривать их во взаимосвязи – с третьей стороны.

Но если бы только на этом заканчивались новшества, вводимые в экономико-математическое моделирование применением комплексных переменных, то, может быть, этого делать и не стоило. Моделируемые с помощью комплексных переменных экономические показатели и процессы значительно более обширны, чем это кажется на первый взгляд. Действительно, если просто просуммировать вещественную и мнимую части переменной (2.1), то можно получить известный показатель – валовую выручку:

$$Q = G + C\,, \qquad (2.2)$$

а если найти отношение действительной части к мнимой, то получим арккотангенс полярного угла комплексного числа (2.1) и… рентабельность по себестоимости:

$$r = \frac{G}{C}\ . \qquad (2.3)$$

То есть, моделируя поведение только одной комплексной переменной, исследователь тем самым получает возможность изучать характер изменения не только двух исходных переменных, но и ряда дополнительных показателей, являющихся производными от них. В рассматриваемом случае – получается моделирование сразу четырёх важных экономических показателей.

Но и это ещё не всё! Комплексное число может быть представимо не только в арифметической форме, но и в экспоненциальной и тригонометрической. А для этого, рассматривая комплексное число на комплексной плоскости, его представляют в полярных координатах. Оно характеризуется модулем и полярным углом. Модуль комплексного числа (2.1), определяемый как

$$R = \sqrt{G^2 + C^2}\ , \qquad (2.4)$$

не имеет аналогов в системе технико-экономического анализа, и переставляет собой новый экономический показатель, отражающий масштаб производства. Его использование на практике может расширить диагностический аппарат, например, такого раздела экономики, как анализ хозяйственной деятельности. Отношение валовой выручки $Q$ к масштабу $R$ также может дать дополнительную характеристику производства, свойства которой могут быть полезны при осуществлении экономического анализа. Такие примеры можно продолжать и продолжать. В каждом случае применения моделей комплексных переменных возникают всё новые и новые возможности для более подробного, более детального моделирования экономики.

Таким образом, даже простое представление экономических показателей и факторов в форме комплексного числа (2.1) уже даёт много новых возможностей для исследователя и экономико-математического моделирования. Но математические действия с комплексными числами дают результат, нетривиальный для действий с вещественными числами. Именно поэтому в математике



существует раздел под названием «Теория функций комплексного переменного». Используя этот новый для экономики математический аппарат, тем самым расширяется инструментальная база моделирования экономики, поскольку модели комплексных переменных иначе описывают взаимосвязь между переменными, нежели модели действительных переменных. Зачастую происходит так, что очень сложные взаимосвязи между действительными переменными проще описать с помощью моделей и методов ТФКП, нежели с помощью моделей действительных переменных.

Конечно, как следует из разделов теории функций комплексного переменного, любая комплекснозначная функция в итоге может быть представлена как система двух функций действительных переменных, но эти функции действительных переменных чаще всего оказываются столь сложными, что их на практике и не применяют – простые модели комплексных переменных имеют очень сложные аналоги в области действительных переменных. В соответствующих разделах этой монографии такие примеры будут приводиться.

Комплексное число, как следует из его математической записи (2.1), представляет собой точку не на оси, а на комплексной плоскости. Выполняя какие-либо математические действия с двумя действительными переменными, выполняются математические операции только с этими двумя переменными, а, выполняя аналогичные действия с двумя комплексными числами, например, умножая одно комплексное число на другое комплексное число, тем самым одновременно выполняется математическая операция сразу с четырьмя действительными числами.

Сразу следует оговориться, что вышесказанное вовсе не означает, что математические действия с комплексными переменными лучше, чем такие же действия с действительными переменными, а модели комплексных переменных лучше, чем модели действительных переменных. Нет! Всё вышесказанное следует трактовать только так – математические действия с комплексными экономическими переменными дают *другие* результаты, а математические модели комплексных экономических переменных моделируют *другие* экономические процессы. В некоторых случаях модели комплексных переменных будут лучше описывать экономические процессы, чем модели действительных переменных, а в некоторых – хуже.

Но именно представление пары экономических показателей в форме комплексного числа, как это сделано в случае производственного результата (2.1), открывает перед экономистами возможность использования в целях моделирования экономики теорию функций комплексного переменного. В этой теории функции, переменными которых выступают комплексные числа, получили названия «комплекснозначных». Исходя из этого общего определения, и было предложено этот раздел экономико-математического моделирования называть «комплекснозначной экономикой».

## 3. Аксиоматическое ядро теории комплекснозначной экономики

Любая теория базируется на некоторых исходных положениях, принимаемых без доказательства. Первая группа таких исходных положений является аксиомами, которые, как известно, принимаются без доказательства в силу их очевидности. Вторая группа представляет собой постулаты, которые являются выводами, полученными в других разделах науки и поэтому принимаемые без доказательства, поскольку это уже сделано ранее другими исследователями.

В теории комплекснозначной экономики будем постулировать положения теории функций комплексной переменной, приводя её основные рекомендации и выводы без доказательства, поскольку каждый сомневающийся в них всегда может обратиться к имеющимся в изобилии учебным и научным работам по этому разделу математики.

Постулироваться также будут основные выводы теоретической экономики или прикладных разделов экономики. Нам незачем доказывать, например, наличие взаимосвязи между сдельным заработком рабочего и производительностью его труда – это сделано в разделе экономической науки, который относится к сфере управления трудом.

Приведём те положения, которые сегодня кажутся очевидными и не требуют в силу этого доказательства, то есть, являются аксиоматичными, и без опоры на которые комплекснозначная экономика, как теоретическое построение существовать не может.



Первое аксиоматическое положение заключается в том, что практически все экономические показатели, по которым экономист судит об экономике, представляют собой некоторые обобщённые или агрегированные величины, которые могут быть легко представимы в виде суммы двух слагаемых, которые с определённой степенью уверенности можно назвать как «активная часть» и «пассивная часть». В основе такого представления лежат многочисленные классификации, принятые в экономике.

Например, трудовые ресурсы любого предприятия можно, в соответствии с приведённым признаком классификации, разделить на активную часть (промышленно-производственный персонал) и пассивную часть (не производственный персонал). Или расходы любой семьи можно разделить на активную часть, связанную с непосредственным удовлетворением имеющихся потребностей, и пассивную часть, связанную с удовлетворением будущих потребностей. То же самое можно сказать и про разделение конечного продукта любой страны, который можно представить в виде двух составляющих – потребления (активная часть) и накопления (пассивная часть).

А поскольку активная и пассивная части некоторого показателя или фактора оказывают различное влияние на другие экономические показатели, то их общее влияние вполне логично представить в виде комплексной переменной, к действительной части которой мы договоримся относить активную составляющую, а пассивную отнесём к мнимой части комплексной переменной.

Как уже упоминалось ранее, в электроэнергетике, например, при моделировании переменного тока, к действительной части комплексной переменной относят активную часть, а к мнимой – реактивную. Переменные токи возникают в ситуации вращающегося электромагнитного поля, которое наводит в проводнике переменные – электрический ток, напряжение, мощность и энергию. Передача электроэнергии по некоторым цепям встречает активное и реактивное сопротивление. Казалось бы – вот оно смысловое содержание действительной и мнимой частей комплексной переменной. Но на самом деле отнесение активной части электроэнергетических показателей к действительной части комплексной переменной, также как отнесение реактивных составляющих к мнимой части условно – с таким же успехом их можно поменять местами, а именно – активную мощность отнести к мнимой части, а реактивную – к действительной. Да и сами понятия «активная часть» и «реактивная часть» являются некоторым правилом, предварительной договорённостью между учёными. Если, например, активный ток отнести к мнимой части комплексной переменной, а его реактивную составляющую – к действительной части, то есть сделать всё наоборот, нежели это принято в электроэнергетике в настоящее время, то вид применяемых математических моделей несколько изменится, а процесс вычислений и, самое главное, их результаты – нисколько не изменятся. Просто при первом использовании теории функций комплексных переменных в электроэнергетике учёные договорились о том – что и к какой части они отнесут, и с этим *ПРАВИЛОМ* все согласились и сегодня уже такая интерпретация ни у кого не вызывает сомнений.

Вот и мы в теории комплекснозначной экономики сразу же договоримся о том, что в комплекснозначной экономике будет действовать *ПРАВИЛО*, в соответствии с которым активную часть экономического показателя будем относить к действительной части комплексной переменной, а пассивную часть – к мнимой.

Теперь следует сказать о нескольких важных условиях, ограничивающих область применения комплексных чисел в экономике. Для того чтобы использовать аппарат теории функций комплексных переменных в экономике, при объединении двух экономических показателей в одну комплексную переменную, должны выполняться следующие очевидные условия, определяемые особенностями комплексных чисел:

1. Эти показатели должны быть двумя характеристиками одного и того же процесса или явления, то есть – отражать разные стороны этого явления;

2. Они при этом должны ещё иметь и одинаковую размерность или быть безразмерными. К тому же, у них должен быть одинаковый масштаб.

Почему необходимо учитывать первое условие, ведь по правилам, действительная и мнимая части являются независимыми (ортогональными) друг от друга? Необходимо ли их рассматривать как «две стороны одной медали»? Да необходимо. И необходимо



это потому, что в итоге формирования комплексной переменной из двух действительных переменных, она в дальнейшем рассматривается как самостоятельная единая переменная. Она, образно выражаясь, несёт в себе информацию о двух составляющих её величинах и отражает влияние каждой из своих составляющих на некоторый результат. Эти величины должны отражать разные стороны одного и того же явления, иначе их объединение в одну переменную теряет всякий смысл. Эти переменные могут находиться в тесной функциональной зависимости друг от друга, а могут быть и вовсе независимыми, но главное условие – они должны нести в себе информацию о некотором общем для них процессе. Такие характеристики комплексного числа как его модуль и аргумент имеют смысл только тогда, когда составляющие комплексного числа отражают общее содержание.

Второе условие, требующее одинаковой размерности составляющих комплексной переменной, определяется особенностью свойств комплексного числа. Действительно, как например, можно рассчитать модуль комплексного числа, если вещественная и мнимая части имеют разные размерности, например, рубли и штуки? Возвести в квадрат каждую из них и сложить не представляется никакой возможности – $руб^2$ нельзя сложить со $шт^2$. Точно также и при вычислении полярного угла необходимо найти отношение мнимой части к действительной части, а потом найти арктангенс полученного числа. Если действительная и мнимая части разноразмерные, то ничего поделать нельзя, ведь тангенс угла – величина безразмерная, она не может измеряться в *руб/шт*.

В экономике существенная часть показателей может быть приведена к денежным единицам измерения, например, затраты труда можно определить не в «человеко-часах», а в стоимости оплаты труда – величиной фонда оплаты труда на предприятии или подразделении предприятия. Поэтому это условие в большей части реальных экономических задач вполне выполнимо. Но в том случае, когда это сделать невозможно, каждый из показателей следует привести к относительным безразмерным величинам способом, который окажется наилучшим для выбранной формы модели.

Экономико-математические модели, оперирующие действительными переменными, основаны на том, что некоторый экономический показатель y представляется зависимым от другого показателя *x*. Эта зависимость может быть описана с помощью функции, когда показателю *x* ставится в соответствие один и только один показатель *y*:

$$y = f(x). \qquad (3.1)$$

Поскольку каждая из переменных функции (3.1) является совокупностью действительных чисел, графически изображаемых множеством точек на числовой оси, проходящей через нулевую точку от минус бесконечности до плюс бесконечности, а расстояние от нуля до данной точки количественно в избранном масштабе и отражает само число, то модель (3.1) выражает то обстоятельство, что каждой точке на оси действительной переменной *x* соответствует одна и только одна точка на другой оси действительной переменной *y*. Графически эти две оси можно расположить на одной плоскости в любом порядке, например, параллельно друг другу. Но наибольшую информативность представляет такое расположение этих числовых осей, когда они пересекаются друг с другом под прямым углом (перпендикулярны друг другу), а точкой их пересечения является общая на каждой из осей нулевая точка. В этом случае можно рассматривать модель (3.1) в декартовой системе координат.

Модель (3.1) можно усложнять как это заблагорассудится, добавлять в неё новые переменные и делать её многофакторной. Тогда показатель у будет зависеть от нескольких переменных, а график такой зависимости будет уже трёх-, четырёх- и вообще – многомерным, в зависимости от количества переменных.

Функция (3.1) является базовой для построения моделей в области действительных переменных, а её графическая интерпретация на плоскости декартовой системы координат выступает дополнительной характеристикой функции.

Точно так же в комплекснозначной экономике рассматривается базовая модель зависимости одной комплексной переменной от другой. Зная свойства этой зависимости, можно определить, какие именно процессы могут быть описаны с помощью неё, а также переходить к многофакторным комплекснозначным моделям и к системам комплекснозначных моделей. Правда, многофакторные комплекснозначные модели и системы комплекснозначных уравнений пока ещё не столь распространены, как их аналоги в области действительных переменных.



Сама базовая модель представляет собой функциональную зависимость одной комплексной переменной $y_r+iy_i$ от другой комплексной переменной $x_r+ix_i$:

$$y_r + iy_i = f(x_r + ix_i). \qquad (3.2)$$

В теории функций комплексных переменных такая функция называется комплекснозначной.

Поскольку любая комплексная переменная представляется графически точкой на плоскости декартовой системы координат, то равенство (3.2) означает, что одной точке на комплексной плоскости переменных *x* ставится в соответствие точка (а в некоторых случаях – несколько точек) на комплексной плоскости переменных *y*. Таким образом, любое множество точек на комплексной плоскости *x* с помощью комплекснозначной функции (3.2) отображается на комплексную плоскость *y*. Поэтому графическое изображение комплекснозначной функции принято называть конформным отображением. Такое понятие вполне устраивает нас для целей данного научного исследования, хотя, если использовать чёткое математическое определение конформного отображения, то тогда надо использовать, например, такое определение: *отображение окрестности точки $x_0$ на окрестность точки $y_0$, осуществляемое функцией (3.2), называют конформным, если в точке $x_0$ оно (отображение) обладает свойством сохранения углов между линиями и постоянством растяжений* [2, с. 123]. Это означает, что не всякое отображение точек одной комплексной плоскости на другую плоскость с помощью функции (3.2) будет конформным, а только такое, при котором кривые на первой плоскости переходят в кривые другой плоскости так, чтобы угол между касательными к этим кривым на первой плоскости соответствовал некоторому углу к касательным на второй плоскости, а бесконечно малому кругу с центром в точке $x_0$ первой плоскости соответствовал бесконечно малый круг второй комплексной плоскости с центром в точке $y_0$.

Если каждой точке на комплексной плоскости *x* с помощью комплекснозначной функции (3.2) ставится в соответствие одна и только одна точка на комплексной плоскости *y*, то такое конформное отображение называется однолистным. Но в теории функций комплексного переменного часто встречаются случаи, когда каждой точке комплексной плоскости *x* с помощью комплекснозначной функции (3.2) ставится в соответствие несколько точек на комплексной плоскости *y*. Функция такая, как уже говорилось, называется многозначной, а графическое изображение конформного отображения называется многолистным.

Базовую модель (3.1), в соответствии со свойствами комплексных чисел, можно представить как систему двух равенств действительных переменных:

$$\begin{cases} y_r = f_r(x_r; x_i) \\ y_i = f_i(x_r; x_i) \end{cases} . \qquad (3.3)$$

Например, простейшая линейная комплекснозначная функция

$$y_r + iy_i = (a_0 + ia_1)(x_r + ix_i) \qquad (3.4)$$

может быть представлена в виде системы двух равенств:

$$\begin{cases} y_r = a_0 x_r - a_1 x_i \\ y_i = a_0 x_i + a_1 x_r \end{cases} . \qquad (3.5)$$

Откуда следует вывод о том, что изменение одного из показателей комплексной переменной *x* ведёт к изменению как действительной, так и мнимой частей комплексной переменной *y*. То есть, комплекснозначные функции по определению являются многофакторными.

В области действительных переменных мы также встречаем многофакторные модели, например:

$$y = 5 + 3x_1 + 2x_2 . \qquad (3.6)$$

Но если в области действительных переменных для модели (3.6) поставить задачу: для заданного значения $y^*$ найти пару значений влияющих переменных ($x_1$,$x_2$), то эта задача не имеет единственного решения, поскольку из равенства (3.6) при известном значении $y^*$ можно получить уравнение с двумя неизвестными:

$$3x_1 + 2x_2 = y^* - 5 . \qquad (3.7)$$

Для комплекснозначной функции (3.2) такая задача (при отсутствии многолистности) легко решается, например, для линейной функции (3.4) при известных значениях $y_r^*$ и $y_i^*$ можно легко найти одну единственную пару значений комплексной переменной x:



$$x_r + ix_i = \frac{y_r^* + iy_i^*}{a_0 + ia_1} \qquad (3.8)$$

Например, если предприятие собирается найти наилучшее сочетание производственных ресурсов для получения заданного значения прибыли, в области действительных переменных необходимо решать оптимизационную задачу, а в комплекснозначной экономике – построить обратную функцию так, как это сделано в (3.8).

Частным случаем базовой модели (3.2) выступает модель комплексного аргумента:

$$y_r = f(x_r + ix_i) . \qquad (3.9)$$

Эту модель в общем виде можно представить как комплекснозначную функцию, у которой мнимая часть равна нулю:

$$y_r + i0 = f(x_r + ix_i) . \qquad (3.10)$$

То есть – это функция действительных переменных, но представленная в комплекснозначной форме. Для целого ряда экономически задач интерес представляет обратная функция:

$$x_r + ix_i = f(y) . \qquad (3.11)$$

Это – функция комплексных переменных с действительным аргументом. Простым примером такой функции может служить функция вида:

$$x_r + ix_i = y^{a_0 + ia_1} . \qquad (3.12)$$

Здесь изменение одной переменной определяет одновременное изменение двух переменных. Если моделировать такую ситуацию с помощью моделей действительных переменных, необходимо использовать систему двух уравнений. Компактность моделирования сложных процессов – очевидное преимущество комплекснозначной экономики, но не единственное.

## 4. Производственные функции комплексного аргумента

Поскольку для моделирования экономической динамики исключительный интерес представляют модели производственных функций, обратим особое внимание на то их разнообразие, которое привносит в экономику комплекснозначная экономика. По сути, как и прежде, предлагается рассматривать производство как «чёрный ящик», на вход которого поступают ресурсы $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, а на выходе получается некоторый производственный результат $y_1, y_2, y_3, \ldots y_m$:

$$Y = f(X). \tag{4.1}$$

Такую зависимость в экономике принято называть «производственной функцией». В теории производственных функций, которая использует действительные переменные, рассматривается производственный результат, как одна действительная переменная, на изменение которого оказывает влияние несколько производственных ресурсов, то есть – рассматривается многофакторная зависимость:

$$y = f(x_i), \quad i = 1, 2, 3, \ldots n. \tag{4.2}$$

Ресурсы, которые используются при промышленном производстве, разнообразны. К ним можно отнести: трудовые ресурсы; материальные ресурсы; финансовые ресурсы; капитальные ресурсы (станки, механизмы и т.п.); интеллектуальные ресурсы и др. Кроме того, каждый из ресурсов в свою очередь представляет собой некоторую агрегированную величину, например, трудовые ресурсы можно разделить на: промышленно-производственный персонал и непроизводственный персонал. Но и промышленно-производственный персонал в свою очередь разделяется на: рабочих и учеников, инженерно-технических работников, служащих и т.п.

Если попытаться в максимальной степени приблизить модель к экономическим реалиям, то необходимо включить в неё все эти ресурсы в как можно более детализированной форме, но такая модель становится чрезвычайно громоздкой, поэтому из всего многообразия производственных ресурсов останавливаются на двух основных и в высшей степени агрегированных – труде $L$ и капитале $K$. Логика выделения этих двух типов ресурсов из всего многообразия такова.

Для выпуска некоторого количества товара $Q$ помимо капитала и труда следует потратить определённое количество материальных и финансовых ресурсов, тепла и электроэнергии. Причём количество этих ресурсов, использованных в производстве, в определённой мере можно считать прямо пропорциональным выпуску. А капитал и труд, конечно же, меняются с изменением выпуска, но это изменение не носит линейный характер, это, во-первых, а во-вторых, эти два ресурса взаимозаменяемы – увеличивая капитальные ресурсы и внедряя новые технологии, можно добиться увеличения производительности труда и снижения тем самым затрат труда. То есть, можно большим числом капитального ресурса и меньшим числом трудового ресурса получить одно и то же количество выпускаемой продукции.

Такая взаимозаменяемость в определённой мере присуща любому уровню производственной иерархии, например, на уровне предприятия можно при постоянстве капитальных ресурсов, увеличивая затраты труда, организовать работу в две или три смены, добившись роста производства. Такого же объёма производства можно добиться и в том случае, когда оставляя неизменной численность занятых на предприятии, увеличивать капитал посредством внедрения более производительного оборудования. Правда, себестоимость, валовая прибыль и рентабельность в первом случае будут существенно отличаться от таких же показателей по второму варианту, но эти особенности не рассматриваются в теории производственных функций.

Для целей нашего научного исследования важно, что чаще всего в производственную функцию из всего многообразия ресурсов включают два ресурса – труд и капитал:

$$Q = f(K, L). \tag{4.3}$$

Мы не будем здесь пересказывать разделы теории производственных функций, а рассмотрим возможность и особенности применения комплекснозначных моделей применительно к задачам теории производственных функций.

Поскольку (4.3) графически представляет собой отражение точек плоскости ресурсов на действительную ось производственных результатов, то, заменив плоскость действительных переменных на плоскость комплексных переменных, мы сохраним смысл задачи, но поменяем её форму. Тогда производственная функция комплексного аргумента будет иметь вид:

$$Q = f(K + iL). \tag{4.4}$$

Отнесение трудовых ресурсов к мнимой части не вызвано какими-либо особыми экономическими соображениями – исключительно соображениями удобства. Но это соответствует правилу, когда к действительной части комплексной переменной относится активная часть экономического показателя, а к мнимой части – пассивная. В некотором смысле это правило соблюдено и в рассматриваемом случае – поскольку трудовые ресурсы в производстве в большей степени подвержены разнообразным изменениям по сравнению с капитальными ресурсами, их можно отнести к пассивной части.

В соответствии с правилами ТФКП знак равенства в (4.4) означает, что производственный результат, представленный в виде действительной переменной, на самом деле представим как комплексная переменная, чья мнимая часть равна нулю:

$$\begin{cases} Q + iQ_i = f(K + iL), \\ Q_i = 0. \end{cases} \tag{4.5}$$

Поскольку в экономике гладкие функции существуют лишь в головах некоторых отчаянных идеалистов, а на практике не встречаются, точного функционального соответствия между ресурсами и производственным результатом (4.4) быть не может, а может быть в лучшем случае регрессионная зависимость. С учётом этого при построении на практике производственной функции комплексного аргумента будет получена зависимость такого вида:

$$Q = f(K + iL) + \varepsilon_r + i\varepsilon_i\,. \tag{4.6}$$

Из этого следует, что производственная функция комплексного аргумента (ПФКА) представляет собой конформное отображение множества точек, лежащих на комплексной плоскости производственных ресурсов на комплексную плоскость производственного результата, по действительной оси которой откладывается $Q$, а по мнимой – величина отклонений $\varepsilon_i$. Причём это отображение имеет в общем случае вид линейной регрессии, совпадающей с осью действительных значений $Q$, отклонение от которой носит случайный характер.

Если для нахождения значений коэффициентов ПФКА использовать метод наименьших квадратов (МНК), то будет выполняться равенство [Светуньков]:



$$\sum(\varepsilon_r + i\varepsilon_i) = 0\,. \tag{4.7}$$

Формальной математической основой для ПФКА может послужить любая элементарная комплекснозначная функция из множества известных.

Рассмотрим ПФКА, исходя из общенаучного принципа – от простого к сложному, то есть, начнём с линейной производственной функции комплексного аргумента и, получив некоторые результаты, перейдём к более сложным моделям. Но прежде, чем это сделать, обратим внимание на область определения задачи – все переменные, как производственные ресурсы, так и производственный результат являются положительными.

Прежде, чем перейти к изучению особенностей функций комплексного аргумента как моделей производственного процесса, обратим на одну важную особенность этих функций – геометрически они представляют собой уравнение линии в трёхмерном пространстве. Эта особенность моделей комплексного аргумента может в определённых случаях рассматриваться как существенное преимущество по сравнению с моделями действительных переменных, особенно для линейной модели комплексного аргумента. Покажем это.

Любая комплекснозначная модель является многофакторной, поскольку комплексный аргумент состоит из двух действительных переменных, отнесённых, соответственно, к вещественной и к мнимой частям. Поэтому, прежде чем перейти к рассмотрению модели производственной функции комплексного аргумента, логично провести сравнительный анализ функций комплексного аргумента с двухфакторными моделями действительных переменных, которые довольно широко используются экономистами в моделировании экономики.

При построении многофакторных моделей социально-экономической динамики (в том числе и двухфакторных), учёные практически всегда встречаются с тем, что многие, а весьма часто и все коэффициенты парной корреляции между переменными, включаемыми в модель, близки по модулю к единице. Это явление получило название «мультиколлинеарности». Мультиколлинеарность, как следует из самого названия явления, возникает тогда, когда факторы модели имеют одинаковые, монотонные относительно друг друга почти линейные тенденции в динамике.

При этом возникает большая неприятность – попытка использования МНК для оценки коэффициентов многофакторных моделей в условиях мультиколлинеарности приводит к тому, что система нормальных уравнений МНК становится вырожденной – коэффициенты уравнений этой системы при переменных, которыми выступают искомые коэффициенты модели, оказываются близкими друг к другу. Пусть, например, мы наблюдаем некоторый социально-экономический процесс, который описывается функциональной двухфакторной линейной моделью с нулевым свободным членом:

$$y_t = 7,3x_{1t} + 2x_{2t} \quad (4.8)$$

Факторы $x_{1t}$ и $x_{2t}$ в рассматриваемый период меняются линейно и это изменение описывается линейной функциональной зависимостью одного фактора от другого:

$$x_{2t} = 0,273972603x_{1t} \quad (4.9)$$

Очевидно, что в таком случае коэффициент парной корреляции между ними будет равен единице, что свидетельствует о крайнем случае мультиколлинеарности – о линейной функциональной зависимости между ними. Если теперь по данным формулам, подставляя различные значения $x_{1t}$, вычислять соответствующие значения $x_{2t}$, а по этой паре – значения $y_t$, то полученные расчётные значения разных точек линейных функциональных зависимостей можно использовать для решения обратной задачи, а именно – по этим данным, не зная коэффициенты зависимости (4.8), построить многофакторную линейную модель, то есть – рассчитать с помощью МНК значения коэффициентов модели:

$$y_t = a_1 x_{1t} + a_2 x_{2t}$$

Поскольку между всеми переменными задачи имеется строго функциональная зависимость, на первый взгляд может показаться, что задача будет легко решена, поскольку в задаче нет ни одной случайной ошибки и неопределённости – задача полностью детерминирована. И, конечно же, следует ожидать точности от применения МНК. Но вот, для случайно выбранных значений система нормальных уравнений МНК имеет вид:

$$\begin{cases} 90094,411 = a_1 11480 + a_2 3145,206 \\ 24683,403 = a_1 3145,206 + a_2 861,700 \end{cases} \quad (4.10)$$



Следующий шаг – решить систему и получить искомые значения коэффициентов. Но прежде, чем сделать это, приведём эту систему уравнений к системе уравнений в отрезках. Получим:

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{a_1}{7,8479452} + \dfrac{a_2}{28,645} \\ 1 = \dfrac{a_1}{7,8479452} + \dfrac{a_2}{28,645} \end{cases} \quad (4.11)$$

Как видно, система уравнений вырождена и не имеет решений. Плоскости уравнений МНК не только параллельны друг другу, они полностью совпадают друг с другом, то есть, они не имеют одну общую точку пересечения. Значит, многофакторный МНК не позволяет решить поставленную задачу.

Между всеми переменными имеется строгая линейная зависимость, которая в трёхмерном пространстве исходных переменных представляет собой точки, лежащие на одной прямой линии, а поскольку эти точки лежат на одной прямой, то существует бесконечное количество плоскостей, которым будет принадлежать эта прямая линия. Система (4.11) это и демонстрирует – она даёт возможность бесконечного сочетания пар значений коэффициентов модели плоскости в трёхмерном пространстве, то есть позволяет получить бесконечное множество уравнений плоскостей, пересекающихся друг с другом и содержащих в себе прямую линию. Одной из таких плоскостей и является плоскость, описываемая уравнением (4.8). Но выделить эту плоскость из бесконечного числа других, как видно, с помощью МНК не представляется возможным.

Линейные модели комплексного аргумента, позволяют решить эту задачу. В общем виде линейная модель комплексного аргумента имеет вид:

$$y_r = (a_0 + ia_1)(x_r + ix_i) + (b_0 + ib_1) \quad (4.12)$$

После центрирования исходных переменных относительно их средних арифметических эта модель будет выглядеть проще:

$$y_r = (a_0 + ia_1)(x_r + ix_i) \quad (4.13)$$

Выделяя действительную и мнимую части этого равенства, получим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} y_r = a_0 x_r - a_1 x_i, \\ 0 = a_1 x_r + a_0 x_i \end{cases} . \tag{4.15}$$

Откуда:

$$\begin{cases} y_r = a_0 x_r - a_1 x_i, \\ x_r = -\dfrac{a_0}{a_1} x_i \end{cases} . \tag{4.16}$$

Первое уравнение полученной системы говорит о том, что результат линейно зависит от факторных переменных, а второе уравнение свидетельствует о том, что для линейной функции комплексного аргумента свойственна линейная функциональная зависимость между факторными переменными. Иначе говоря, *линейная функция комплексного аргумента имеет право на существование исключительно в условиях линейной взаимосвязи между факторами модели, то есть – в условиях проявления крайнего случая мультиколлинеарности – линейной функциональной зависимости между факторами*!

Применим МНК к оценке коэффициентов комплекснозначной модели по тем же данным, что и ранее:

$$\begin{cases} 90094,41 = a_0 10618,29 - a_1 6290,41 \\ 24683,4 = a_1 10618,29 + a_0 6290,41 \end{cases} . \tag{4.17}$$

Или в отрезках:

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{a_0}{8,4848} - \dfrac{a_1}{14,3225} \\ 1 = \dfrac{a_1}{2,3246} + \dfrac{a_0}{3,9239} \end{cases} . \tag{4.18}$$

Легко убедиться в том, что получена устойчивая система нормальных уравнений, решая которую, получим такую модель комплексного аргумента:

$$y_r = (7,3 - i2)(x_1 + ix_2) . \tag{4.19}$$

Если теперь раскрыть скобки и сгруппировать действительную и мнимую части полученного равенства, то оно преобразуется в следующее:

$$y_r = 7,3x_1 + 2x_2 + i(-2x_1 + 7,3x_2) . \tag{4.20}$$



Действительная часть полученного равенства полностью соответствует исходной функции (4.8), а мнимая часть легко преобразуется в такое равенство:

$$0 = i(-2x_{1t} + 7,3x_{2t}) \rightarrow x_{2t} = \frac{2}{7,3} x_{1t} = 0,273972603 x_{1t} . \tag{4.21}$$

То есть, абсолютно точно идентифицируется исходная зависимость между факторами (4.9). Следует указать на принципиальное отличие линейной двухфакторной модели действительных переменных типа:

$$y_t = a_0 x_{1t} + a_1 x_{2t} \tag{4.22}$$

и линейной модели комплексного аргумента:

$$y_t = (a_0 + ia_1)(x_{1t} + ix_{2t}) . \tag{4.23}$$

Несмотря на то, что в модели (4.22), как и в модели (4.23) две переменные и два коэффициента, они описывают разные фигуры. Модель действительных переменных (4.22) представляет собой уравнение плоскости в пространстве исходных переменных. Модель же комплексного аргумента (4.23) – уравнение прямой линии в этом пространстве.

Это значит, что в ситуации, когда между переменными $x_{1t}$ и $x_{2t}$ нет линейной зависимости, или линейная зависимость не описывается уравнением $x_r = -\dfrac{a_0}{a_1} x_i$, то модель комплексного аргумента будет давать не самые лучшие результаты, почему и следует использовать модель действительных переменных. Если же зависимость между факторами и результатом соответствует условиям (4.18), модель замечательно описывает процесс.

Свойства линейной ПФКА, предложенной и изложенной в начале 2005г., послужили основой для формирования комплекснозначной экономики [4, 2005]. Основные её характеристики хорошо изучены и описаны в монографии, опубликованной в 2008 году [5, 2008], поэтому остановимся лишь на наиболее важных её свойствах. Для построения этой простой функции будем использовать три переменные, описывающие производственный процесс, а именно: объём производства $Q_t$, затраты труда $L_t$ и затраты капитала $K_t$. Представим производственные ресурсы в виде комплексной переменной.

Будем изучать линейную функцию комплексного аргумента без свободного члена, понимая, что при необходимости от него легко избавиться центрированием исходных переменных относительно их средних арифметических. Модель линейной производственной функции комплексного аргумента представим в следующем виде:

$$Q_t = \left(a_0 + ia_1\right)\left(K_t + iL_t\right). \tag{4.24}$$

Перемножив два сомножителя в правой части равенства (4.24) и группируя отдельно вещественную и мнимую части, получим:

$$Q_t = \left(K_t a_0 - L_t a_1\right) + i\left(L_t a_0 + K_t a_1\right). \tag{4.25}$$

Таким образом, производственную функцию (4.25) можно представить в виде системы двух уравнений:

$$Q_t = K_t a_0 - L_t a_1, \tag{4.26}$$

и

$$0 = L_t a_0 + K_t a_1. \tag{4.27}$$

Поскольку а ясно, что (4.24) представляет собой уравнение прямой линии в трёхмерном пространстве, то на плоскости ресурсов она описывает такую линейную проекцию:

$$K_t = -\frac{a_0}{a_1} L_t. \tag{4.28}$$

Так как по определению капитальные ресурсы и трудовые ресурсы положительны, то (4.28) указывает на то, что один из коэффициентов пропорциональности должен быть отрицательным. Поскольку при этом чаще всего рост ресурсов ведёт к росту результатов производства, то для выполнения этого условия, необходимо, чтобы в (4.26) отрицательным был коэффициент $a_1$.

Это означает, что представив коэффициенты и ресурсы положительными, мы должны использовать такую линейную производственную функцию комплексного аргумента:

$$Q_t = \left(a_0 - ia_1\right)\left(K_t + iL_t\right). \tag{4.29}$$

Теперь довольно просто определить коэффициенты такой модели и их экономический смысл. Для этого из (4.24) выразим комплексный коэффициент пропорциональности через объёмы производства и производственные ресурсы:



$$a_0 - ia_1 = \frac{Q_t}{K_t + iL_t} = \frac{Q_t(K_t - iL_t)}{K_t^2 + L_t^2}, \tag{4.30}$$

Данное равенство, как это следует из свойств комплексных чисел, выполняется только в том случае, когда равны друг другу вещественные и мнимые части комплексных чисел в левой и правой частях равенства (4.30). Это свойство позволяет легко получить формулы для расчёта каждого из коэффициентов – раскрывая скобки и группируя отдельно вещественную и мнимую части, получаем формулы для вычисления каждого из коэффициентов. Для действительной части коэффициента пропорциональности:

$$a_0 = \frac{Q_t K_t}{K_t^2 + L_t^2}, \tag{4.31}$$

и для мнимой части коэффициента пропорциональности

$$a_1 = \frac{Q_t L_t}{K_t^2 + L_t^2}. \tag{4.32}$$

Из приведённых формул видно, что пара значений коэффициентов рассчитывается, когда имеется хотя бы одно наблюдение, как за значениями ресурсов, так и за значениями производственного результата. Это свойство сразу же отличает предлагаемую функцию от её аналогов в области действительных чисел, где для нахождения двух неизвестных коэффициентов необходимо иметь хотя бы два наблюдения. Это свойство производственной функции (4.29) легко объяснимо – функция имеет только один неизвестный комплексный коэффициент, поэтому его значения легко определяются по одному наблюдению.

Полученные формулы (4.31) и (4.32) позволяют не только найти численные значения коэффициентов по известным величинам затрат и результатов, но и дать экономическую интерпретацию коэффициентам $a_0$ и $a_1$ в том случае, когда производственный результат хорошо моделируется этой линейной функцией.

Знаменатели формул одинаковы и характеризуют масштаб привлекаемых ресурсов. Отличие в формулах наблюдается только в числителях, которые и позволяют понять смысловую нагрузку каждого коэффициента.

Числитель действительного коэффициента $a_0$ характеризует степень использования капитальных ресурсов, числитель мнимой части комплексного коэффициента характеризует степень использования трудовых ресурсов.

Поскольку рассматривается новая производственная функция, то для неё следует определить важную характеристику производственной функции как таковой – коэффициенты эластичности производственного результата по ресурсам.

Коэффициент эластичности по капиталу для рассматриваемой функции будет иметь вид:

$$\varepsilon_K = \frac{\partial Q}{\partial K}\frac{K}{Q} = \frac{\partial Q}{\partial K}\frac{K}{(a_0 + ia_1)(K + iL)}. \qquad (4.33)$$

Частная производная линейной производственной функции комплексного аргумента по капиталу будет равна:

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = (a_0 + ia_1). \qquad (4.34)$$

Подставляя это значение частной производной в (4.33), получим формулу коэффициента эластичности производства по капиталу:

$$\varepsilon_K = \frac{K}{K + iL}. \qquad (4.35)$$

Это означает, что коэффициент эластичности производства по капиталу является комплексной величиной.

Аналогично можно определить и коэффициент эластичности производства по труду:

$$\varepsilon_L = \frac{\partial Q}{\partial L}\frac{L}{Q} = \frac{\partial Q}{\partial L}\frac{L}{(a_0 + ia_1)(K + iL)}. \qquad (4.36)$$

Поскольку частная производная объёма выпуска по труду равна

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = i(a_0 + ia_1), \qquad (4.37)$$

то искомый коэффициент эластичности объёма выпуска по труду будет также являться комплексным коэффициентом:

$$\varepsilon_L = \frac{iL}{K + iL}. \qquad (4.38)$$

Легко заметить, что:

$$\varepsilon_K + \varepsilon_L = 1. \qquad (4.39)$$



Поскольку коэффициент эластичности производственной функции показывает – насколько процентов изменится производственный результат при изменении ресурса на один процент, определим суть полученных коэффициентов. Каждый из коэффициентов эластичности (4.42) и (4.43) показывает, как изменится производственный результат с изменением данного ресурса с учётом влияния другого ресурса. Если комплексный аргумент изменился на один процент, то и производственный результат, как следует из (4.39), также изменится на единицу.

# 5. Степенная производственная функция комплексного аргумента

Двухфакторная линейная зависимость в области действительных переменных представляет собой уравнение плоскости в трёхмерном пространстве. Линейная модель комплексного аргумента представляет собой уравнение прямой линии в этом же пространстве.

Нелинейные двухфакторные модели действительных переменных представляют собой уравнение нелинейных поверхностей в трёхмерном пространстве, а нелинейные модели комплексного аргумента, соответственно, представляют собой уравнение некоторой кривой линии в трёхмерном пространстве.

Из всего разнообразия форм степенных комплекснозначных функций рассмотрим вначале функцию с действительными коэффициентами. Она будет иметь вид:

$$Q_t = a(K_t + iL_t)^b. \qquad (5.1)$$

Линеаризуя её, получим:

$$\ln Q_t = \ln a + b\ln(K_t + iL_t). \qquad (5.2)$$

Выделяя действительную и мнимую части линеаризованной функции, и используя главное значение логарифма, получим следующие равенства:

$$\begin{cases} \ln Q_t = \ln a + b\ln\sqrt{L_t^2 + K_t^2}, \\ 0 = barctg\dfrac{L_t}{K_t} \end{cases} \quad .\qquad (5.3)$$

Из второго равенства этой системы уравнений имеем обязательное условие: $L_t=0$, что означает невозможность использования этой модели в моделировании производственных процессов.

Усложним модель за счёт введения в неё комплексного коэффициента пропорциональности:

$$Q_t = (a_0 + ia_1)(K_t + iL_t)^b \, . \qquad (5.4)$$

Логарифмируем левые и правые части модели:

$$\ln Q_t = \ln\sqrt{a_0^2 + a_1^2} + iarctg\frac{a_1}{a_0} + b\ln(K_t + iL_t) \, . \qquad (5.5)$$

Теперь, приводя отдельно действительную и мнимую части полученных равенств, модель может быть представима в виде системы двух равенств:

$$\begin{cases} \ln Q_t = \ln\sqrt{a_0^2 + a_1^2} + b\ln\sqrt{L_t^2 + K_t^2}, \\ arctg\dfrac{a_1}{a_0} = -barctg\dfrac{L_t}{K_t}. \end{cases} \qquad (5.6)$$

Из полученной системы следует вывод о том, что степенная производственная функция комплексного аргумента (5.4) может использоваться в том случае, когда между производственными ресурсами имеется линейная зависимость с постоянным углом наклона между ними, то есть – прямая линия проходит через нулевую точку.

При этом зависимость между производственными ресурсами и производственным результатом носит сложный характер, суть которого можно определить из экспоненциальной формы записи модели (5.4):

$$Q_t = \sqrt{a_0^2 + a_1^2}\,(L_t^2 + K_t^2)^b \, . \qquad (5.7)$$

Найдём теперь значения коэффициентов эластичности этой функции (5.4) по капиталу и труду.

Коэффициент эластичности производства по капиталу:



$$\varepsilon_K = \frac{\partial Q}{\partial K}\frac{K}{Q} = \frac{\partial Q}{\partial K}\frac{K}{(a_0 + ia_1)(K + iL)^b} \qquad (5.8)$$

может быть определён, если известна частная производная функции комплексного аргумента по капиталу:

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = b(a_0 + ia_1)(K + iL)^{b-1} \, . \qquad (5.9)$$

Тогда коэффициент эластичности производства по капиталу будет таким:

$$\varepsilon_K = \frac{bK}{K + iL} \, . \qquad (5.10)$$

Аналогично определяется и коэффициент эластичности функции (5.4) по труду:

$$\varepsilon_L = \frac{ibL}{K + iL} \, . \qquad (5.11)$$

В том случае если не отдельный ресурс будет меняться на один процент, а весь комплексный ресурс изменится на один процент, то производственный результат изменится на

$$\varepsilon = \varepsilon_K + \varepsilon_L = b \, . \qquad (5.12)$$

Таким образом, показатель степени рассматриваемой функции выступает коэффициентом общей эластичности производства по комплексному аргументу.

Теперь определим уравнение изокванты. Полагая $Q=Q_c=const$, можно получить уравнение изокванты для модели (5.4):

$$L_t^2 + K_t^2 = \left(\frac{Q_c}{\sqrt{a_0^2 + a_1^2}}\right)^{\frac{1}{b}} , \qquad (5.13)$$

Из чего следует, что изокванты модели (5.4) представляют собой окружности на плоскости производственного ресурса с разными диаметрами, величина которых определяется производственным результатом $Q_c$ – с его ростом радиус окружностей растёт.

Рассмотрим теперь модель производственной функции комплексного аргумента с комплексным коэффициентом пропорциональности и мнимым показателем степени:

$$Q_t = (a_0 + ia_1)(L_t + iK_t)^{ib} \, . \qquad (5.14)$$

Логарифмируя и выделяя действительные и мнимые части, получим:

$$\begin{cases} \ln Q_t = \ln\sqrt{a_0^2 + a_1^2} - barctg\dfrac{K_t}{L_t}, \\ arctg\dfrac{a_1}{a_0} = b\ln\sqrt{L_t^2 + K_t^2}. \end{cases} \quad (5.15)$$

Здесь мы видим из второго равенства, что зависимость между ресурсами представляет собой окружность. В трёхмерном пространстве это означает модель одной четверти цилиндра, перпендикулярного к плоскости ресурсов.

Между производственными ресурсами и производственным результатом имеется сложная нелинейная зависимость такой формы:

$$Q_t = \sqrt{a_0^2 + a_1^2}\, e^{-barctg\frac{K_t}{L_t}}. \quad (5.16)$$

Дополнительную информацию о функции и её свойствах дают коэффициенты эластичности. Коэффициент эластичности производственного результата по комплексному аргументу применительно к функции (5.14) будет вычисляться так:

$$\varepsilon_K = \frac{dQ}{d(K+iL)}\frac{(K+iL)}{Q}. \quad (5.17)$$

Для того чтобы его найти, следует вычислить производную данной функции по комплексному аргументу:

$$\frac{dQ}{d(K+iL)} = \frac{(a_0 + ia_1)(K+iL)^{ib}}{d(K+iL)}$$

Для этого представим функцию (5.14) в экспоненциальной форме:

$$Q_t = \sqrt{a_0^2 + a_1^2}\, e^{iarctg\frac{a_1}{a_0}}\left[\sqrt{L^2+K^2}\, e^{iarctg\frac{L}{K}}\right]^{ib} =$$

$$\sqrt{a_0^2 + a_1^2}\, e^{iarctg\frac{a_1}{a_0}}\left(\sqrt{L^2+K^2}\right)^{ib} e^{-barctg\frac{L}{K}}. \quad (5.18)$$

Согласно условию Даламбера-Эйлера (Римана-Коши) производную комплекснозначной функции можно найти, вычисляя производную действительной части по каждой из составляющей комплексного аргумента. Действительная часть функции комплексного аргумента будет иметь вид:



$$Q_t = R\cos\theta = ae^{-barctg\frac{L}{K}}\cos(\alpha + b\ln\sqrt{L^2+K^2}),\ a = \sqrt{a_0^2 + a_1^2},\ \alpha = arctg\frac{a_1}{a_0}. \quad (5.19)$$

Первая производная будет определена так:

$$\frac{dQ}{d(K+iL)} = \frac{\partial Q}{\partial K} - i\frac{\partial Q}{\partial L}. \quad (5.20)$$

Первая частная производная объёма по капиталу:

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{\partial(ae^{-barctg\frac{L}{K}}\cos(\alpha + b\ln\sqrt{L^2+K^2}))}{\partial K} \quad (5.21)$$

может быть определена как производная сложной функции:

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{\partial(ae^{-barctg\frac{L}{K}})}{\partial K}\cos(\alpha + b\ln\sqrt{L^2+K^2}) + \frac{\partial(\cos(\alpha + b\ln\sqrt{L^2+K^2}))}{\partial K}ae^{-barctg\frac{L}{K}}. \quad (5.22)$$

Её первая часть будет равна:

$$\frac{\partial(ae^{-barctg\frac{L}{K}})}{\partial K}\cos(\alpha + b\ln\sqrt{L^2+K^2}) = \frac{\partial(-barctg\frac{L}{K})}{\partial K}ae^{-barctg\frac{L}{K}}\cos(\alpha + b\ln\sqrt{L^2+K^2}). \quad (5.23)$$

Поскольку

$$\frac{\partial(-barctg\frac{L}{K})}{\partial K} = -b\frac{\dfrac{\partial\frac{L}{K}}{\partial K}}{1+(\frac{L}{K})^2} = \frac{b\dfrac{L}{K^2}}{1+(\frac{L}{K})^2}, \quad (5.24)$$

первая часть производной (5.22) будет записана так:

$$\frac{b\dfrac{L}{K^2}}{1+(\frac{L}{K})^2}ae^{-barctg\frac{L}{K}}\cos(\alpha + b\ln\sqrt{L^2+K^2}) = \frac{b\dfrac{L}{K^2}}{1+(\frac{L}{K})^2}R\cos\theta = b\frac{bL}{K^2+L^2}R\cos\theta. \quad (5.25)$$

Рассмотрим теперь вторую часть производной сложной функции (5.22):

$$\frac{\partial(\cos(\alpha + b\ln\sqrt{L^2+K^2}))}{\partial K}ae^{-barctg\frac{L}{K}} = -R\sin\theta\frac{bK}{L^2+K^2}. \quad (5.26)$$

С учётом (5.25) и (5.26) первая частная производная объёма по капиталу:

$$\frac{\partial Q}{\partial K}=\frac{bL}{K^2+L^2}R\cos\theta-\frac{bK}{K^2+L^2}R\sin\theta=\frac{bR}{K^2+L^2}(L\cos\theta-K\sin\theta), \quad (5.27)$$

Найдём теперь первую частную производную по труду, поскольку она составляет второе слагаемое искомой производной:

$$\frac{\partial Q}{\partial L}=\frac{\partial(ae^{-barctg\frac{L}{K}}\cos(\alpha+b\ln\sqrt{L^2+K^2}))}{\partial L}. \quad (5.28)$$

Рассмотрим её как производную сложной функции:

$$\frac{\partial Q}{\partial L}=\frac{\partial(ae^{-barctg\frac{L}{K}})}{\partial L}\cos(\alpha+b\ln\sqrt{L^2+K^2})+\frac{\partial(\cos(\alpha+b\ln\sqrt{L^2+K^2}))}{\partial L}ae^{-barctg\frac{L}{K}}. \quad (5.29)$$

Первая часть этой суммы будет равна:

$$\frac{\partial(ae^{-barctg\frac{L}{K}})}{\partial L}\cos\theta=\frac{\partial(-barctg\frac{L}{K})}{\partial L}ae^{-barctg\frac{L}{K}}\cos\theta. \quad (5.30)$$

А так как

$$\frac{\partial(-barctg\frac{L}{K})}{\partial L}=-b\frac{\frac{\partial\frac{L}{K}}{\partial L}}{1+(\frac{L}{K})^2}=-\frac{\frac{b}{K}}{1+(\frac{L}{K})^2}=-\frac{bK}{K^2+L^2}, \quad (5.31)$$

получим для первого слагаемого (5.29):

$$-\frac{bK}{K^2+L^2}R\cos\theta, \quad (5.32)$$

Вторая часть производной сложной функции

$$\frac{\partial(\cos(\alpha+b\ln\sqrt{L^2+K^2}))}{\partial L}R=-R\sin\theta\frac{bL}{L^2+K^2}. \quad (5.33)$$

Тогда первая производная рассматриваемой функции объёма по труду можно записать с учётом (5.32) и (5.33) так:

$$\frac{\partial Q}{\partial L}=-\frac{bK}{K^2+L^2}R\cos\theta-R\sin\theta\frac{bL}{L^2+K^2}=-\frac{bR}{K^2+L^2}(K\cos\theta+L\sin\theta). \quad (5.34)$$



Теперь можно получить и общую формулу для первой производной комплексной функции по комплексному аргументу, подставляя в (5.20) значение первого (5.27) и второго (5.34) слагаемых. Получим:

$$\frac{\partial Q}{\partial(K+iL)}=\frac{bR}{K^2+L^2}(L\cos\theta-K\sin\theta)-i(-\frac{bR}{K^2+L^2}(K\cos\theta+L\sin\theta)), \quad (5.35)$$

Группируя, можно получить такую формулу:

$$\frac{\partial Q}{\partial(K+iL)}=\frac{bR}{K^2+L^2}[L(\cos\theta+i\sin\theta)-iK(\cos\theta+i\sin\theta)], \quad (5.36)$$

которая легко преобразуется к виду:

$$\frac{\partial Q}{\partial(K+iL)}=\frac{(L-iK)}{K^2+L^2}=\frac{bRe^{i\theta}}{L+iK}, \quad (5.37)$$

Теперь может быть найден коэффициент эластичности рассматриваемой функции по комплексному аргументу:

$$\varepsilon_{K+iL}=\frac{dQ}{d(K+iL)}/\frac{Q}{K+iL}=\frac{bRe^{i\theta}}{L+iK}\frac{K+iL}{Re^{i\theta}}=ib. \quad (5.38)$$

Коэффициент эластичности рассматриваемой функции есть величина мнимая!

Коэффициент эластичности рассматриваемой функции по капиталу можно вычислить, воспользовавшись полученной формулой первой частной производной функции по капиталу (5.27):

$$\varepsilon_K=\frac{\partial Q}{\partial K}/\frac{Q}{K}=\frac{bR}{K^2+L^2}(L\cos\theta-K\sin\theta)/\frac{Re^{i\theta}}{K}=\frac{bK(L\cos\theta-K\sin\theta)}{(K^2+L^2)(\cos\theta+i\sin\theta)}. \quad (5.39)$$

Также легко, воспользовавшись выведенными ранее значениями частной производной функции по труду (5.34), найти эластичность объёма по этому ресурсу:

$$\varepsilon_L=\frac{\partial Q}{\partial L}/\frac{Q}{L}=-\frac{bR}{K^2+L^2}(K\cos\theta+L\sin\theta)/\frac{Re^{i\theta}}{L}=-\frac{bL(K\cos\theta+L\sin\theta)}{(K^2+L^2)(\cos\theta+i\sin\theta)}. \quad (5.40)$$

Если предположить, что производственный результат является величиной постоянной, то можно найти уравнение изокванты такой производственной функции.

Из (5.16) при условии постоянства результата имеем очевидное равенство:

$$-barctg\frac{K_t}{L_t}=const \qquad (5.41)$$

То есть, изокванта представляет собой прямую линию на плоскости ресурсов, выходящую из начала координат.

Легко заметить, что смена показателя степени с действительного на мнимый симметрично поменяла свойства действительной и мнимой частей.

Следовательно, вместе с ограничением на форму изменения ресурсов (цилиндрическую) зависимость производственного результата от ресурсов, изображённая в пространстве, представляет собой нелинейную кривую, располагающуюся на поверхности цилиндра. Форма этой модели значительно сложнее, чем форма модели с действительным показателем степени.

Степенная форма производственной функции комплексного аргумента может иметь и более сложный вид, если использовать комплексный показатель степени:

$$Q_t=a_0(K_t+iL_t)^{(b_0+ib_1)} . \qquad (5.42)$$

Логарифмируя левую и правую части функции, получим:

$$\ln Q_t=\ln a_0+(b_0+ib_1)\ln(K_t+iL_t)=\ln a_0+(b_0+ib_1)(\ln\sqrt{L_t^2+K_t^2}+iarctg\frac{L_t}{K_t}) . \qquad (5.43)$$

Откуда, выделяя действительную и мнимую части:

$$\begin{cases}\ln Q_t=\ln a_0+b_0\ln\sqrt{L_t^2+K_t^2}-b_1arctg\frac{L_t}{K_t},\\ 0=b_0arctg\frac{L_t}{K_t}+b_1\ln\sqrt{L_t^2+K_t^2}.\end{cases} \qquad (5.44)$$

Из второго равенства этой системы уравнений следует, что модель (5.42) пригодна для моделирования производственных процессов, для которых зависимость между ресурсами носит сложный нелинейный характер. Поскольку при разных значениях коэффициентов $b_0$ и $b_1$ эта зависимость принимает самый различный вид, то она имеет больше оснований для практического применения, нежели модели степенных производственных функций комплексного аргумента, рассмотренные ранее.



Универсальной следует признать степенную производственную функцию комплексного аргумента с комплексными коэффициентами:

$$Q_t=(a_0+ia_1)(K_t+iL_t)^{(b_0+ib_1)}, \qquad (5.45)$$

поскольку, логарифмируя левую и правую части этой функции, и выделяя действительную и мнимую части, получим:

$$\begin{cases}\ln Q_t=\ln\sqrt{a_0^2+a_1^2}+b_0\ln\sqrt{L_t^2+K_t^2}-b_1arctg\frac{L_t}{K_t},\\ 0=arctg\frac{a_1}{a_0}+b_0arctg\frac{L_t}{K_t}+b_1\ln\sqrt{L_t^2+K_t^2}.\end{cases} \qquad (5.46)$$

Разные сочетания коэффициентов этой модели позволяет моделировать самые различные нелинейные зависимости производственного результата от ресурсов, зависимость между которыми меняется от линейной (при $b_1=0$) до сложных нелинейных.

Впрочем, использование комплексного показателя степени позволяет находить промежуточные значения этого показателя. Для этого возьмём отношения друг к другу левых и правых частей модели в рядом стоящие моменты времени. Получим:

$$\frac{Q_t}{Q_{t-1}}=(\frac{K_t+iL_t}{K_{t-1}+iL_{t-1}})^{b_0+ib_1} . \qquad (5.47)$$

Откуда легко найти комплексный показатель степени:

$$b_{t0}+ib_{t1}=\ln\frac{Q_t}{Q_{t-1}}/\ln(\frac{K_t+iL_t}{K_{t-1}+iL_{t-1}}) .$$

Нет необходимости проводить сложные выкладки и доказывать, что коэффициент эластичности рассматриваемой функции комплексного аргумента (5.42) будет равен:

$$\varepsilon_{K+iL}=b_0+ib_1, \qquad (5.48)$$

поскольку эту функцию можно представить и в таком виде:

$$Q_t=(a_0+ia_1)(K_t+iL_t)^{b_0}(K_t+iL_t)^{ib_1}, \qquad (5.49)$$

откуда со всей очевидностью вытекает (5.48).

Существенным преимуществом степенной ПФКА является то, что ареал её применения несравнимо более обширен, чем линейной модели, поскольку при $b_0=1$ и $b_1=0$ модель (5.42) превращается именно в модель линейной производственной функции комплексного аргумента, что говорит о том, что линейная модель ПФКА является частным случаем степенной модели. Кстати, при $b_0=1$ и $b_1=0$ моделируется обратно пропорциональная комплекснозначная зависимость, которая моделирует ситуацию стагнации – увеличение производственных ресурсов в этой модели приводит к уменьшению производственного результата.

## 6. Показательная и логарифмическая производственные функции комплексного аргумента

Из семейства возможных моделей показательных производственных функций комплексного аргумента рассмотрим показательную функцию по натуральному основанию, понимая, что с таким же успехом могут быть применены и другие основания – десятичные, двоичные и т.п.

Исследование этой функции начнём, как и прежде по принципу: от простого – к сложному. Самой простой в этом семействе представляется модель показательной функции с действительными коэффициентами:

$$Q_t = ae^{b(K_t+iL_t)}. \tag{6.1}$$

Эта функция легко может быть преобразована к такому виду:

$$Q_t = ae^{bK_t}e^{ibL_t}. \tag{6.2}$$

В силу того, что для комплексных переменных об их равенстве друг другу можно говорить только в том случае, когда равны друг другу действительные и мнимые части, можно убедиться в том, что эта модель означает систему двух равенств:

$$\begin{cases} Q_t = ae^{bK_t}, \\ 2\pi k = bL_t. \end{cases} \tag{6.3}$$

Здесь $k=0,1,2,3,\dots$



Удобнее, конечно, считать, что $k=0$. В любом случае второе уравнение системы (6.3) свидетельствует только об одном – трудовые ресурсы здесь рассматриваются как величина постоянная. А из первого равенства системы, видно, что эта модель представляет собой однофакторную степенную зависимость объёма производства от капитальных ресурсов. И первое, и второе уравнения системы показывают, что эта модель описывает влияние капитала на объём производства при постоянной величине затрат труда, никак не влияющего ни на результат, ни на капитал.

Точно такой же, но «симметричный» относительно производственных ресурсов смысл имеет показательная функция с мнимым показателем степени:

$$Q_t = ae^{ib(K_t+iL_t)}. \tag{6.4}$$

Эта функция легко может быть преобразована к такому виду:

$$Q_t = ae^{ibK_t}e^{-bL_t}. \tag{6.5}$$

Откуда:

$$\begin{cases} Q_t = ae^{-bL_t}, \\ 2\pi k = bK_t. \end{cases} \tag{6.6}$$

Что вновь свидетельствует о том, что моделируется однофакторная зависимость производственного результата от труда при постоянстве капитальных ресурсов.

Не особо изменится практическая значимость этой модели, если использовать теперь не действительный, а мнимый коэффициент пропорциональности:

$$Q_t = iae^{b(K_t+iL_t)}. \tag{6.7}$$

И эта функция может быть преобразована к удобному для понимания её сути виду:

$$Q_t = ae^{i(\pi/2)}e^{bK_t}e^{ibL_t}. \tag{6.8}$$

Аргумент мнимого коэффициента пропорциональности определён с точностью до одного периода. Теперь легко получить систему двух уравнений, характеризующих действительную и мнимую части модели (6.7):

$$\begin{cases} Q_t = ae^{bK_t}, \\ \dfrac{\pi}{2} = -bL_t. \end{cases} \tag{6.9}$$

И это означает, что модель (6.7) предполагает априорное постоянство капитального ресурса.

Усложним модель за счёт использования комплексного коэффициента пропорциональности, оставляя вещественный коэффициент пропорциональности при показателе степени:

$$Q_t = (a_0 + ia_1)e^{b(K_t + iL_t)}. \tag{6.10}$$

Эта модель комплексного аргумента может быть представлена в виде равенств друг другу модуля и аргумента, что составляет следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} Q_t = \sqrt{a_0^2 + a_1^2}\, e^{bK_t}, \\ 2\pi k = arctg\dfrac{a_1}{a_0} + bL_t. \end{cases} \tag{6.11}$$

И вновь мы видим, что эта модель предполагает априорное выполнение постоянства трудового ресурса (второе уравнение системы (6.11)) и однофакторную зависимость производственного результата от капитальных ресурсов.

Таким образом, в отличие от модели степенной производственной функции комплексного аргумента модель показательной производственной функции комплексного аргумента лишена многообразия и может быть представлена для практических целей исключительно в форме с комплексным показателем степени:

$$Q_t = (a_0 + ia_1)e^{(b_0 + ib_1)(K_t + iL_t)}. \tag{6.12}$$

Выделяя её модуль и аргумент, получим такую систему уравнений:

$$\begin{cases} Q_t = \sqrt{a_0^2 + a_1^2}\, \dfrac{e^{b_0 K_t}}{e^{b_1 L_t}}, \\ 2\pi k = arctg\dfrac{a_1}{a_0} + b_0 L_t + b_1 K_t. \end{cases} \tag{6.13}$$



Из второго уравнения системы следует, что модель показательной степенной функции комплексного аргумента предполагает априорное наличие линейной зависимости между производственными ресурсами.

Первое уравнение показывает, что аналогом комплекснозначной функции (6.12) в области действительных переменных (при линейном изменении ресурсов) выступает экспоненциальная модель:

$$Q_t = \sqrt{a_0^2 + a_1^2}\, \frac{e^{b_0 L_t}}{e^{b_1 K_t}} = ae^{b_0 L_t - b_1 K_t}.$$

Эта же функция в логарифмах будет выглядеть так:

$$\ln Q_t = A + b_0 L_t - b_1 K_t. \tag{6.14}$$

Графически модель будет представлять собой экспоненту, расположенную на плоскости, перпендикулярной оси ресурсов, все точки на которой удовлетворяют второму равенству системы (6.13).

Найти коэффициенты такой модели с помощью МНК не представляет особых затруднений.

Впрочем, есть возможность, не прибегая к МНК, определить – насколько модель может быть пригодна для описания реальной экономической производственной ситуации.

Для этого разделим левые и правые части равенства (6.12) в момент времени *t* на левые и правые части этого же равенства в предыдущий момент. Получим:

$$\frac{Q_t}{Q_{t-1}} = e^{(b_0 + ib_1)(\Delta K_t + i\Delta L_t)}. \tag{6.15}$$

Тогда комплексный показатель степени можно определить по двум значениям исходных переменных:

$$b_0 + ib_1 = \frac{\ln \dfrac{Q_t}{Q_{t-1}}}{\Delta K_t + i\Delta L_t}. \tag{6.16}$$

Логарифмическая функция комплексной переменной является периодической функцией, и мы будем использовать исключительно главное значение логарифма. В этом случае логарифмическая производственная функция комплексного аргумента примет следующий вид:

$$Q_t = (a_0 + ia_1) + (b_0 + ib_1)\ln(K_t + iL_t). \tag{6.17}$$

В этой функции влияние свободного члена очевидно – вещественная часть этого коэффициента $a_0$ характеризует сдвиг производственного результата при начальных значениях переменных, а мнимая часть коэффициента $a_1$ характеризует корректировку мнимой части правой стороны равенства (6.17). Поскольку иных интерпретаций и влияний на результаты моделирования производства этот комплексный коэффициент не оказывает, для рассмотрения свойств модели им вначале можно пренебречь. Тогда без ущемления общности задачи модель логарифмической производственной функции комплексного аргумента может быть представлена так:

$$Q_t = (b_0 + ib_1)\ln(K_t + iL_t). \tag{6.18}$$

Эту функцию легко привести к форме, удобной для исследования, а именно – к системе двух равенств, действительных частей и мнимых частей. Эта система будет иметь вид:

$$\begin{cases} Q_t = b_0 \ln\sqrt{L_t^2 + K_t^2} - b_1 arctg\dfrac{L_t}{K_t}, \\ 2\pi k = b_1 \ln\sqrt{L_t^2 + K_t^2} + b_0 arctg\dfrac{L_t}{K_t}. \end{cases} \tag{6.19}$$

Второе равенство этой системы показывает взаимосвязь между производственными ресурсами, а первое равенство представляет собой аналог комплекснозначной модели на множестве вещественных чисел.

Как можно заметить из второго равенства данная модель предполагает наличие самых разных форм зависимости между производственными ресурсами. Эти формы определяются, в первую очередь значениями коэффициентов $b_0$ и $b_1$. Так, если например, равен нулю коэффициент $b_0$, то зависимость между ресурсами должна описываться уравнением окружности. А если равен нулю коэффициент $b_1$, то зависимость между ресурсами описывается прямой линией. В том случае, когда эти коэффициенты не равны нулю, то зависимость между производственными ресурсами может принимать самые разные формы, в том числе, и так, как изображаются изокванты «неоклассических производственных функций». С этих позиций модель логарифмической производственной функции комплексного аргумента является универсальной.

Поскольку и первое равенство системы, моделирующее зависимость между производственными ресурсами и производственным результатом, также представляет собой комбинацию уравнения окружности и уравнение арктангенса, то и оно в зависимости от значений и знаков коэффициентов может описывать довольно разнообразное сочетание прямой линии и окружности. Кривая в пространстве, которая в итоге получается как пересечение этих двух нелинейных поверхностей, имеет сложный характер и модель в состоянии описывать сложные траектории развития производственных систем.

Существенным достоинством этой модели является то очевидное обстоятельство, что (6.21) представляет собой систему двух уравнений с двумя неизвестными, поэтому коэффициенты модели могут быть найдены с помощью всего одного наблюдения за производственным процессом. То есть, практическое применение такой модели представляется простым.

Действительно, из (6.18) следует формула для нахождения комплексного коэффициента пропорциональности:

$$b_0 + ib_1 = \frac{Q_t}{\ln(K_t + iL_t)}. \tag{6.20}$$

В завершение параграфа следует отметить, что логарифмическая функция – это функция периодическая, а, следовательно, при её практическом использовании следует это иметь всегда в виду.

## 7. Общие положения теории производственных функций комплексных переменных

Функции комплексного аргумента представляют собой некоторое «усечение» свойств функций комплексных переменных – в них описывалась зависимость вещественной переменной от комплексной, которая выступала как комплексный аргумент функции. Уже только такая постановка задачи применительно к одному из разделов экономики – теории производственных функций, – привело к получению новых научных результатов. Естественно, следует ожидать ещё более многообразных и впечатляющих результатов, если использовать в экономике функции комплексных переменных – зависимость одной комплексной переменной от другой. Поскольку комплексная переменная по своей сути, представляет собой некоторую двухфакторную модель, то тем самым рассматривается зависимость одной пары экономических показателей от другой пары. Естественно предположить применительно к экономическим задачам, что одна пара – комплексный аргумент, – может представлять собой производственные ресурсы, а другая пара – комплексный результат, – может представлять собой показатели производства. Такая зависимость, связывающая производственные ресурсы с производственным результатом, будет являться производственной функцией.

Формально производственные функции представляют собой некоторую математическую зависимость производственного результата от производственных ресурсов при целом ряде исходных допущений. Из множества производственных ресурсов для построения производственных функций используют только два ресурса – производственный капитал $K$ в самых разных его формах, и труд $L$. Эти два ресурса являются в определённой степени взаимозаменяемыми, поэтому используют в основном именно их.

В моделях производственных функций комплексных переменных порядок отнесения показателей к действительной и к мнимой частям, как комплексного аргумента, так и комплексного результата, имеет выраженный экономический смысл.

Поэтому будем строго придерживаться такого правила формирования комплексного производственного аргумента – к действительной части будем относить капитал, а к мнимой – труд. Тогда комплексный производственный ресурс для таких функций будет записываться так:

$$K_t + iL_t . \tag{7.1}$$

Результат производства может демонстрироваться самыми различными технико-экономическими показателями. В теории произ-



водственных функций используется в основном один показатель – объём произведённой и реализованной продукции $Q_t$. Очевидно, что в таком случае и высказываются все предположения относительно производственных функций: о том, что спрос ненасыщенный; о том, что цена неизменна и т.п.

Но в реальной экономической практике о производственных результатах никто не судит только по объёму производства (выпуску), важно понимать успешность экономической деятельности, а об этом свидетельствуют различные показатели экономической эффективности, в первую очередь такие, как валовая прибыль $G_t$, издержки производства $C_t$ и базирующийся на них показатель рентабельности производства $R_t$.

Поскольку валовая прибыль, издержки производства и валовой объём производства связаны друг с другом элементарным соотношением:

$$Q_t = G_t + C_t ,$$

то, вычисляя любую пару из этой «троицы», легко рассчитать третий показатель.

С их помощью легко вычисляется и ещё одни показатель экономической эффективности – рентабельность:

$$R_t = \frac{G_t}{C_t} = \frac{Q_t - C_t}{C_t} .$$

А для того, чтобы сформировать комплексную переменную производственного результата, нам как раз и необходима пара переменных, отражающая разные стороны одного процесса и имеющие одинаковую размерность и масштаб. Поскольку различное сочетание производственных ресурсов приводит к различному сочетанию издержек производства и валовой прибыли, и, как следствие этого, к разным объёмам валового производства и рентабельностям, то частями комплексной переменной производственного результата должны выступать именно переменные валовой прибыли $G_t$ и издержек производства $C_t$.

Комплексная переменная производственного результата, в которую включаются валовая прибыль $G_t$ и издержки производства $C_t$, предлагается представлять в таком виде:

$$G_t + iC_t . \tag{7.2}$$

И здесь отнесение валовой прибыли в действительную часть, а издержек в мнимую часть комплексной переменной производственных ресурсов сделано не случайно. Сравнивая друг с другом валовую прибыль и издержки производства, пожалуй, можно говорить, что валовой прибыли экономисты уделяют повышенное внимание по сравнению с затратами на производство, поэтому отнесение валовой прибыль к действительной части комплексной переменной с этих позиций представляется соответствующим введённому правилу.

В общем виде производственная функция комплексных переменных может быть представлена так:

$$G_t + iC_t = F(K_t + iL_t). \tag{7.3}$$

Функций, с помощью которых можно связать зависимостью (7.3) две комплексные переменные

$G_t + iC_t$ и

$K_t + iL_t$,

много.

Из (7.3) следует, что с помощью комплекснозначных функций моделируется сразу два экономических показателя – валовая прибыль и издержки производства, но как уже писалось, это модель трёх производственных результатов. Ведь сумма валовой прибыли и издержек производства представляет собой не что иное, как валовой выпуск:

$$G_t + C_t = Q_t. \tag{7.4}$$

Функцию (7.3) можно представить и иначе, воспользовавшись представлением комплексного ресурса в экспоненциальной форме:

$$G_t + iC_t = R_t e^{i\theta_t}. \tag{7.5}$$

Откуда легко получить:

$$\begin{cases} G_t = R_t \cos\theta_t, \\ C_t = R_t \sin\theta_t, \\ Q_t = R_t(\cos\theta_t + \sin\theta_t). \end{cases} \tag{7.6}$$

Здесь полярный угол комплексной переменной находится так:



$$\theta_t = arctg\frac{C_t}{G_t} = arctg\frac{1}{R_t}.$$

То есть – он отражает рентабельность производства – чем выше значение полярного угла, тем менее эффективно работает производство. В том случае, когда предприятие работает бесприбыльно, но не убыточно, то есть – с нулевой рентабельностью, тангенс полярного угла устремляется к плюс бесконечности.

В производственных функциях комплексных переменных появляются новые экономические показатели, которые не встречаются в теории производственных функций, базирующейся на действительных переменных. Это модули комплексных переменных и их полярные углы. Если с полярными углами всё более-менее ясно, они характеризуют для ресурсов фондовооружённость труда (тангенс полярного угла, представляющий отношение труда к капиталу, очевидно равен фондовооружённости труда), а для производственного результата – рентабельность по себестоимости, то с характеристикой модулей этих комплексных переменных интерпретация затруднена. Действительно, модули этих переменных равны: $R_{GC} = \sqrt{G^2 + C^2}, R_{KL} = \sqrt{K^2 + L^2}$. Какой экономический смысл они имеют? Они отражают масштаб производства и масштаб ресурсов соответственно.

Ещё одно уникальное свойство, помимо вышеизложенных, присуще производственным функциям комплексных переменных. Из зависимости (7.3) легко следует и обратная ей:

$$K_t + iL_t = f(G_t + iC_t). \tag{7.7}$$

То есть, если некоторый производственный процесс можно описать с помощью производственной функции комплексных переменных, то появляется возможность построить обратную функцию (7.7), с помощью которой удаётся решать задачу, даже не возникавшую в современной теории производственных функций – как достичь желаемого уровня валовой прибыли, издержек производства, или объёма производства? Какие трудовые и капитальные ресурсы необходимо привлечь для получения заданного уровня рентабельности производства? Функция (7.7) позволяет получить ответы на эти вопросы довольно просто, функции действительных переменных для ответа на эти вопросы должны быть существенно усложнены и сведены в некоторую систему уравнений.

Самая простая – линейная, – функция комплексных переменных будет выглядеть так:

ùỳùü $_t = (\ _0 + \ _1)(\ _t + \ _t)$. (7.8)

Поскольку эта простейшая функция комплексной переменной имеет только один комплексный коэффициент, а именно – коэффициент пропорциональности ($b_0$+$ib_1$), то именно он и является предметом исследования этой функции. Из равенства (7.8) легко получить:

$$b_0 + ib_1 = \frac{G_t + iC_t}{K_t + iL_t}.$$

Теперь, умножая числитель и знаменатель правой части равенства на сопряжённый знаменателю сомножитель, получим:

$$b_0 + ib_1 = \frac{G_t + iC_t}{K_t + iL_t} \times \frac{K_t - iL_t}{K_t - iL_t} = \frac{G_tK_t + C_tL_t + i\left(C_tK_t - G_tL_t\right)}{L_t^2 + K_t^2}.$$

Откуда после группировки вещественной и мнимой частей легко вывести каждый из коэффициентов $b_0$ и $b_1$ этой формы производственной функции комплексных переменных:

$$b_0 = \frac{G_tK_t + C_tL_t}{L_t^{\ 2} + K_t^{\ 2}}, \qquad (7.9)$$

$$b_1 = \frac{C_tK_t - G_tL_t}{L_t^{\ 2} + K_t^{\ 2}}. \qquad (7.10)$$

В отличие от коэффициентов производственной функции комплексного аргумента дать экономическую интерпретацию каждого из коэффициентов функции комплексных переменных (7.8) непросто. Знаменатель у этих коэффициентов одинаков – он отражает масштаб ресурсов, но числители (7.9) и (7.10) существенно отличаются друг от друга и не имеют чётких экономических параллелей.

Коэффициент $b_0$ будет линейно расти с ростом как объёма производства ($G$+$C$), так и с ростом валовой прибыли и издержек производства при постоянстве затрат ресурсов. Если и ресурсы, и



результаты растут прямо пропорционально друг другу, то этот коэффициент остаётся постоянным. Во всех остальных случаях его динамика носит более сложный характер.

Что можно сказать относительно второго коэффициента $b_1$, так это то, что он будет увеличиваться с ростом себестоимости и в некоторой степени с увеличением количества занятых в производстве. Последняя зависимость носит нелинейный характер. Рост валовой прибыли однозначно будет отражаться уменьшением значений этого коэффициента.

Если за точку отсчёта принять первое наблюдение, а все остальные значения привести к относительным значениям, то коэффициент $b_0$ при первом наблюдении будет равен единице, а коэффициент $b_1$ – равен нулю. Впрочем, за точку отсчёта можно взять не только начальное, но и любое другое значение, например, последнее. Тогда именно для этого года наблюдения за производственным процессом коэффициент $b_0$ будет равен единице, а коэффициент $b_1$ будет равен нулю. Поскольку в реальной экономике ситуации моделирования линейной зависимости некоторого комплексного показателя от комплексного фактора при нулевом значении свободного члена встречаются крайне редко, к такому виду модель можно привести, осуществив предварительное центрирование исходных переменных относительно их средних арифметических.

Если раскрыть скобки равенства (7.8) и сгруппировать вещественную и мнимую части полученного равенства, то:

$$G_t + iC_t = \left(b_0 + ib_1\right)\left(K_t + iL_t\right) \leftrightarrow G_t + iC_t = b_0K_t - b_1L_t + i\left(b_0L_t + b_1K_t\right)$$

Откуда для вещественной части равенства:

$$G_t = b_0K_t - b_1L_t, \qquad (7.11)$$

а для мнимой части:

$$C_t = b_0L_t + b_1K_t. \qquad (7.12)$$

Полученные выражения имеют простой экономический смысл и определяют в каких случаях моделирования производства может использоваться линейная производственная функция комплексных переменных (если считать, что коэффициенты модели являются положительными). (7.11) однозначно указывает на то, что с ростом капитального ресурса валовая прибыль увеличивается, а с ростом трудовых ресурсов – уменьшается. При этом, как следует из (7.12), издержки производства увеличиваются. Это свидетельствует о том, что моделируется процесс с постоянной отдачей по прибыли капитального ресурса и убывающей отдачей по прибыли трудовых ресурсов.

Впрочем, если коэффициент $b_1$ будет отрицательным, то рост трудовых ресурсов ведёт к росту и прибыли, и издержек, а рост капитальных ресурсов ведёт в этом случае к моделированию ситуации, когда валовая прибыль растёт, а издержки уменьшаются. То есть, имеет место постоянная отдача трудового ресурса и, в зависимости от соотношения коэффициентов $b_0$ и $b_1$ – возрастающая, постоянная или убывающая отдача капитального ресурса.

Это означает, что линейная ПФКП обладает некоторыми аналитическими свойствами, с помощью которых можно изучать суть производственных процессов разных уровней иерархии. Конечно, делать это можно только в том случае, когда линейная ПФКП хорошо описывает моделируемое производство.

Поскольку все переменные приведены к безразмерным величинам делением на свои первые значения ($G_t/G_1$, $C_t/C_1$, $K_t/K_1$, $L_t/L_1$), возникает несколько важных моментов, на которые следует обратить внимание. Полученные значения позволяют определить некий аналог валовой выручки:

$$G_t + C_t = \left(b_0 K_t - b_1 L_t\right) + \left(b_0 L_t + b_1 K_t\right) = (b_0 + b_1)K_t + (b_0 - b_1)L_t. \qquad (7.13)$$

Мы называем полученную сумму не валовой выручкой, а её аналогом вот почему. Все исходные переменные отмасштабированы. Это значит, что валовая прибыль $G_t$ поделена на начальное значение прибыли в первый год наблюдения $G_1$, и издержки производства $C_t$, поделены на первый год наблюдения $C_1$. Их сумма не равна делению валовой выручки в год $t$ на значение валовой выручки в первый год:

$$\frac{G_t}{G_1} + \frac{C_t}{C_1} = \frac{G_t C_1 + C_t G_1}{G_1 C_1} \neq \frac{G_t + C_t}{G_1 + C_1} = \frac{Q_t}{Q_1}.$$

Поэтому (7.13) выступает именно аналогом выручки. Для того чтобы (7.13) имело искомый смысл, необходимо валовую прибыль и себестоимость привести к безразмерным величинам относительно валовой выручки:



$$\frac{G_t}{Q_1}, \frac{C_t}{Q_1}. \qquad (7.14)$$

В таком случае (7.13) имеет смысл валовой выручки в относительных значениях.

Точно также некоторым аналогом рентабельности выступает в модели и отношение:

$$\frac{G_t}{C_t} = \frac{b_0 K_t - b_1 L_t}{b_0 L_t + b_1 K_t}. \qquad (7.15)$$

Опять-таки, вычисляется не сама рентабельность, а её некоторый аналог, поскольку с учётом приведения к безразмерным величинам:

$$\frac{G_t / G_0}{C_t / C_0} = \frac{R_t}{R_0}$$

Но если переменные производственного результата приведены к безразмерным величинам приведением к начальному значению валовой выручки, то (7.15) будет характеризовать рентабельность по себестоимости.

Поэтому для практических целей необходимо все исходные переменные этой и других моделей производственных функций комплексных переменных приводить к безразмерным величинам, делением их значений на валовой выпуск в начальный момент времени $Q_1$:

$$\frac{G_t}{Q_1}, \frac{C_t}{Q_1}, \frac{K_t}{Q_1}, \frac{L_t}{Q_1}.$$

Формулы (7.9) и (7.10) дают возможность для каждого момента наблюдения найти соответствующие коэффициенты линейной производственной функции комплексных переменных (7.8). Для этого следует только подставить в них имеющиеся статистические данные.

В экономике линейные зависимости, как известно, встречаются очень редко, да и то лишь в отдельные достаточно короткие промежутки времени. В первую очередь это относится к динамическим процессам. В подавляющем большинстве случаев превалируют нелинейные зависимости, которые, кстати, также действуют в относительно небольшой промежуток времени, поскольку одна нелинейная тенденция сменяет другую. Смена тенденций развития экономических объектов, которые мы наблюдаем применительно к любым из них, объясняется тем, что любой экономический объект эволюционирует, меняя свою структуру, состав элементов, взаимосвязи между ними и взаимодействие с другими экономическими объектами. Точно также и производственный процесс, развиваясь по сложной циклической траектории, в отдельные промежутки времени может быть описан разными нелинейными моделями. Поэтому чаще всего экономист должен оперировать с нелинейными комплекснозначными моделями.

Из огромного множества возможных комплекснозначных моделей степенные производственные функции комплексных переменных занимают особое место. Как и в теории производственных функций действительных переменных, где степенные функции превалируют, поскольку обладают выдающимися свойствами, так и в теории комплекснозначной экономики степенные модели занимают особое место. Они универсальны, просты в использовании и на редкость хорошо описывают отдельные реальные производственные ситуации.

В общем виде степенные производственные функции комплексных переменных можно записать так:

$$G_t + iC_t = (a_0 + ia_1)(K_t + iL_t)^{b_0 + ib_1}. \qquad (7.16)$$

Рассмотрим вначале самый простой из возможных случаев – случай, когда мнимые части комплексных коэффициентов этой функции равны нулю, и функция (7.16) является степенной производственной функцией с действительными коэффициентами:

$$G + iC = a\left(K + iL\right)^{b}. \qquad (7.17)$$

Применительно к нашей задаче отображения комплексной переменной производственных ресурсов на комплексную плоскость производственных результатов, существуют ограничения, вызванные экономической сутью переменных. Эти ограничения, естественно, действуют и на линейные комплекснозначные производственные функции, но в рассмотренном выше примере выход за эти ограничения был вряд ли возможен, но применительно к нелинейным моделям – весьма вероятен.



Итак, первая группа ограничений вызвана тем, что комплексные переменные производственных ресурсов лежат в первом квадранте, поскольку $K>0$ и $L>0$, то есть аргумент φ комплексной переменной ресурсов меняется в пределах от 0 до $\pi/2$. Если он равен нулю, то это означает, что ни одной единицы трудовых ресурсов для производства не привлекается. Если же он становится равным $\pi/2$, то это означает, что для производства привлекаются только трудовые ресурсы, а капитальные ресурсы равны нулю. Очевидно, что в реальности эти случаи встречаться не могут и оси координат мы должны исключить из области определения задачи.

Комплексные переменные производственных результатов по своему экономическому смыслу также не могут быть определены на всей комплексной плоскости и, хотя лежат на ней в более широких пределах, определяемых полярным углом, находящимся в пределах от 0 до $\frac{3}{4}\pi$, но за эти пределы выходить не могут. Таким образом, производственные результаты определены в первом и частично во втором квадрантах комплексной плоскости.

Если полярный угол $\theta$ комплексной переменной производственных результатов равен нулю, это означает, что издержки производства равны нулю, а валовая прибыль максимальна. Вряд ли можно вспомнить подобные ситуации в реальной экономической практике, поэтому ограничение в этой части следует записать как строгое неравенство. Поскольку во втором квадранте комплексной плоскости производственных результатов валовая прибыль, откладываемая по оси действительных чисел, становится отрицательной, то это означает работу предприятия в убыток – отрицательная валовая прибыль численно равна валовому убытку предприятия. Отрицательная валовая прибыль (убыток) по своему экономическому смыслу не может быть выше издержек производства: $-G \leq C$. В том случае, когда ни одна единица произведённого товара не реализована, валовая прибыль $G$ численно равна сумме понесённых на производство затрат $C$, а по знаку становится отрицательной. Именно в этом случае полярный угол производственных результатов становится равным $\frac{3}{4}\pi$. Случай, когда *-G=C* является редким, но всё же возможным явлением хозяйственной практики.

Поэтому любая модель производственной функции комплексных переменных, в том числе и степенная, должна быть дополнена условиями, налагаемыми на полярные углы комплексных переменных:

$$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \theta \le \frac{3\pi}{4}. \tag{7.18}$$

Однако, в силу периодичности полярных углов, более точно с позиций теории функций комплексного переменного это условие должно выглядеть так:

$$2\pi k < \varphi < 2\pi k + \frac{\pi}{2}, \qquad 2\pi k < \theta \le 2\pi k + \frac{3\pi}{4}.$$

Из всего множества чисел $k$ в силу экономического смысла переменных, будем использовать только $k=0$. К тому же степенная производственная функция комплексных переменных должна быть однолистной, иначе модель перестаёт отражать реальную экономическую ситуацию. Это означает, что показатель степени $b$ должен быть ограничен так, чтобы крайнему допустимому значению полярного угла производственных ресурсов $\varphi$ соответствовало крайнее допустимое значение полярного угла производственных результатов $\theta$. Так как для рассматриваемой степенной функции выполняется равенство $\theta=b\varphi$, то показатель степени должен удовлетворять условию:

$$0 < b\varphi \le \frac{3\pi}{4}. \tag{7.19}$$

Если показатель степени будет отрицательным $b<0$, то любое увеличение производственных ресурсов неминуемо приводит к уменьшению производственных результатов и наоборот – уменьшение трудовых и капитальных ресурсов приводит к увеличению результатов производства. При этом полярный угол производственных результатов становится отрицательным, что означает отрицательность издержек производства – ситуация в экономике невозможная. Поэтому мы рассматриваем только функции с положительными показателями степени.

Для степенной функции с действительными коэффициентами,



используемой в качестве модели производственных процессов, рост радиуса и полярного угла комплексной переменной производственных ресурсов (что означает рост трудовых ресурсов в большей степени, чем капитала) будет означать увеличение производственных результатов с опережающим ростом издержек производства над валовой прибылью. Если рассмотреть обратный экономический процесс – рост капитала в большей степени, чем трудовых ресурсов (что на комплексной плоскости производственных ресурсов означает уменьшение полярного угла с одновременным ростом радиуса переменной), то будем иметь вариант увеличения производственных результатов с опережающим ростом валовой прибыли над издержками производства.

Поскольку в большинстве реальных производственных процессов инвестиции в основной капитал ведут к усовершенствованию технологии производства и росту производительности труда, снижению процента брака и отходов производства, то это означает снижение издержек с одновременным увеличением валовой прибыли. А именно такой процесс и моделирует производственная степенная комплекснозначная функция с действительными коэффициентами. Если вдруг на таком производстве необходимо добиться быстрого увеличения объёмов производства, то тогда при сохранении капитальных ресурсов привлекается дополнительная рабочая сила, производство начинает работать не в одну, а в две или три смены. Понятно, что при таком использовании ресурсов необходимо установить дополнительные надбавки за работу во вторую и третью смену, значит, затраты на единицу труда увеличиваются, что ведёт к росту общих издержек производства. При этом валовая прибыль начинает уменьшаться. И этот процесс моделируется с помощью рассматриваемой производственной функции.

Следовательно, производственная степенная комплекснозначная функция с действительными коэффициентами по своим свойствам соответствует реальным производственным процессам. В ситуации стагнации производства эта модель также может быть использована, но это будет показано далее, а теперь рассмотрим свойства самой модели.

Производственную функцию (7.17) можно представить в тригонометрической форме:

$$G + iC = a\left(\sqrt{K^2 + L^2}\right)^b \left(\cos(b\,arctg\frac{L}{K}) + i\sin(b\,arctg\frac{L}{K})\right). \qquad (7.20)$$

Это позволяет нам вывести две простые формулы для расчёта валовой прибыли G и издержек производства C:

$$G = a\left(\sqrt{K^2 + L^2}\right)^b \cos(b\,arctg\frac{L}{K}). \qquad (7.21)$$

$$C = a\left(\sqrt{K^2 + L^2}\right)^b \sin(b\,arctg\frac{L}{K}). \qquad (7.22)$$

Эти формулы позволяют понять, как именно будут моделироваться прибыль и издержки при различных сочетаниях производственных ресурсов. Если производственные технологии остаются неизменными, а только увеличивается привлекаемые ресурсы, то это означает сохранение пропорций между ресурсами и постоянство полярного угла на комплексной плоскости производственных ресурсов (*arg(K+iL)=const*). При этом будет расти модуль комплексной переменной. Для такого случая, как следует из (7.21) и (7.22), валовая прибыль и валовые издержки растут вместе с ростом ресурсов с одинаковым темпом. Степень этого роста определяется действительными коэффициентами модели.

Одним из примечательных свойств степенной производственной функции комплексных переменных с действительными коэффициентами является то, что для нахождения значений коэффициентов функции (7.17) достаточно иметь лишь одно наблюдение за производственным процессом, поскольку (7.21) и (7.22) представляют собой систему двух уравнений с двумя неизвестными *a* и *b*, найти значения которых можно, используя формулы:

$$b = \frac{arctg\frac{C}{G}}{arctg\frac{L}{K}}. \qquad (7.23)$$

$$a = \exp\left(\ln\left(\sqrt{G^2 + C^2}\right) - \frac{arctg\frac{C}{G}}{arctg\frac{L}{K}}\ln\left(\sqrt{K^2 + L^2}\right)\right). \qquad (7.24)$$



Как можно заметить из (7.23), коэффициент *b* характеризует отношение двух общеизвестных экономических показателей – рентабельность по себестоимости $G/C$ и фондовооружённость труда $K/L$. Это обстоятельство даёт возможность рассматривать показатель степени модели в качестве одной из аналитических характеристик предлагаемой модели [5, 2008].

Поскольку мы рассматриваем свойства производственных функций комплексных переменных, то ознакомившись с особенностями поведения степенной комплекснозначной функции с действительными коэффициентами, хотелось бы определить и то, какой вид имеют для такой функции коэффициенты эластичности по ресурсам. Для этого необходимо вычислить первые производные функции по её переменным – труду и капиталу.Прежде всего, для вычисления производных, представим модель производственной функции (7.17) в экспоненциальной форме:

$$G + iC = a(K + iL)^b = a(Re^{i\theta})^b. \qquad (7.25)$$

Здесь:

$$R = \sqrt{K^2 + L^2}, \quad \theta = arctg\frac{L}{K}.$$

Теперь легко сгруппировать модуль модели и её полярный угол:

$$G + iC = aR^b e^{ib\theta}. \qquad (7.26)$$

С учётом этого модель степенной комплекснозначной производственной функции может быть представлена в тригонометрической форме так:

$$G + iC = aR^b[\cos(b\theta) + i\sin(b\theta)]. \qquad (7.27)$$

Это позволяет вычислить первую и вторую (если понадобится) частные производные комплекснозначной функции по ресурсам – капиталу и труду. Согласно условию Даламбера-Эйлера (Римана-Коши) для нахождения производной комплекснозначной функции достаточно взять производные по её действительной или мнимой части. Действительная часть модели (7.27) представима в виде:

$$\mathrm{Re}(G + iC) = aR^b\cos(b\theta) = U. \qquad (7.28)$$

Поэтому производную функции (7.17) по ресурсам можно найти так:

$$\frac{\partial(G+iC)}{\partial(K+iL)}=\frac{\partial U}{\partial K}-i\frac{\partial U}{\partial L}=\frac{\partial(aR^b\cos(b\theta))}{\partial K}-i\frac{\partial(aR^b\cos(b\theta))}{\partial L}. \quad (7.29)$$

Вычислим первую составляющую производной (7.29), а именно – $\frac{\partial(aR^b\cos(b\theta))}{\partial K}$ как производную сложной функции:

$$\frac{\partial(aR^b\cos(b\theta))}{\partial K}=\frac{\partial(aR^b)}{\partial K}\cos b\theta+\frac{\partial\cos(b\theta)}{\partial K}(aR^b). \quad (7.30)$$

Первая часть (7.30) будет иметь вид:

$$\frac{\partial(aR^b)}{\partial K}\cos(b\theta)=abR^{b-1}\frac{K}{\sqrt{K^2+L^2}}\cos(b\theta). \quad (7.31)$$

Или:

$$\frac{\partial(aR^b)}{\partial K}\cos(b\theta)=abR^{b-2}K\cos(b\theta). \quad (7.32)$$

Вторая часть (7.30) представляет собой производную косинуса аргумента по *K*. Её также можно вычислить:

$$\frac{\partial\cos(b\theta)}{\partial K}(aR^b)=-aR^b\sin(b\theta)\frac{\partial(b\theta)}{\partial K}=-aR^b\sin(b\theta)\frac{\partial(arctgb\frac{L}{K})}{\partial K}.$$

Применяя формулу вычисления производной арктангенса, окончательно имеем:

$$\frac{\partial\cos(b\theta)}{\partial K}(aR^b)=-abR^b\sin(b\theta)\frac{-L}{K^2(1+\frac{L^2}{K^2})}=abR^b\sin(b\theta)\frac{L}{R^2}=abR^{b-2}L\sin(b\theta). \quad (7.33)$$

Тогда частная производная степенной комплекснозначной производственной функции с действительными коэффициентами (7.30) по капиталу будет записана так:

$$\frac{\partial(aR^b\cos(b\theta))}{\partial K}=abR^{b-2}K\cos(b\theta)+abR^{b-2}L\sin(b\theta)=abR^{b-2}(K\cos(b\theta)+L\sin(b\theta)). \quad (7.34)$$



Также можно найти и частную производную степенной производственной функции (7.17) по труду: $\frac{\partial(aR^b\cos(b\theta))}{\partial L}$.

Поскольку эта производная является производной сложной функции, то её следует вычислить так:

$$\frac{\partial(aR^b\cos(b\theta))}{\partial L}=\frac{\partial(aR^b)}{\partial L}\cos(b\theta)+\frac{\partial\cos(b\theta)}{\partial L}(aR^b). \quad (7.35)$$

Первое слагаемое (7.35) с учётом производной модуля может быть представлено следующим образом:

$$\frac{\partial(aR^b)}{\partial L}\cos(b\theta)=abR^{b-1}\frac{L}{\sqrt{K^2+L^2}}\cos(b\theta)=abR^{b-2}L\cos(b\theta). \quad (7.36)$$

Второе слагаемое (7.35) включает в себя производную косинуса аргумента по труду. Эту производную также можно определить:

$$\frac{\partial\cos(b\theta)}{\partial L}(aR^b)=-abR^b\sin\theta\frac{\partial(arctg\frac{K}{L})}{\partial L}.$$

Вычисляя производную арктангенса, получим окончательно для этого слагаемого:

$$\frac{\partial\cos(b\theta)}{\partial L}(aR^b)=-abR^b\sin(b\theta)\frac{K}{K^2(1+\frac{L^2}{K^2})}=-abR^{b-2}K\sin(b\theta). \quad (7.37)$$

Тогда производная по труду будет иметь вид:

$$\frac{\partial(aR^b\cos(b\theta))}{\partial L}=abR^{b-2}L\cos(b\theta)-abR^{b-2}K\sin(b\theta)=abR^{b-2}(L\cos(b\theta)-K\sin(b\theta)). \quad (7.38)$$

Теперь можно получить искомую формулу первой производной рассматриваемой производственной функции по комплексному ресурсу (7.29):

$$\frac{\partial(G+iC)}{\partial(K+iL)} = abR^{b-2}(K\cos(b\theta)+L\sin(b\theta)) - iabR^{b-2}(L\cos(b\theta)-K\sin(b\theta)) .$$

Это громоздкое выражение легко упростить:

$$\frac{\partial(G+iC)}{\partial(K+iL)} = abR^{b-2}[(K\cos(b\theta)+L\sin(b\theta)-iL\cos(b\theta)+iK\sin(b\theta)] =$$
$$= abR^{b-2}[(K-iL)(\cos(b\theta)+i\sin(b\theta)]. \tag{7.39}$$

Поскольку

$$\cos(b\theta)+i\sin(b\theta)=e^{ib\theta},$$

а

$$R^{-2}(K-iL)=\frac{K-iL}{K^2+L^2}=\frac{1}{K+iL},$$

то (7.39) можно записать значительно проще:

$$\frac{\partial(G+iC)}{\partial(K+iL)} = abR^b e^{ib\theta}(K+iL)^{-1} = b(K+iL)^{-1}[aR^b e^{ib\theta}] . \tag{7.40}$$

Зная эту величину первой производной степенной комплекснозначной функции с действительными коэффициентами по комплексному аргументу, можно определить коэффициент эластичности этой функции. Он будет иметь вид:

$$\varepsilon = \frac{\partial(G+iC)}{\partial(K+iL)}\frac{K+iL}{G+iC} = b(K+iL)^{-1}[aR^b e^{ib\theta}]\frac{K+iL}{G+iC} = b\frac{aR^b e^{ib\theta}}{G+iC}\frac{K+iL}{K+iL} = b . \tag{7.41}$$

Итак, коэффициент эластичности степенной комплекснозначной функции с действительными переменными по комплексному ресурсу равен показателю степени функции. Это означает, что исследуемая модель обладает такой характеристикой – при одновременном увеличении производственных ресурсов на один процент, производственный результат увеличится на $b$ процентов.

Замечательные свойства моделей комплексных переменных раскрывающие дополнительные преимущества этих моделей в сравнении с моделями действительных переменных, проявляются в том, что мы можем, используя степенную комплекснозначную производственную функцию, определить и вклад каждой из



составляющих комплексного ресурса на каждую составляющую производственного результата – как на валовую прибыль $G$, так и на издержки производства $C$. Поскольку в реальной экономике возможно увеличение, например, только трудовых ресурсов при неизменности капитальных ресурсов, то важно получить ответ на вопрос о том, на сколько при этом изменятся валовая прибыль и издержки производства? Для ответа на поставленный вопрос необходимо вычислить коэффициенты эластичности комплексного результата по каждому из ресурсов – труду и капиталу.

Вначале вычислим, используя те же обозначения что и ранее, первую частную производную комплекснозначной функции по капиталу:

$$\frac{\partial(G+iC)}{\partial K} = \frac{\partial(aR^b\cos(b\theta))}{\partial K} + i\frac{\partial(aR^b\sin(b\theta))}{\partial K} . \tag{7.42}$$

Для первого слагаемого ранее в (7.34) было получено:

$$\frac{\partial(aR^b\cos(b\theta))}{\partial K} = abR^{b-2}(K\cos(b\theta)+L\sin(b\theta)) .$$

Опуская трудоёмкие вычисления подобно тем, которые указаны выше, для второго слагаемого (7.42) получим:

$$\frac{\partial(aR^b\cos(b\theta))}{\partial K} = abR^{b-2}(K\sin(b\theta)-L\cos(b\theta)) . \tag{7.43}$$

Подставляя полученные результаты в (7.42), определяем такой вид первой частной производной изучаемой функции по капиталу:

$$\frac{\partial(G+iC)}{\partial K} = abR^{b-2}[(K\cos(b\theta)+L\sin(b\theta))+i(K\sin(b\theta)-L\cos(b\theta))] . \tag{7.44}$$

Выражение в квадратных скобках может быть легко преобразовано:

$$K\cos(b\theta)+iK\sin(b\theta)-i(L\sin(b\theta)+L\cos(b\theta)) =$$
$$=(K-iL)(\cos(b\theta)+i\sin(b\theta))=(K-iL)e^{ib\theta}.$$

Множитель перед квадратными скобками (7.44) можно представить так:

$$abR^{b-2} = ab\frac{R^b}{K^2+L^2}$$

С учётом этого легко получить удобную для дальнейшего использования формулу первой частной производной комплексного производственного результата по капиталу:

$$\frac{\partial(G+iC)}{\partial K} = ab\frac{R^b}{K^2+L^2}(K-iL)e^{ib\theta} = b(aR^b e^{ib\theta})\frac{K-iL}{K^2+L^2}. \quad (7.45)$$

Откуда коэффициент эластичности степенной производственной функции комплексных переменных по капиталу:

$$\varepsilon_K = \frac{\partial(G+iC)}{\partial K}\frac{K}{G+iC} = b(aR^b e^{ib\theta})\frac{K-iL}{K^2+L^2}\frac{K}{aR^b e^{ib\theta}} = b(\frac{K^2}{K^2+L^2} - i\frac{LK}{K^2+L^2}). \quad (7.46)$$

Поскольку этот коэффициент эластичности является комплексным и его действительная часть характеризует влияние капитала на валовую прибыль, а мнимая составляющая – влияние капитала на издержки производства, следует рассматривать отдельно его действительную и мнимую части:

$$\varepsilon_K = \varepsilon_{GK} + i\varepsilon_{CK}, \quad (7.47)$$

Действительная часть комплексного коэффициента эластичности $\varepsilon_{GK}$ характеризует величину, на которую изменится валовая прибыль, если капитал увеличится на один процент:

$$\varepsilon_{GK} = b\frac{K^2}{K^2+L^2}. \quad (7.48)$$

В знаменателе действительной части комплексного коэффициента эластичности (7.47) находится величина, ранее названная масштабом производственных ресурсов. Очевидно, что дробь выражения (7.48) всегда меньше единицы, поэтому действительная часть коэффициента эластичности по капиталу, отражающая рост валовой прибыли, определяется значением показателя степени $b$. Поскольку показатель степени $b$ для данной функции характеризует общую эластичность комплексного производственного результата по комплексному производственному ресурсу (7.41), то (7.48) можно записать и так:



$$\varepsilon_{GK} = \varepsilon\frac{K^2}{K^2+L^2} \rightarrow \varepsilon = \varepsilon_{GK}(1+\frac{L^2}{K^2}). \quad (7.49)$$

Это означает, что коэффициент эластичности валовой прибыли по капиталу рассматриваемой производственной функции всегда меньше общего коэффициента эластичности.

Из (7.48) следует такая характеристика рассматриваемой производственной функции – увеличение капитального ресурса всегда в данной модели приводит к увеличению валовой прибыли – в большей или меньшей степени в зависимости от величины показателя степени $b$.

Рассмотрим теперь мнимую составляющую комплексного коэффициента эластичности производственной функции по капиталу. Она отражает влияние капитала на издержки производства и равна:

$$\varepsilon_{CK} = -b\frac{LK}{K^2+L^2} = -\varepsilon\frac{LK}{K^2+L^2}. \quad (7.50)$$

Дробь этого выражения всегда положительна, как и коэффициент $b$, поэтому мнимая составляющая комплексного коэффициента эластичности по капиталу всегда отрицательна. Это означает, что рассматриваемая модель описывает производственные процессы, при которых любое увеличение капитала ведёт к снижению издержек производства, то есть – к снижению себестоимости единицы продукции. А большинство реальных производственных процессов как раз и ведёт себя именно таким образом, поскольку увеличение капитала в основном приводит к росту производительности труда и как следствие – к снижению издержек. Степень снижения издержек производства определяется, как видно из (7.50) показателем степени производственной функции $b$ и значениями труда и капитала.

Поскольку коэффициент эластичности комплексного производственного результата по капиталу есть комплексное число, то оно может быть представлено в экспоненциальной форме. Для этого следует вычислить модуль комплексного числа и его полярный угол.

Модуль комплексного коэффициента эластичности (7.46) будет равен:

$$R_{\varepsilon K} = bK\,, \tag{7.51}$$

а его полярный угол:

$$\varphi_{\varepsilon K} = arctg\frac{L}{K}\,. \tag{7.52}$$

Поскольку сумма валовой прибыли и издержек представляет собой объём реализованной продукции, то в том случае, когда и валовая прибыль, и издержки производства приведены в результате предварительного масштабирования к валовому выпуску, сумма действительной и мнимой частей комплексного коэффициента эластичности по капиталу будет характеризовать эластичность выпуска по капиталу:

$$\varepsilon_{QK} = \varepsilon_{rk} + \varepsilon_{ik} = b\frac{K^2 - LK}{K^2 + L^2}\,. \tag{7.53}$$

Откуда со всей очевидностью следует, что коэффициент эластичности выпуска по капиталу может быть и отрицательной величиной, если числитель (7.53) отрицателен – для трудоёмких процессов. Но с ростом капитального ресурса при постоянстве трудового ресурса коэффициент эластичности выпуска по капиталу становится положительным.

Аналогично можно вычислить первую производную степенной производственной функции по труду, а на её основе определить формулу для вычисления коэффициента эластичности комплексного производственного результата по этому ресурсу. Опуская вычисления, аналогичные приведённым выше, представим итоговую формулу:

$$\varepsilon_L = \frac{\partial(G + iC)}{\partial L}\frac{L}{G + iC} = b\left(\frac{L^2}{K^2 + L^2} + i\frac{LK}{K^2 + L^2}\right). \tag{7.54}$$

И этому комплексному коэффициенту эластичности можно дать экономическую интерпретацию. Поскольку он является комплексным, то удобнее рассмотреть его действительную и мнимую части:

$$\varepsilon_L = \varepsilon_{GL} + i\varepsilon_{CL}\,. \tag{7.55}$$

Действительная часть комплексного коэффициента эластичности комплексного производственного результата по труду, которая отражает вклад труда в изменение валовой прибыли, равна:



$$\varepsilon_{GL} = b\frac{L^2}{K^2 + L^2} = \varepsilon\frac{L^2}{K^2 + L^2}\,. \tag{7.56}$$

Коэффициент эластичности валовой прибыли по труду всегда положителен и всегда меньше общего коэффициента эластичности ε, поскольку дробь выражения (7.56) всегда меньше единицы. Положительность коэффициента эластичности валовой прибыли по труду означает, что данная функция может использоваться в случае, когда рост трудовых ресурсов приводит и к росту валовой прибыли.

Мнимая составляющая комплексного коэффициента эластичности производственного результата по труду (7.54), которая отражает влияние труда на издержки производства, имеет вид:

$$\varepsilon_{CL} = b\frac{LK}{K^2 + L^2}\,. \tag{7.57}$$

Поскольку все составляющие этой части коэффициента эластичности положительны, то очевидно, что рост трудовых ресурсов неминуемо ведёт к росту издержек производства. Это также в точности соответствует реальной производственной ситуации – привлечение дополнительных трудовых ресурсов или рост затрат на оплату труда в стимулирующих целях уже занятого персонала увеличивает общую сумму производственных издержек.

Теперь необходимо рассмотреть вклад трудового ресурса на изменение производства в целом, то есть – на изменение объёма выпуска продукции. Для этого сложим две части коэффициента (7.54), оценивая вклад трудового ресурса в совместный рост и валовой прибыли, и издержек производства, предполагая вновь, что переменные отмасштабированы должным образом:

$$\varepsilon_{QL} = \varepsilon_{GL} + \varepsilon_{CL} = b\frac{L(L + K)}{K^2 + L^2}\,. \tag{7.58}$$

Это означает, что рост трудовых ресурсов на один процент увеличивает объём производства на указанную величину.

Если теперь рассматривать комплексный коэффициент эластичности производственного результата по труду (7.54) в экспоненциальной форме, то модуль этого комплексного числа будет равен:

$$R_{\varepsilon L} = bL \tag{7.59}$$

а полярный угол:

$$\varphi_{\varepsilon K} = arctg\frac{K}{L}. \tag{7.60}$$

Завершая исследование коэффициентов эластичности степенной производственной функции комплексной переменной с действительными коэффициентами, следует указать ещё на одно важное свойство комплексных коэффициентов эластичности производственного результата по ресурсам. Если сложить коэффициент эластичности по капиталу (7.46) с коэффициентом эластичности по труду (7.54), то их сумма даёт величину общего коэффициента эластичности (7.41):

$$\varepsilon = \varepsilon_K + \varepsilon_L = b(\frac{K^2}{K^2+L^2} - i\frac{LK}{K^2+L^2}) + b(\frac{L^2}{K^2+L^2} + i\frac{LK}{K^2+L^2}) = b.$$

Степенная комплекснозначная производственная функция с действительными коэффициентами обладает значительно более обширными аналитическими способностями для изучения производственного процесса, нежели производственные функции с действительными переменными. Если у аналогичной модели степенной производственной функции с действительными коэффициентами имеются только два коэффициента эластичности, являющимися показателями степени при ресурсах, то комплекснозначная модель даёт возможность рассчитать:

- общий коэффициент эластичности (7.41);
- комплексный коэффициент эластичности производственного результата по капиталу (7.47), который состоит из двух действительных коэффициентов эластичности (7.48) и (7.50);
- коэффициент эластичности выпуска $Q$ по капиталу (7.53),
- комплексный коэффициент эластичности производственного результата по труду (7.54) с двумя составляющими (7.56) и (7.57);
- коэффициент эластичности выпуска $Q$ по труду (7.61).

Всего – семь различных коэффициентов эластичности, отражающих самые разнообразные стороны влияния двух ресурсов на комплексный производственный результат и валовой выпуск.

Поскольку коэффициенты эластичности и коэффициенты степенной производственной функции с действительными коэффициентами могут быть найдены на статистических данных за каждый год наблюдения, их можно использовать и для анализа происходящих процессов в динамике, в том числе и для прогнозирования. Рассмотрим это на конкретном примере.



В табл. 7. 1 приведены исходные данные по экономике Великобритании в период с 1990 по 2010 год[2] (в относительных величинах) и результаты расчёта коэффициентов модели (7.23), (7.24) по этим данным.

*Табл. 7.1*

Исходные данные об экономике Великобритании и коэффициенты производственной функции

| *Годы, t* | $G_t/Q_1$ | $C_t/Q_1$ | $K_t/K_1$ | $L_t/L_1$ | $b_t$ | $a_t$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1990 | 0,869 | 0,131 | 1,000 | 1,000 | 1,810 | 0,469 |
| 1991 | 0,909 | 0,141 | 0,921 | 0,971 | 1,866 | 0,534 |
| 1992 | 0,947 | 0,144 | 0,888 | 0,949 | 1,888 | 0,584 |
| 1993 | 0,999 | 0,148 | 0,889 | 0,942 | 1,883 | 0,621 |
| 1994 | 1,063 | 0,152 | 0,954 | 0,950 | 1,814 | 0,626 |
| 1995 | 1,130 | 0,156 | 1,037 | 0,959 | 1,738 | 0,626 |
| 1996 | 1,207 | 0,164 | 1,114 | 0,968 | 1,679 | 0,634 |
| 1997 | 1,289 | 0,167 | 1,186 | 0,985 | 1,643 | 0,638 |
| 1998 | 1,368 | 0,174 | 1,336 | 0,994 | 1,552 | 0,625 |
| 1999 | 1,444 | 0,185 | 1,383 | 1,008 | 1,534 | 0,638 |
| 2000 | 1,517 | 0,195 | 1,428 | 1,021 | 1,519 | 0,651 |
| 2001 | 1,588 | 0,203 | 1,468 | 1,033 | 1,507 | 0,663 |
| 2002 | 1,672 | 0,214 | 1,543 | 1,040 | 1,477 | 0,674 |
| 2003 | 1,778 | 0,220 | 1,596 | 1,051 | 1,465 | 0,694 |
| 2004 | 1,872 | 0,237 | 1,713 | 1,062 | 1,423 | 0,696 |
| 2005 | 1,957 | 0,242 | 1,792 | 1,076 | 1,406 | 0,699 |
| 2006 | 2,071 | 0,258 | 1,941 | 1,088 | 1,365 | 0,701 |
| 2007 | 2,195 | 0,271 | 2,137 | 1,096 | 1,320 | 0,696 |
| 2008 | 2,249 | 0,265 | 2,062 | 1,099 | 1,344 | 0,723 |
| 2009 | 2,164 | 0,280 | 1,788 | 1,080 | 1,404 | 0,776 |
| 2010 | 2,279 | 0,288 | 1,865 | 1,073 | 1,378 | 0,799 |

Рассмотрим динамику вычисленных коэффициентов.

Как видно – коэффициент пропорциональности степенной комплекснозначной функции с действительными коэффициентами меняется во времени почти линейно. Исключением является на-

[2] http://www.ons.gov.uk/ons/index.html

чальный период наблюдения и перелом тенденции в 2008 кризисном году. Поскольку рассматривается возможность использования производственной функции для прогнозирования, то динамика коэффициента пропорциональности для производственной функции Великобритании может быть легко аппроксимирована и спрогнозирована с помощью линейного тренда с учётом тенденций последних лет. Сделать это можно, адаптировав модель линейного тренда методом неравномерного сглаживания.

Тогда, используя МНК и адаптируя полученную модель методом неравномерного сглаживания, для динамики коэффициента пропорциональности получим такой тренд:

$$\hat{a}_t = 0{,}014t - 27{,}312\,, \tag{7.61}$$

где $t$ – текущий год.

Изменение показателя степени $b$ имеет убывающий характер, приближающийся к линейной форме.

И в этом случае следует использовать модель линейного тренда с адаптацией его методом неравномерного сглаживания. Адаптированная модель тренда имеет вид:

$$b = 51{,}582 - 0{,}025t\,. \tag{7.62}$$

Будем выполнять точечные прогнозы, поскольку нашей задачей является демонстрация уникальных возможностей рассматриваемой производственной функции, а не выполнение конкретных прогнозов. С учётом полученных уравнений трендов (7.61) и (7.62) получим для Великобритании прогнозную модель производства на ближайшую перспективу:

$$\hat{C}_t + i\hat{G}_t = (0{,}014t - 27{,}312)(L_t + iK_t)^{(51{,}582-0{,}025t)}\,. \tag{7.63}$$

Полученную модель (7.63) можно использовать для многовариантных прогнозных расчётов показателей экономики Великобритании. Можно, например, решить прямую задачу – по планируемым значениям затрат капитала и труда в 2011 году с помощью (7.63) спрогнозировать чистый и промежуточные продукты Великобритании, а на их основе – валовой внутренний продукт. А можно решить и обратную задачу – по желательным для экономики страны значениям чистого и промежуточного продукта определить – какие именно для достижения такого результата нужны производственные ресурсы.



Рассмотрим вначале прямую задачу. В нашем распоряжении имеются фактические данные по основному капиталу Великобритании и количеству занятых в экономике этой страны за 2011 год[3]. В безразмерных относительных величинах, используемых в табл. 7.1, они составляют для капитала $K/K_1=1{,}84111$ (что составляет 98,73% от значения показателя 2010 года) и для числа занятых $L/L_1$= 1,07828 (что составляет 100,54% от значения показателя 2010 года).

С помощью модели (7.63) были получены прогнозы чистого и промежуточного продукта, а также ВВП Великобритании на этот год. Верификацию прогноза проведём с помощью модели экспоненциального сглаживания, отдавая себе отчёт в том, что при такой динамике оптимальные значения постоянной сглаживания будут находиться в запредельном множестве ($1 \le \alpha < 2$). Результаты расчётов и фактические данные сведены в табл. 7.2.

*Табл. 7.2*

Прогноз развития экономики Великобритании

| | *Факт* | *Прогноз моделью (7.63)* | *Ошибка прогноза, %* | *Прогноз методом экспоненциального сглаживания (оптимальное α)* | *Ошибка прогноза, %* |
|---|---|---|---|---|---|
| *Чистый продукт, $G_t/Q_1$* | 2,395 | 2,329 | 2,74 | 2,457 (α=1,95) | 2,58 |
| *Промежуточный продукт, $C_t/Q_1$* | 0,299 | 0,298 | 0,01 | 0,287 (α=1,44) | 15,67 |
| *Валовой внутренний продукт, $Q_t/Q_1$* | 2,694 | 2,627 | 1,85 | 2,743 (α=1,98) | 3,75 |

Из табл. 7.2 видно, что прогноз по модели комплекснозначной производственной функции очень близок к реальным значениям – по чистому продукту ошибка оказалась менее 3%, по валовому внутреннему продукту – менее 2%, а промежуточный продукт спрогнозирован почти точно. Модель экспоненциального сглаживания точнее спрогнозировала размер чистого продукта, но хуже – остальные показатели. Особенно плохо она спрогнозировала промежуточный продукт, в то время как комплекснозначная степенная

[3] http://www.ons.gov.uk/ons/index.html

производственная функция с действительными коэффициентами даёт почти абсолютную точность прогноза. Процедура ретропрогноза показала возможность использования на практике предлагаемого метода прогнозирования. С помощью модели (7.63) можно решать и другие задачи, например, определить, какими будут экономические показатели экономики государства если увеличить инвестиции в основной капитал или же увеличить число занятых и т.п.

Рассмотрим теперь обратную задачу, ведь особенностью моделей комплексных переменных является ещё и возможность построения обратных производственных функций. Для модели (7.63) это означает, что возможно решить другую задачу (обратную данной), а именно – определить потребные размеры основных производственных ресурсов для достижения поставленных производственных целей. Обратная к (7.63) функция будет иметь такой вид:

$$\hat{L}_t + i\hat{K}_t = \left(\frac{C_t + iG_t}{0{,}014t - 27{,}312}\right)^{\frac{1}{51{,}582-0{,}025t}}. \qquad (7.64)$$

С её помощью можно решать различные задачи, например, получить ответ на вопрос: как должны измениться производственные ресурсы в 2015 году, если в экономике страны желательно оставить промежуточный продукт на прежнем уровне, а чистый продукт увеличить на 20%?

В терминах рассматриваемой задачи это означает следующее – промежуточный продукт в 2015 году ($C/Q_1$) остаётся равным *0,288*, а чистый продукт ($G/Q_1$) увеличивается по сравнению с 2010 годом на *20*%, то есть – $G/Q_1 = 2{,}279*1{,}20=2{,}735$.

К 2015 году коэффициент пропорциональности прогнозируется на уровне $a=0{,}898$, а показатель степени – $b=1{,}207$. Подставляя эти числа в модель (7.64), получим прогнозируемые при данном уровне экономического и технологического развития Великобритании производственные ресурсы:

$$\hat{L}_{2015} + i\hat{K}_{2015} = \left(\frac{0{,}288 + i2{,}735}{0{,}898}\right)^{\frac{1}{1{,}207}} = 0{,}321 + i3{,}046. \qquad (7.65)$$

Это означает, что для решения поставленной задачи необходимо капитальные ресурсы по сравнению с 2015 годом увеличить в (*3,046/1,865*)=1,63 раза, а число занятых в производстве сократить



в (*1,073/0,321*)=5,3 раза. Из полученных расчётных значений со всей очевидностью вытекает невозможность достижения поставленных значений чистого и промежуточного продукта страны.

Следует обратить внимание на то, что в данном исследовании не ставилась задача получения каких-либо экономических прогнозов и их обсуждение. Здесь только рассматривается новая модель производственной функции комплексных переменных и новый метод её использования для задач экономического прогнозирования. При необходимости выполнения тщательных экономических прогнозов следовало бы использовать для прогнозирования динамики коэффициентов комплекснозначной производственной функции более сложные методы и модели прогнозирования.

Рассмотрим применение коэффициентов эластичности для анализа эффективности промышленного производства на примере КОО «Предприятие Эрдэнэт» (Монголия) за 1991-2012 годы (табл. 7.3).

Попытка построить производственную функцию Кобба-Дугласа не увенчалась успехом, поскольку показатели степени выходят за границы, которые, как известно, лежат в пределах от нуля до единицы (второй столбец табл. 7.3). А вот построение степенной производственной комплекснозначной функции оказалось вполне удачным. И показатель степени, и коэффициенты эластичности оказались довольно устойчивыми в своих тенденциях. Исключение составляет 1998 год, когда предприятие получило убыток – в этот год все расчётные показатели претерпели существенное изменение.

Дадим интерпретацию полученным значениям.

Показатель степени, который характеризует эластичность комплексного производственного результата по комплексному ресурсу (третий столбец табл. 7.3), за рассматриваемый период колеблется около средней арифметической, равной 0,722 ($\sigma=0{,}173$). При этом ряд данных этого коэффициента эластичности всё же имеет некоторую тенденцию к росту, которая вполне может быть описана с помощью модели линейного тренда:

$$\varepsilon_t = 0{,}6219 + 0{,}0085t, \quad t = T - 1990. \qquad (7.66)$$

Теперь, например, для целей многовариантного прогнозирования можно использовать степенную производственную функцию с меняющимся во времени по тренду (7.66) показателем степени.

Рост коэффициента эластичности свидетельствует о том, что отдача комплексного ресурса возрастает во времени.

*Табл. 7.3*

Коэффициенты эластичности производственных функций

| Год | Показатель степени ПФ Кобба-Дугласа | Коэффициенты эластичности комплекснозначной производственной функции (1) | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $b=\varepsilon$ | $\varepsilon_{GK}$ | $\varepsilon_{CK}$ | $\varepsilon_{GL}$ | $\varepsilon_{CL}$ |
| 1991 | 0,1186 | 0,791 | 0,000006 | -0,002239 | 0,791 | 0,00224 |
| 1992 | 1,2319 | 0,495 | 0,000000 | -0,000283 | 0,495 | 0,00028 |
| 1993 | 1,5205 | 0,505 | 0,000000 | -0,000068 | 0,505 | 0,00007 |
| 1994 | 0,5623 | 0,617 | 0,000000 | -0,000122 | 0,617 | 0,00012 |
| 1995 | 3,3731 | 0,457 | 0,000000 | -0,000192 | 0,457 | 0,00019 |
| 1996 | 0,1870 | 0,755 | 0,000002 | -0,001208 | 0,755 | 0,00121 |
| 1997 | 0,2157 | 0,748 | 0,000003 | -0,001597 | 0,748 | 0,00160 |
| ***1998*** | ***244369,8*** | ***-0,860*** | ***-0,000003*** | ***0,001710*** | ***-0,860*** | ***-0,00171*** |
| 1999 | 0,0253 | 0,959 | 0,000003 | -0,001806 | 0,959 | 0,00181 |
| 2000 | 0,1843 | 0,741 | 0,000002 | -0,001305 | 0,741 | 0,00131 |
| 2001 | 0,0244 | 0,971 | 0,000003 | -0,001812 | 0,971 | 0,00181 |
| 2002 | 0,0515 | 0,891 | 0,000003 | -0,001760 | 0,891 | 0,00176 |
| 2003 | 0,1778 | 0,768 | 0,000003 | -0,001595 | 0,768 | 0,00159 |
| 2004 | 2,7753 | 0,503 | 0,000002 | -0,001107 | 0,503 | 0,00111 |
| 2005 | 4,8537 | 0,462 | 0,000004 | -0,001284 | 0,462 | 0,00128 |
| 2006 | 4,3905 | 0,543 | 0,000009 | -0,002196 | 0,543 | 0,00220 |
| 2007 | 1,2117 | 0,726 | 0,000021 | -0,003872 | 0,726 | 0,00387 |
| 2008 | 0,1664 | 0,968 | 0,000046 | -0,006700 | 0,968 | 0,00670 |
| 2009 | 0,3198 | 0,838 | 0,000032 | -0,005204 | 0,838 | 0,00520 |
| 2010 | 0,2899 | 0,901 | 0,000058 | -0,007238 | 0,901 | 0,00724 |
| 2011 | 1,5943 | 0,702 | 0,000062 | -0,006596 | 0,702 | 0,00660 |
| 2012 | 0,5873 | 0,819 | 0,000096 | -0,008871 | 0,819 | 0,00887 |

Эластичность прибыли по капиталу $\boldsymbol{\varepsilon_{GK}}$ характеризует величину, на которую увеличится прибыль, если капитал увеличивается на единицу. Как следует из четвёртого столбца табл. 7.3 этот показатель в последние годы имеет тенденцию к экспоненциальному росту:

$$\varepsilon_{\mathrm{GK}} = 0,00000008e^{0,3315t}. \qquad (7.67)$$

Это означает, что отдача капитальных ресурсов на предприятии в последние годы возросла.



Эластичность себестоимости по капиталу $\boldsymbol{\varepsilon_{CK}}$ в рассматриваемой модели по определению отрицательна. То есть, данная производственная функция описывает ситуацию, когда с ростом капитала себестоимость уменьшается. Как можно заметить из пятого столбца табл. 7.3, этот коэффициент эластичности со временем уменьшает свои значения. Это означает, что рост капитальных затрат приводит ко всё большему уменьшению себестоимости, причём эта тенденция может быть описана линейным трендом:

$$\varepsilon_{CK} = 0,0011 - 0,0003t. \qquad (7.68)$$

Таким образом, можно утверждать на основе анализа коэффициентов эластичности производственного результата по капиталу, что эффективность использования капитальных ресурсов на предприятии повышается.

Рассмотрим теперь влияние труда на производственный результат. Прежде всего – коэффициент эластичности прибыли по труду $\boldsymbol{\varepsilon_{GL}}$ (шестой столбец табл. 7.3). В целом этот показатель имеет незначительную тенденцию к росту, то есть – со временем каждая единица затраченного труда приводит ко всё возрастающему объёму прибыли. Эта тенденция также может быть описана моделью тренда:

$$\varepsilon_{GL} = 0,6249 + 0,0088t. \qquad (7.69)$$

Влияние труда на издержки производства отражает последний показатель, приведённый в табл. 7.3, – коэффициент эластичности издержек по труду $\boldsymbol{\varepsilon_{CL}}$. Он показывает, насколько процентов увеличатся издержки производства, если затраты труда увеличатся на один процент. Анализ последнего столбца табл. 1 показывает, что этот показатель нелинейно увеличивается во времени, начиная с 2003 года. Это свидетельствует о том, что рост затрат на труд со временем существенно увеличивает себестоимость производства, а это значит, что предприятию следует обратить особое внимание на повышение эффективности и производительности труда. В целом ряд значений коэффициента эластичности издержек по труду может быть описан моделью квадратичного тренда:

$$\varepsilon_{CL} = 0,0018 \text{ - } 0,0004t + 0,005t^2. \qquad (7.70)$$

Итак, если влияние капитальных ресурсов на производственный результат повышает эффективность производства, то влияние труда на производственный результат не столь однозначно – положительно влияя на прибыль, он в то же время увеличивает и издержки производства, причём последняя тенденция носит опережающий характер по сравнению с первой. Для повышения эффективности производства руководству предприятия следует обратить особое внимание на вопросы организации труда.

А теперь сравним возможности производственной функции комплексных переменных с возможностями производственных функций действительных переменных. В этой области чаще всего используется «неоклассическая производственная функция» вида

$$Q = AK^{\alpha} L^{\beta}. \tag{7.71}$$

Здесь $Q = C+G$, – валовой выпуск промышленной продукции,

$A, \alpha, \beta$ – коэффициенты пропорциональности, относительно которых делается предположение о том, что $0<\alpha<1,\ 0<\beta<1$.

Из теории производственных функций известно, что показатель степени $\alpha$ характеризует коэффициент эластичности выпуска по капиталу:

$$\varepsilon_{Q/K} = \frac{\Delta Q / Q}{\Delta K / K} = \alpha, \tag{7.72}$$

а показатель степени $\beta$ характеризует коэффициент эластичности выпуска по труду:

$$\varepsilon_{Q/L} = \frac{\Delta Q / Q}{\Delta L / L} = \beta, \tag{7.73}$$

Сразу же можно обратить внимание на то, что в отличие от коэффициентов эластичности производственной функции комплексной переменной эти коэффициенты невозможно вычислить на одном наблюдении – нужны как минимум два наблюдения чтобы вычислить приращения. А на практике поступают и того проще – с помощью МНК вычисляют значения коэффициентов функции (7.71) на всём имеющемся множестве наблюдений и получают некие усреднённые значения коэффициентов эластичности для всего множества, исключая тем самым динамическую оценку.

Таким образом, использование комплекснозначных производственных функций существенно расширяет арсенал методов экономиста и вооружает его более тонким инструментом исследования.



# 8. Степенная, логарифмическая и показательная производственные функции с комплексными коэффициентами

Степенная производственная функция комплексного переменного с действительными коэффициентами, как было показано выше, обладает замечательными свойствами соответствия реальным производственным процессам. Её семь коэффициентов эластичности существенно расширяют аналитический инструментарий экономиста. Но реальная действительность значительно богаче и многообразнее, и это многообразие только частично описывается степенной моделью комплексной переменной с действительными коэффициентами. Как следует из выводов предыдущего параграфа, эта модель описывает процессы и с возрастающей отдачей ресурсов, и с убывающей отдачей ресурсов, и с постоянной их отдачей. Но ведь встречаются ситуации кризисного производства или цикличного производства и др. Поэтому, несмотря на то, что модель (7.17) во многом является универсальной, она не всегда может давать лучшие результаты моделирования производства.

Модель с действительными коэффициентами (7.17) является одной из самых простых в классе степенных производственных функций комплексных переменных. Наиболее общей в этом классе возможных степенных производственных функций комплексных переменных является функция с комплексными переменными (7.16):

$$G + iC = \left(a_0 + ia_1\right)\left(K + iL\right)^{\left(b_0 + ib_1\right)}. \tag{8.1}$$

Из этой наиболее общей функции, варьируя составом четырёх коэффициентов, можно выделить самые разнообразные подвиды, одним из которых является степенная производственная комплекснозначная функция с действительными коэффициентами (если мнимые части комплексных коэффициентов равны нулю), а другим – линейная функция комплексных переменных (когда показатель степени равен действительному числу – единице).

Моделируемые производственные процессы многообразны, поэтому можно предполагать, что в различных случаях наилучшим может быть один из подвидов степенных функций. В этой связи возникает вопрос: как в каждом конкретном случае выбрать из указанного многообразия производственных функций одну, наилучшую? Для этого мы рекомендуем следующую процедуру. С помощью МНК находятся параметры общей степенной функции с комплексным коэффициентом пропорциональности и комплексным показателем степени (8.1). Исходя из того, чему равны найденные с помощью МНК коэффициенты $a_0$, $a_1$, $b_0$ и $b_1$, исследователь может выбирать, какую производственную функцию ему использовать при моделировании. Например, если $b_1 \to 0$ и $a_1 \to 0$, то, исходя из принципа простоты, в моделировании стоит использовать степенную производственную функцию комплексного переменного с вещественными коэффициентами вида:

$$G + iC = a_0 \left(K + iL\right)^{b_0}.$$

Если значения коэффициентов степени близки к нулю, стоит использовать простую линейную функцию комплексных переменных:

$$G + iC = \left(a_0 + ia_1\right)\left(K + iL\right).$$

Поскольку степенные комплекснозначные функции с комплексными коэффициентами могут оказаться наилучшими для моделирования каких-нибудь производственных процессов, то следует более тщательно изучить её свойства, для чего выделим из равенства (8.1) действительную и мнимую части:

$$G = f\left(K, L\right),$$

$$C = g\left(K, L\right)$$

В формуле (8.1) комплексную переменную $\left(K + iL\right)^{\left(b_0 + ib_1\right)}$ можно представить в виде: $e^{\left(b_0 + ib_1\right)\ln\left(K + iL\right)}$. Теперь формула (8.1) примет вид:

$$G + iC = \left(a_0 + ia_1\right)e^{b_0 \ln\left(K + iL\right) + ib_1 \ln\left(K + iL\right)}. \qquad (8.2)$$

Сумму произведений в степени можно преобразовать с учётом свойств логарифмов комплексных чисел, используя их главные значения:



$$G + iC = \left(a_0 + ia_1\right)e^{b_0 \ln\left(\sqrt{K^2 + L^2}\right) + ib_0 \operatorname{arctg}\left(\frac{L}{K}\right) + ib_1 \ln\left(\sqrt{K^2 + L^2}\right) - b_1 \operatorname{arctg}\left(\frac{L}{K}\right)}. \qquad (8.3)$$

Теперь, группируя действительную и мнимую части степени комплексной переменной, можно получить удобную для дальнейшего исследования формулу:

$$G + iC = \left(a_0 + ia_1\right)e^{b_0 \ln\left(\sqrt{K^2 + L^2}\right) - b_1 \operatorname{arctg}\left(\frac{L}{K}\right)} e^{i\left(b_0 \operatorname{arctg}\left(\frac{L}{K}\right) + b_1 \ln\left(\sqrt{K^2 + L^2}\right)\right)}, \qquad (8.4)$$

в правой части которой перемножаются комплексный коэффициент $\left(a_0 + ia_1\right)$ и комплексная переменная, обозначаемая для простоты записи как $Re^{i\varphi}$. То есть:

$$G + iC = \left(a_0 + ia_1\right)Re^{i\varphi}, \qquad (8.5)$$

где:

$$R = e^{b_0 \ln\left(\sqrt{K^2 + L^2}\right) - b_1 \operatorname{arctg}\left(\frac{L}{K}\right)}, \qquad (8.6)$$

$$\varphi = b_0 \operatorname{arctg}\left(\frac{L}{K}\right) + b_1 \ln\left(\sqrt{K^2 + L^2}\right). \qquad (8.8)$$

Теперь, если представить модель (8.5) в тригонометрической форме и раскрыть скобки, после группировки действительной и мнимой частей, получим:

$$G + iC = R\left(\left(a_0 \cos\varphi - a_1 \sin\varphi\right) + i\left(a_0 \sin\varphi + a_1 \cos\varphi\right)\right). \qquad (8.9)$$

Что означает выполнение двух равенств:

$$G = R\left(a_0 \cos\varphi - a_1 \sin\varphi\right), \qquad (8.10)$$

$$C = R\left(a_0 \sin\varphi + a_1 \cos\varphi\right). \qquad (8.11)$$

Таким образом, для вычисления прибыли G и издержек производства C исследователю достаточно воспользоваться формулами (8.10) и (8.11).

По экономическому смыслу рассматриваемой задачи, издержки производства не могут быть отрицательными, а прибыль – может (работа в убыток).

Это означает, что (8.11) накладывает ограничения на пределы изменения коэффициентов комплексного коэффициента пропорциональности:

$$a_0 \sin\varphi + a_1 \cos\varphi > 0 \rightarrow tg\varphi > -\frac{a_1}{a_0}, \qquad (8.12)$$

где $\varphi$ вычисляется из (8.8).

Приведём без доказательства (в силу значительной громоздкости вывода) следующее утверждение: коэффициент эластичности степенной комплекснозначной производственной функции с комплексными коэффициентами равен показателю степени этой функции:

$$\varepsilon = b_0 + ib_1. \qquad (8.13)$$

Из формулы коэффициента эластичности следует:

$$\Delta y = \varepsilon_{\acute{o}\tilde{o}} y \frac{\Delta x}{x}. \qquad (8.14)$$

Или:

$$\Delta(G+iC) = (b_0 + ib_1)(G+iC)\frac{\Delta(K+iL)}{K+iL}. \qquad (8.15)$$

Откуда можно найти ответ на вопрос – какой процесс изменения валовой прибыли и издержек производства при изменении производственных ресурсов на один процент моделирует степенная производственная функция с комплексными коэффициентами:

$$\begin{cases} \Delta G = (b_0 G - b_1 C)\dfrac{\Delta KK + \Delta LL}{K^2 + L^2} + (b_0 C + b_1 G)\dfrac{\Delta KL - \Delta LK}{K^2 + L^2}, \\ \Delta C = (b_0 C + b_1 G)\dfrac{\Delta KK + \Delta LL}{K^2 + L^2} + (b_0 G - b_1 C)\dfrac{(\Delta LK - \Delta KL)}{K^2 + L^2}. \end{cases} \qquad (8.16)$$

Как видно из полученных равенств, и валовая прибыль, и издержки производства при различных сочетаниях значений коэффициентов комплексного показателя степени, ресурсов и результатов могут как уменьшаться с ростом ресурсов, так и увеличиваться. В отличие от степенной функции с действительными коэффициентами, коэффициент эластичности функции с комплексным показателем степени мало что говорит о направлении изменения комплексного результата при увеличении производственных ресурсов на один процент. Всё определяется как сочетанием значений действительной и мнимой части комплексного показателя степени, так и величинами ресурсов и результатов.



Но поскольку это различное сочетание позволяет моделировать многообразные производственные процессы, то всё это говорит о том, что у степенной комплекснозначной функции с комплексными коэффициентами довольно высокие идентификационые свойства. Она описывает разнообразные производственные процессы – от эффективных, до убыточных; от процессов с возрастающей отдачей ресурсов, до процессов с убывающей отдачей ресурсов.

Если на практике требуется провести расчёты объёмов производства, а не прибыли и издержек организации, можно, помня, что при правильном масштабировании $Q = C + G$, вывести формулу нахождения объёма выпуска организации для данной производственной функции. Складывая для этой цели (8.7) и (8.8), получим:

$$Q = G + C = R\left(a_0 \cos\varphi - a_1 \sin\varphi\right) + R\left(a_0 \sin\varphi + a_1 \cos\varphi\right),$$

или, что то же самое:

$$Q = R\left(\left(a_0 - a_1\right)\sin\varphi + \left(a_0 + a_1\right)\cos\varphi\right). \qquad (8.17)$$

Эта функция будет иметь иные коэффициенты эластичности, чем те, которые вычислялись в предыдущем параграфе для степенной комплекснозначной модели с действительными коэффициентами. Поскольку они не имеют такой же ясный смысл, как те, что рассматривались в предыдущем параграфе, то их вычисление здесь не является уместным.

Всё, сказанное выше, показывает, что степенная комплекснозначная производственная функция с комплексными коэффициентами может выступать мощным инструментам анализа и моделирования производственных процессов.

В теории производственных функций из всего множества нелинейных моделей экономисты не случайно отдают предпочтение именно степенным моделям – они удобны в использовании и имеют простую экономическую интерпретацию. То же самое можно сказать и о производственных функциях комплексных переменных: степенные функции и удобны в использовании, и имеют простую интерпретацию своих параметров. Тем не менее, в реальной экономике возможны самые разные ситуации, когда и эти модели будут плохо аппроксимировать реальное производство. В таком случае необходимо будет использовать производственные функции иной формы. Одна из таких альтернативных моделей – это модель логарифмической производственной функции комплексных переменных. Рассмотрим её свойства и особенности практического применения.

В общем виде производственная логарифмическая функция комплексных переменных может быть записана так:

$$G_t + iC_t = (a_0 + ia_1) + (b_0 + ib_1)\ln(K_t + iL_t) . \quad (8.18)$$

Свободный член этого равенства имеет простой смысл – он корректирует начальные условия модели к реальным значениям переменных. На этом его вклад в моделирование производственной ситуации и заканчивается. Поэтому рассмотрим без ущерба для общности модель без свободного члена:

$$G_t + iC_t = (b_0 + ib_1)\ln(K_t + iL_t) . \quad (8.19)$$

Свойства этой модели раскрываются полно, если привести логарифм комплексной переменной к арифметической форме и перемножить полученное значение на комплексный коэффициент пропорциональности:

$$G_t + iC_t = (b_0 + ib_1)(\ln\sqrt{K_t^2 + L_t^2} + iarctg\frac{L_t}{K_t}) .$$

В результате будет получена такая форма записи:

$$G_t + iC_t = (b_0 \ln\sqrt{K_t^2 + L_t^2} - b_1 arctg\frac{L_t}{K_t}) + i(b_1 \ln\sqrt{K_t^2 + L_t^2} + b_0 arctg\frac{L_t}{K_t}) , \quad (8.20)$$

откуда легко получаются два равенства, характеризующие вещественные и мнимые части модели:

$$\begin{cases} G_t = b_0 \ln\sqrt{K_t^2 + L_t^2} - b_1 arctg\dfrac{L_t}{K_t}, \\ C_t = b_1 \ln\sqrt{K_t^2 + L_t^2} + b_0 arctg\dfrac{L_t}{K_t}. \end{cases} \quad (8.21)$$

При положительных значениях коэффициентов с ростом трудовых затрат растут издержки производства, а валовая прибыль



в зависимости от значений коэффициентов и масштаба переменных может также расти, но значительно меньше, чем издержки. Но возможен и другой вариант поведения этой функции в данных условиях, когда коэффициент $b_0 << b_1$ – тогда с ростом трудовых ресурсов валовая прибыль снижается.

При росте капитальных ресурсов и положительности коэффициентов модели растут и валовая прибыль, и издержки производства.

Но возможна ситуация, когда коэффициенты модели принимают и отрицательные значения. Например, при отрицательности коэффициента $b_1$ валовая прибыль будет расти, если наблюдается рост трудовых ресурсов, а влияние капитала неоднозначно – может вести к росту валовой прибыли, а может вести и к падению её значений. При этом также неоднозначно начинают вести себя издержки производства – с ростом затрат трудовых ресурсов они могут и увеличиваться, и уменьшаться. А вот рост капитальных ресурсов однозначно ведёт к снижению издержек производства.

Поскольку модель (8.19) имеет всего два коэффициента, то применительно к комплекснозначным функциям это означает возможность оценки их значений на одном статистическом наблюдении. Действительно, из (8.19) со всей очевидностью следует, что:

$$b_0 + ib_1 = \frac{G_t + iC_t}{\ln(K_t + iL_t)} = \frac{G_t + iC_t}{\ln\sqrt{K_t^2 + L_t^2} + iarctg\dfrac{L_t}{K_t}} . \quad (8.22)$$

Умножив числитель и знаменатель правой части равенства на величину, сопряжённую знаменателю, получим:

$$b_0 + ib_1 = \frac{G_t \ln\sqrt{K_t^2 + L_t^2} + C_t arctg\dfrac{L_t}{K_t} + i(C_t \ln\sqrt{K_t^2 + L_t^2} - G_t arctg\dfrac{L_t}{K_t})}{\ln^2\sqrt{K_t^2 + L_t^2} + arctg^2\dfrac{L_t}{K_t}} . \quad (8.23)$$

Поскольку левые и правые части комплексного равенства означает одновременное равенство друг другу вещественных и мнимых составляющих, получим формулы для вычисления каждого из коэффициентов на наблюдении $t$:

$$b_0 = \frac{G_t \ln\sqrt{K_t^2 + L_t^2} + C_t arctg\frac{L_t}{K_t}}{\ln^2\sqrt{K_t^2 + L_t^2} + arctg^2\frac{L_t}{K_t}},$$

$$b_1 = \frac{C_t \ln\sqrt{K_t^2 + L_t^2} - G_t arctg\frac{L_t}{K_t}}{\ln^2\sqrt{K_t^2 + L_t^2} + arctg^2\frac{L_t}{K_t}}. \qquad (8.24)$$

Мы не будем вычислять коэффициенты эластичности логарифмической комплекснозначной производственной функции, поскольку они не имеют такой простой вид и такую яркую экономическую интерпретацию, как в случае со степенной производственной функцией с действительными коэффициентами. А раз так, то коэффициент эластичности не даст ничего нового для понимания свойств этой модели.

Завершая рассмотрение комплекснозначных функций, которые могут использоваться как модели производственных функций, обратим внимание на свойства и особенности применения показательной производственной функции. Эта функция может иметь самые различные основания при показателе степени, но свойства функции при этом не меняются. Меняется лишь степень сложности использования каждой модели. Очевидно, что меньше всего хлопот доставит показательная функция, основанием которой выступает число $e$ – ведь практически всегда мы использовали экспоненциальную форму записи комплексных переменных для того, чтобы понять свойства модели. Поэтому без особого ущерба для общности постановки задачи будем рассматривать как пример показательной функции модель экспоненциальной комплекснозначной функции. Эта модель в общем виде будет записана так:

$$G_t + iC_t = (a_0 + ia_1)e^{(b_0+ib_1)(K_t+iL_t)}. \qquad (8.25)$$

Самый простой вариант этой модели – модель с действительными коэффициентами, представляет собой простую функцию, не вызывающую особого интереса:

$$G_t + iC_t = a_0 e^{b_0(K_t+iL_t)}. \qquad (8.26)$$



Действительно, группируя переменные, составляющие модуль и полярный угол правой части равенства, получим:

$$G_t + iC_t = a_0 e^{b_0 K_t} e^{ib_0 L_t}. \qquad (8.27)$$

Обращаясь теперь к тригонометрической форме записи, получим для вещественной и мнимой частей равенства:

$$\begin{cases} G_t = a_0 e^{b_0 K_t}\cos(b_0 L_t), \\ C_t = a_0 e^{b_0 K_t}\sin(b_0 L_t). \end{cases} \qquad (8.28)$$

То есть, при положительных значениях коэффициента $b_0$, с ростом капитала от нулевого значения растёт масштаб производства, а значит, будут расти и валовая прибыль, и издержки производства, причём этот рост будет сохранять пропорции между ними. Иначе говоря, рост объёмов производства сохраняет неизменной рентабельность производства. На реальном производстве это возможно в ситуации, когда фондовооружённость труда мала, и её рост существенно влияет на производительность труда. При этом существует некоторый контроль за ценообразованием.

С ростом же от нуля трудового ресурса увеличивается полярный угол, а масштаб производства меняться не будет, если капитал неизменен. Это означает рост издержек производства и уменьшение валовой прибыли. Нельзя забывать и о том, что периодические функции могут принимать как положительные, так и отрицательные значения. Это говорит о том, что для моделирования производственной ситуации необходимо либо центрировать исходные переменные, тогда они будут принимать и отрицательные, и положительные значения, либо налагать ограничения на коэффициент $b_0$, исходя из экономического смысла задачи. Вот, пожалуй, и всё, что можно сказать об этой функции.

Если теперь вместо действительного коэффициента пропорциональности в степени рассмотреть ситуацию, когда коэффициент пропорциональности мнимый, т.е. $b_0=1, b_1\neq 0$, то произойдут некоторые в определённой части «симметричные» изменения свойств функции. Производственная функция для этого случая примет вид:

$$G_t + iC_t = a_0 e^{ib_1(K_t+iL_t)}. \qquad (8.29)$$

Тогда тригонометрическая форма записи этой модели будет такой:

$$\begin{cases} G_t = a_0 e^{-b_1 L_t} \cos(b_1 K_t), \\ C_t = a_0 e^{-b_1 L_t} \sin(b_1 K_t). \end{cases} \qquad (8.30)$$

Рост трудовых ресурсов неминуемо ведёт к уменьшению масштаба производства (если коэффициент $b_1>0$) и уменьшению значений как валовой прибыли, так и издержек производства. Рост капитала от нулевых значений приводит к снижению валовой прибыли и росту издержек производства. В целом такая модель может описывать кризисное состояние производства, когда для достижения производственного результата необходимо сокращать количество занятых на производстве, и отказываться от непрофильного производства, избавляясь от капиталов в этой части производства.

Понятно, что использование комплексных коэффициентов позволяет синтезировать эти разные свойства в единую сложную производственную зависимость. Для того чтобы понять влияние в модели с комплексными коэффициентами (8.25) производственных ресурсов на производственный результат, которые моделирует эта производственная функция, следует в правой части равенства выделить модуль и полярный угол. Для этого необходимо раскрыть скобки в показателе степени, а комплексный коэффициент пропорциональности привести к экспоненциальной форме.

Получим с учётом ранее введённых обозначений:

$$G_t + iC_t = ae^{b_0 K_t - b_1 L_t} e^{i(b_0 L_t + b_1 K_t + \alpha)}. \qquad (8.31)$$

Теперь легко получить два равенства действительных переменных, которые моделируют вещественную и мнимую часть модели, то есть – описывают влияние производственных ресурсов на валовую прибыль и на издержки производства:

$$\begin{cases} G_t = ae^{b_0 K_t - b_1 L_t} \cos(b_0 L_t + b_1 K_t + \alpha), \\ C_t = ae^{b_0 K_t - b_1 L_t} \sin(b_0 L_t + b_1 K_t + \alpha). \end{cases} \qquad (8.32)$$

При положительности всех коэффициентов модели она обладает такими свойствами. С ростом капитала растут и валовая прибыль, и издержки производства. Но сам этот рост неодинаковый. Так для валовой прибыли её экспоненциальный рост, вызванный увеличением $K_t$ в показателе степени, в определённой мере нивелируется тем, что косинус полярного угла с ростом капитала уменьшается, и их произведение даёт сложную нелинейную динамику.

Издержки с ростом капитала растут более интенсивно, поскольку экспоненциальному росту с ростом капитала соответствует и рост синуса. Их перемножение даёт соответствующий мультипликативный эффект.

Впрочем, эта общая характеристика корректируется аргументом коэффициента пропорциональности $\alpha = arctg \frac{a_1}{a_0}$. Он характеризует сдвиг по фазе косинусоиды и синусоиды. Этот сдвиг может быть таким, что приведёт и к обратным зависимостям.

Точно такой же сложный характер в данной модели имеет зависимость производственных результатов от трудовых ресурсов. В первом приближении с ростом трудовых ресурсов моделируется снижение валовой прибыли, причём довольно активное – снижению экспоненты в первом равенстве (8.32) соответствует и уменьшение косинуса. Их перемножение усиливает тенденцию.

Поведение издержек не столь однозначно – с ростом трудового ресурса уменьшается экспоненциальная составляющая второго равенства (8.32), но растёт его гармоническая составляющая – синусоидальная.

И опять-таки, этот сложный характер зависимости в весьма существенной степени корректируется аргументом коэффициента пропорциональности – его разные значения способствуют сдвигу по фазе гармонических сомножителей, и сами эти сомножители могут повести себя противоположно первоначальному представлению.

Поэтому показательная комплекснозначная модель с комплексными коэффициентами также способна описать разнообразные производственные типы.

## 9. Комплекснозначные авторегрессии

В модели экономической динамики присутствуют авторегрессионные модели, которые придают этой модели дополнительную нелинейную динамику. Поэтому, приступая к построению комплекснозначных моделей экономической динамики, следует изучить свойства комплекснозначных авторегрессионных моделей.

Модель авторегрессии первого порядка комплексной переменной может быть записана в таком виде:

$$y_{rt} + iy_{it} = (a_0 + ia_1)(y_{rt-1} + iy_{it-1}), \quad t = 1, 2, 3, \ldots . \tag{9.1}$$

Здесь уместно напомнить, что модель авторегрессии первого порядка действительно переменной, записываемая так:

$$y_t = ay_{t-1}, \tag{9.2}$$

в конечном итоге представляет собой функцию вида:

$$y_t = a^t y_0, \tag{9.3}$$

и динамика изменения во времени этой показательной функции полностью определяется основанием функции – коэффициентом $a$.

Легко показать что аналогично и комплекснозначная модель авторегрессии (9.1) может быть представлена как степенная функция:

$$y_{rt} + iy_{it} = (a_0 + ia_1)^t (y_{r0} + iy_{i0}). \tag{9.4}$$

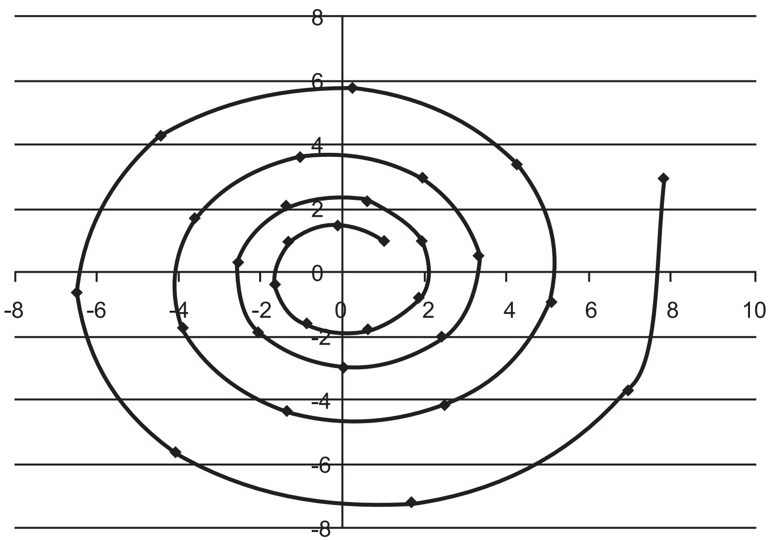


Рис. 1. Комплекснозначная авторегрессионная модель при основании степени, модуль которой больше единицы (9.5)



Степенная комплекснозначная функция, как известно, является периодической и она расходится в виде спирали с ростом показателя степени, если модуль основания больше единицы, и сходится по спирали к нулю, если модуль комплексного числа в основании степени меньше единицы.

На рис.1 приведён график изменения авторегрессионной функции:

$$y_{rt+1} + iy_{it+1} = (0,7 + i0,8)(y_{ro} + iy_{i0}), \quad y_{ro} = 1, y_{i0} = 1. \tag{9.5}$$

Модуль комплексного коэффициента авторегрессии равен 1,063, что больше единицы. Поэтому на графике видно, как моделируемый с помощью авторегрессии показатель из начальной точки на комплексной плоскости с координатами (1,1) расходится по спирали. Очевидно, что можно задавать любую начальную точку и характер моделируемой зависимости не изменится – будет меняться только место расположения начальной точки.

Поскольку в экономике фазовые плоскости типа той, которая изображена на рис. 1, практически не применяются, а используют, в основном, графики изменения показателей во времени, то на рис. 2 показано изменение во времени действительной и мнимой части модели авторегрессии (9.5). Их динамика имеет колебательный расходящийся во времени характер.

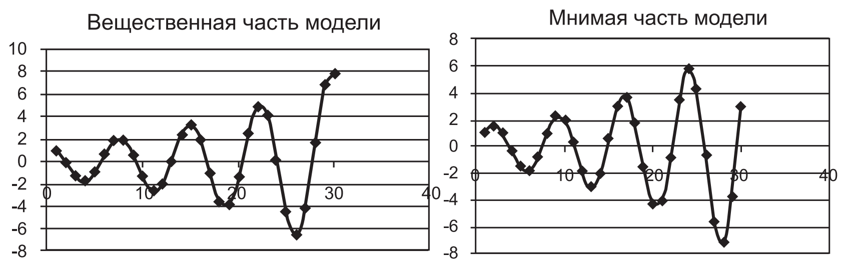


Рис. 2. Изменение во времени вещественной и мнимой частей комплекснозначной авторегрессионной модели (9.5)

Если в модели комплекснозначной авторегрессии комплексный коэффициент авторегрессии имеет модуль меньший, чем единица, модель будет генерировать сходящийся к нулевой точке по спирали процесс. Так, для модели:

$$y_{rt} + iy_{it} = (0,7 + i0,6)(y_{rt-1} + iy_{it-1}), \quad y_{ro} = 1, y_{i0} = 1. \quad (9.6)$$

модуль комплексного коэффициента пропорциональности равен 0,922 <1.

Модель авторегрессии генерирует ряд, сходящийся к нулю из начальной точки с координатами (1,1) на комплексной плоскости (рис. 3).

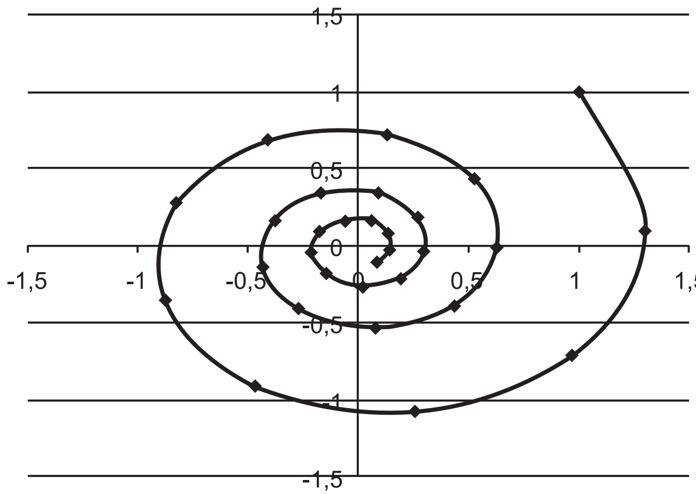


Рис. 3. Комплекснозначная авторегрессионная модель при основании степени, модуль которой меньше единицы

Изменение во времени действительной и мнимой части модели авторегрессии (9.6) будет иметь колебательный затухающий характер, и со временем обе части стремятся к нулю.

Более сложный характер имеет модель авторегрессии второго и больших порядков. Рассмотрим для определённости модель авторегрессии второго порядка действительной переменной:

$$y_t = ay_{t-2}, \quad t = 2,3,4,... \quad (9.7)$$

При *t=2* легко заметить, что: $y_2 = ay_0$. При *t=3* вычисляется $y_3 = ay_1$. Видно, что эти два расчётных значения не зависят друг от друга. Продолжая дальше, увидим, что при *t=4* $y_4 = ay_2 = a^2 y_0$, при *t=5* вычисляется $y_5 = ay_3 = a^2 y_1$.



И вообще для модели авторегрессии второго порядка (9.7):

$y_t = a^{\frac{t}{2}} y_0$, если $t$ – чётное, и

$y_t = a^{\frac{t-1}{2}} y_1$, если $t$ – нечётное. (9.8)

Тогда, если коэффициент авторегрессии будет по модулю больше единицы, то модель генерирует колебательный процесс с возрастающей амплитудой колебаний, как это изображено на рис. 4, а если он будет по модулю меньше единицы, то модель будет генерировать колебательный процесс с затуханием колебаний.

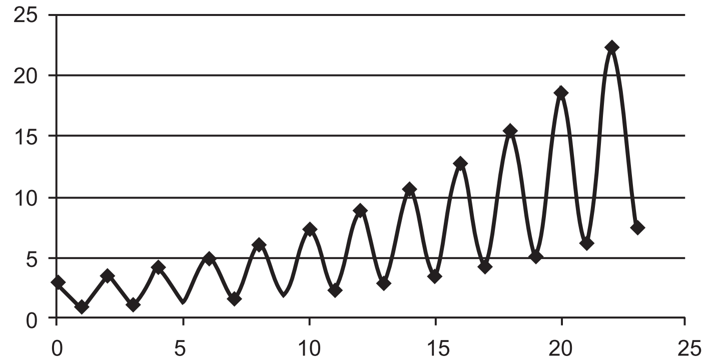


Рис. 4. Модель авторегрессии второго порядка $y_t = 1,3 y_{t-2}, \quad y_0 = 3, y_1 = 1$

Характер моделируемого процесса при авторегрессии второго порядка определяется значением коэффициента авторегрессии и двумя первыми значениями моделируемого ряда.

Точно также и модель авторегрессии второго порядка для комплекснозначного ряда:

$$y_{rt} + iy_{it} = (a_0 + ia_1)(y_{rt-2} + iy_{it-2}), \quad t = 2,3,\dots. \quad (9.9)$$

будет иметь более сложную, чем у модели авторегрессии первого порядка динамику, характер которой определяется и значениями комплексного коэффициента регрессии, и двумя первыми значениями комплекснозначного ряда.

В качестве примера приведём динамику комплекснозначной модели авторегрессии второго порядка следующего вида:

$$y_{rt} + iy_{it} = (0,7 + i0,6)(y_{rt-2} + iy_{it-2}), \quad y_{ro} = 1, y_{i0} = 1, \quad y_{r1} = 0,4, y_{i1} = 2,1 . \tag{9.10}$$

Фазовый портрет этой модели авторегрессии приведён на рис. 5.

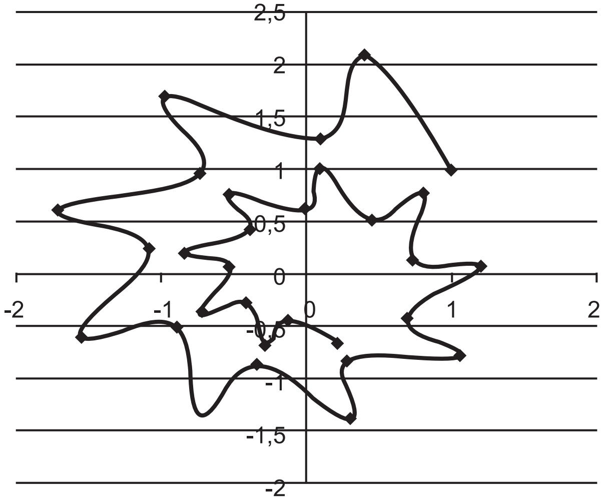

Рис. 5. Комплекснозначная авторегрессионная модель второго порядка (9.10)

Поскольку модель коэффициента авторегрессии меньше единицы, то модель сходится к нулю. Если же модуль будет больше единицы, то модель будет расходиться на комплексной плоскости.

На рис. 6 приведён график изменения во времени действительной и мнимой частей этой комплекснозначной модели авторегрессии второго порядка.

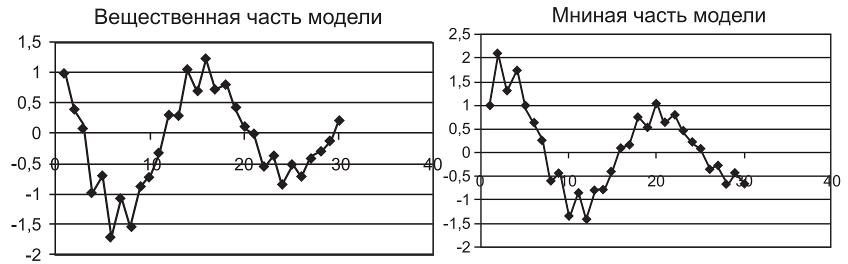


Рис. 6. Действительная и мнимая части комплекснозначной авторегрессионной модели второго порядка (9.10)



Из этого рисунка видно, что обе части модели демонстрируют затухающий во времени процесс со сложной структурой колебаний. Очевидно, что период колебаний у них один и тот же, и они сдвинуты друг относительно друга на один и тот же лаг.

Модели авторегрессии более сложного порядка будут генерировать более сложные варианты динамики.

В качестве только одного примера, демонстрирующего такой вариант динамики, приведём модель авторегрессии с распределёнными лагами – на одно и два наблюдения:

$$y_{rt} + iy_{it} = (-0,3 - i0,4)(y_{rt-1} + iy_{it-1}) + (0,6 - i0,8)(y_{rt-2} + iy_{it-2}),$$
$$y_{ro} = 1, y_{i0} = 1, \quad y_{r1} = 1,2, y_{i1} = 0,8 \tag{9.11}$$

Динамика изменения действительной и мнимой частей этих показателей приведена на графике рис. 7.

Приведённые графики комплекснозначных авторегрессионных моделей показывают, что они могут применяться при моделировании многих процессов с наличием сезонной составляющей или, например, на фондовых рынках. Это означает, что комплекснозначные авторегрессионные модели могут занять достойное место в ряду моделей прогнозирования социально-экономической динамики. Нахождение коэффициентов таких моделей по имеющимся статистическим данным следует осуществлять с помощью МНК.

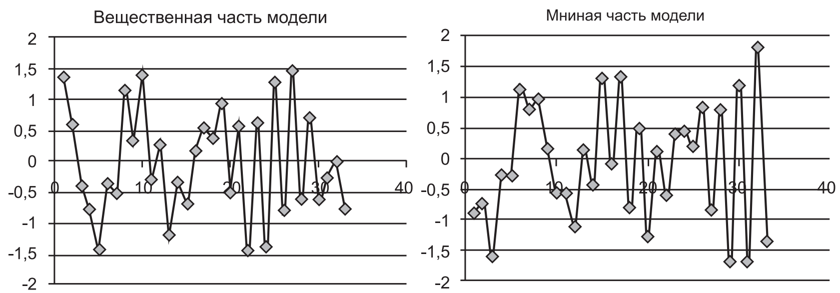


Рис. 7. Действительная и мнимая части комплекснозначной авторегрессионной модели с распределёнными лагами (9.11)

Продемонстрируем возможность использования авторегрессионных комплекснозначных моделей на практическом примере.

Прогноз доходов бюджета Российской федерации осуществляется, как известно, исходя из прогноза стоимости одного барреля нефти марки Urals. По этим прогнозным значениям дохода бюджета формируется сам бюджет и на его основе осуществляется всё последующее государственное планирование. Поэтому задача точного определения цены на нефть является актуальной. Именно это обстоятельство и явилось причиной нашего внимания к моделированию динамики стоимости нефти.

В нашем распоряжении имеются данные о ежедневном изменении с 7.1.2008 по 31.12.2012 стоимости на мировых рынках двух видов нефтепродуктов – нефти и дизельного топлива. Очевидно, что эти два вида продуктов отражают общие тенденции всего рынка нефтепродуктов, поскольку спрос на дизельное топливо отражает ту часть потребности, которую предъявляет на рынок нефтепродуктов мировой транспортный рынок, а спрос на нефть отражает как потребность в ней транспортников, так и химической, и топливной отраслей. Очевидно также, что величина спроса на нефть отражает, в том числе и спрос на нефтепродукты, но не только. Поэтому анализ совместной динамики этих двух продуктов даст экономисту больше информации, чем анализ динамики каждого из товаров в раздельности.

Прежде всего, обратим внимание на результаты графического анализа этой совместной динамики. Поскольку оба показателя меняются во времени, то вполне возможно их нанесение на фазовую плоскость – по горизонтальной оси отложим стоимость одного литра дизельного топлива, а по вертикальной – стоимость одного литра нефти марки Urals. Все данные переведены в одну единицу – руб./литр. Фазовый портрет этой динамики показан на рис. 8.

Легко убедиться, что фазовый портрет представляет собой форму спирали, описать которую с помощью действительных переменных сложно – необходимо использовать систему полярных координат.

Но как раз такую форму спирали моделируют комплекснозначные авторегрессионные модели, поэтому в данном случае использование моделей комплексных переменных объективно обусловлено.



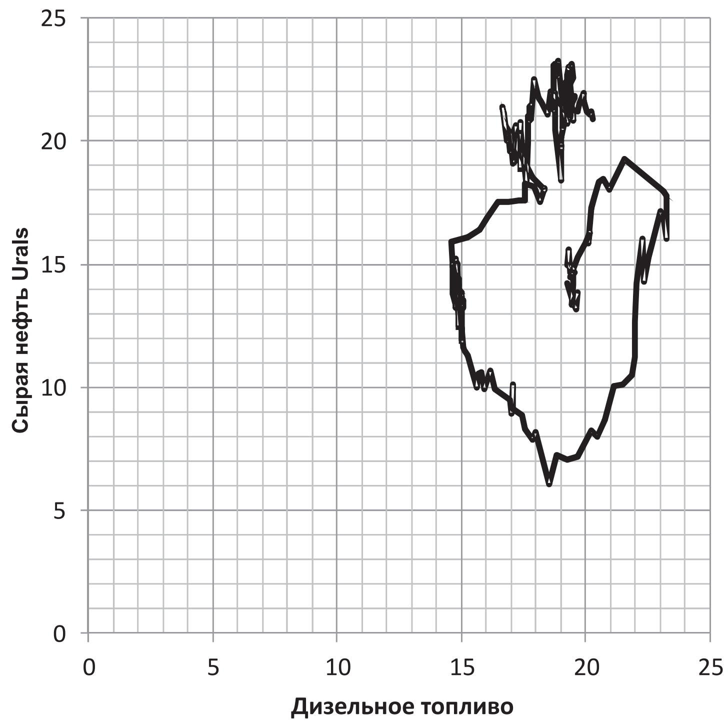


Рис. 8. Фазовая плоскость «Цена дизельного топлива – цена сырой нефти»

Прежде всего, следует провести анализ имеющегося динамического ряда из 225 пар наблюдений на предмет выявления лагов – для определения порядка комплекснозначной авторегрессии. Здесь придётся воспользоваться комплексным коэффициентом парной корреляции между двумя центрированными относительно их средних значений переменными $(y_{rt} + iy_{it})$ и $(x_{rt} + ix_{it})$ [8]. Этот коэффициент является комплексным, и его действительная часть характеризует степень приближения зависимости между двумя комплексными переменными к линейной форме, а его мнимая часть характеризует степень разброса переменных вокруг линии регрессии. Отрицательное значение действительной части комплексного коэффициента парной корреляции означает, что переменные на комплексной плоскости изменяются в противоположных квадрантах.

Поскольку необходимо выявить наличие лага в этом динамическом ряде комплексной переменной, комплексный коэффициент парной корреляции необходимо вычислять между комплексной переменной в момент *t* и этой же переменной, сдвинутой на $\tau=1$, на $\tau=2$, на $\tau=3$ и т.д. Поскольку перед нами ряд переменных, которые своей динамикой отражают сложные процессы, происходящие в мировой экономике, эволюционирующие и подверженные влиянию факторов общественно-политической природы, то следует ожидать наличие переменного лага – в одной части имеющегося множества он будет одним, в другой части – несколько другим. Корреляционный анализ ряда подтверждает это.

В табл. 9.1 приведены данные по расчёту комплексной автокорреляционной функции для первых 120 значений ряда.

Табл. 9.1

Комплексная автокорреляционная функция, вычисленная на первых значениях исходного ряда

| Лаг | Комплексный коэффициент парной корреляции (автокорреляции) |
|---|---|
| 1 | *0,9833+i0,0884* |
| 2 | *0,7855+i0,3071* |
| 3 | *0,5409+i0,4919* |
| 4 | *0,6277+i0,7065* |
| 5 | *0,6311+i0,7334* |
| 6 | *1,1489+i0,7162* |
| 7 | *1,2256+i0,7292* |
| 8 | *0,8718+i0,6034* |
| 9 | *0,5194+i0,6030* |
| 10 | *0,0098+i0,6375* |
| 11 | *-0,7183+i0,7267* |
| 12 | *-0,6829+i0,4467* |
| 13 | *-0,5867-i0,0664* |
| 14 | *-0,3571-i0,4089* |
| 15 | *-0,1721-i0,7417* |
| 16 | *-0,2950-i0,6169* |
| 17 | *-1,1247-i0,3001* |
| 18 | *-1,3113+i0,0693* |
| 19 | *-0,2231+i0,1468* |
| 20 | *0,6349+i0,0996* |



Здесь следует обратить внимание на то, что в нескольких случаях, а именно – при лагах 6, 7, а также 17 и 18 наблюдается ситуация, когда действительная часть комплексного коэффициента автокорреляции больше единицы. Этого теоретически не может быть, но при использовании MS Excel получаются именно такие результаты. Вызвано это тем, что этот программный продукт воспринимает полярный угол числа, находящегося во втором квадранте комплексной плоскости и полярный угол числа, находящегося в четвёртом квадранте плоскости как один и тот же угол. То есть, определяя, например, полярный угол комплексного числа *(2-i4)* как *arctg(2/-4)= arctg(-2/4)*, мы получаем тот же угол, что и у комплексного числа (*-2+i4)*, поскольку он определяется так: *arctg(-2/4)*. Это свойство и приводит к тому, что при вычислении действительной части комплексного коэффициента парной корреляции вместо вычитания осуществляется процедура сложения чисел, что и приводит к тому, что действительная часть комплексного коэффициента становится больше единицы.

Но поскольку мнимая часть комплексного коэффициента парной корреляции характеризует степень разброса фактических наблюдений вокруг линии прямой функциональной зависимости двух комплексных переменных, следует отдать предпочтение тем коэффициентам, у которых, наряду с близкой к единице действительной частью близка к нулю и мнимая часть. А это наблюдается для лага, равного 18-ти наблюдениям. Поскольку торги не проводились в выходные дни, то, переводя наблюдения в календарные дни, заметим, что лаг равен примерно 26-27 календарным дням, что соответствует лунному циклу. Гипотеза о том, что ценовые циклы пары значений (цена нефти – цена мазута) соответствует лунному циклу, нуждается в более тщательном обосновании и не входит в задачи настоящего исследования. Мы просто обращаем на это внимание.

Таким образом, нам необходимо для моделирования и прогнозирования цен на нефть и мазут использовать комплекснозначную авторегрессионную модель с лагом в 18 наблюдений:

$$y_{rt} + iy_{it} = (a_0 + ia_1)(y_{rt-18} + iy_{it-18}) + (b_0 + ib_1)\,. \qquad (9.12)$$

Используя метод наименьших квадратов, разработанный для комплекснозначной, получим с его помощью модель с такими коэффициентами:

$$y_{rt} + iy_{it} = (a_0 + ia_1)(y_{rt-18} + iy_{it-18}) + (b_0 + ib_1)\,. \qquad (9.13)$$

Модель довольно точно описывает реальный ряд данных с комплексной дисперсией, равной:

$$\sigma^2 = -0{,}4474 - i\,0{,}0174 \qquad (9.14)$$

Следует напомнить, что средняя цена дизельного топлива за рассматриваемый период составила 17,93 руб/литр (действительная часть комплексной переменной), а средняя цена сырой нефти за это же время составила 16,95 руб/литр (мнимая часть комплексной переменной). Сравнивая с (9.15) эти значения, можно сделать вывод об очень хороших аппроксимационных свойствах построенной модели.

Действительная часть дисперсии комплексной случайной величины характеризует степень отличия дисперсии вещественной части комплексной случайной переменной от дисперсии мнимой части комплексной случайной переменной. Если эти дисперсии равны друг другу, то действительная часть комплексной дисперсии будет равна нулю. Если дисперсия вещественной части случайной переменной больше дисперсии мнимой части этой переменной, то действительная часть комплексной дисперсии будет положительной. В противоположном случае – отрицательной. В нашем случае имеется отрицательное значение комплексной дисперсии. Это свидетельствует о том, что вариация ошибок моделирования значений цены для сырой нефти выше, чем вариация ошибок моделирования значений цен на дизельное топливо.

Поскольку мнимая часть комплексной дисперсии характеризует степень независимости друг от друга вещественной и мнимой частей комплексной переменной, то близость мнимой части (9.14) именно к нулю свидетельствует в пользу того, что вещественная и мнимая часть рассматриваемой переменной не имеют прямую линейную взаимосвязь. Она, несомненно, имеется, но очевидно должна наблюдаться с некоторым лагом.



# 10. Комплекснозначные модели экономической динамики

По аналогии с производственными функциями действительных переменных при формировании комплекснозначных моделей экономической динамики будем рассматривать только два производственных ресурса – капитальные ресурсы и трудовые.

Самый простой вариант развития модели экономической динамики с помощью комплекснозначной экономики – заменить модель производственной функции действительных переменных одной из моделей производственной функции комплексных переменных, рассмотренных в параграфах 4-8 данной книги. Это, конечно же, предаст модели новый вид и она будет симулировать другие траектории изменения основных показателей макроэкономической динамики. Но в данной работе предлагаются к рассмотрению не модификации существующих моделей, а иные модели, которые дополняют совокупность существующих моделей новым классом. А это должны быть модели, полностью базирующиеся на комплекснозначном основании.

Особенности комплекснозначного представления социально-экономических процессов при их моделировании проявляется в том, что две переменные, отражающие разные стороны одного и того же процесса, могут быть представлены в комплексной форме как одна переменная.

С учётом этого капитальные ресурсы целесообразно представить в виде активной части основных производственных фондов $K_0$ и пассивной части основных производственных фондов $K_1$:

$$K_{0t} + iK_{1t}. \qquad (10.1)$$

Точно также и трудовые ресурсы, используемые для моделирования производства, целесообразно разделить на их активную и пассивную части. Труд непосредственно участвующий в производстве, то есть труд основного производственного персонала $L_0$ отнесём к активной части, а труд непроизводственного персонала $L_1$ отнесём к пассивной части комплексной переменной затрат трудовых ресурсов:

$$L_{0t} + iL_{1t}. \qquad (10.2)$$

Комплексный производственный результат, который в области действительных переменных представлен только переменной, отражающей объём произведённой продукции, в нашем случае также может быть представлен как две действительные переменные, объединённые в одну комплексную переменную. Поскольку валовой внутренний (отраслевой или региональный) продукт $Q$ представляет собой сумму конечного продукта $Y_0$ и промежуточного продукта $Y_1$, $Q = Y_0 + Y_1$, то производственный результат может быть представлен как комплексная переменная, состоящая из этих двух слагаемых, отнесённых в действительную и мнимую части этой переменной:

$$Y_{0t} + iY_{1t}. \tag{10.3}$$

Тогда комплекснозначная производственная функция может быть записана в общем виде так:

$$Y_{0t} + iY_{1t} = f[(K_{0t} + iK_{1t}),(L_{0t} + iL_{1t})]. \tag{10.4}$$

Будем использовать общенаучный принцип: «от простого к сложному». Поэтому рассмотрим логику построения простой линейной комплекснозначной модели экономической динамики. Тогда производственная функция (10.4) в простой линейной форме будет иметь вид:

$$Y_{0t} + iY_{1t} = a_0 + ia_1 + (\alpha_0 + i\alpha_1)(K_{0t} + iK_{1t}) + (\beta_0 + i\beta_1)(L_{0t} + iL_{1t}). \tag{10.5}$$

Для того чтобы построить модель экономической динамики, необходимо описать влияние производственных результатов на производственные ресурсы следующего производственного цикла.

Прежде всего, отметим, что валовой промежуточный продукт $Y_1$ характеризует издержки производства, а валовой конечный продукт $Y_0$ направляется на потребление $C$ (дивиденды, премии и вознаграждения и т.п.) и накопление $I$ (производственные инвестиции). Последнее обстоятельство важно для того, чтобы учесть в моделировании экономической динамики:

$$I_t = \eta Y_{0t}, C_t = (1-\eta) Y_{0t}. \tag{10.6}$$

Здесь коэффициент $\eta$ характеризует склонность к накоплению. Очевидно, что он лежит в пределах от нуля до единицы. Если он равен единице, то вся отраслевая прибыль направляется исключительно на накопление основного капитала. В том случае, когда



он равен нулю, вся отраслевая прибыль пускается на потребление (проедается).

Производственные инвестиции $I_t$ могут быть направлены в основной капитал и способствовать его приросту $\Delta K_{t+1}$ (строительство, реконструкция, модернизация), а также могут быть направлены и в нематериальные активы и человеческий капитал, что очевидно оказывает влияние на прирост трудовых ресурсов $\Delta L_{t+1}$. Это явление также можно описать с помощью комплекснозначной функции действительного аргумента:

$$\Delta K_{t+1} + i\Delta L_{t+1} = F(I_t). \tag{10.7}$$

Поскольку мы рассматриваем простой случай – линейные комплекснозначные зависимости, то (10.7) может быть записано так:

$$\Delta K_{t+1} + i\Delta L_{t+1} = (\gamma + i\,(1-\gamma))I_t. \tag{10.8}$$

Здесь коэффициент пропорциональности $\gamma$ характеризует склонность к инвестициям в основной капитал. По своему смыслу этот коэффициент лежит в пределах от нуля до единицы, причём если он равен нулю, то все инвестиции идут в прирост человеческого капитала, а если он равен единице, то все инвестиции направляются в основные производственные фонды.

Инвестиции в основной капитал, который представлен как комплексная переменная (10.1), очевидно, могут быть направлены и в его активную часть, и в его пассивную часть. Учесть это можно, введя коэффициент $v$, характеризующий долю инвестиций в активную часть основных производственных фондов, и (1-$v$), характеризующий долю инвестиций в пассивную часть основных производственных фондов.

С учётом этого инвестиции в основной капитал можно записать так:

$$\Delta K_{0t+1} + i\Delta K_{1t+1} = (\nu + i(1-\nu))\Delta K_{t+1}, \tag{10.9}$$

где выполняется очевидное ограничение:

$$0 \le \nu \le 1 \tag{10.10}$$

Но изменение капитальных ресурсов происходит не только за счёт ввода новых производственных мощностей, но и за счёт выбытия и переоценки их стоимости в текущем году. Эта составляющая также может быть описана с помощью коэффициента выбытия и переоценки фондов $\mu$. Как показали наши исследования, выделить из этого коэффициента ту часть, которая связана с выбытием ОПФ и ту часть, которая связана с переоценкой ОПФ, в реалиях отечественной экономики не представляется возможным. Госкомстат осуществляет переоценку стоимости основных фондов по методике, формализованное описание которой и её включение в модель представляет собой самостоятельную сложную задачу, выходящую за рамки данных исследований.

Поскольку основные производственные фонды нами разделяются на их активную и пассивную составляющие, выбытие и переоценку фондов следует считать раздельно по этим двум составляющим:

$$\mu_0 K_{0t} + i\mu_1 K_{1t}. \tag{10.11}$$

Здесь $\mu_0$ - коэффициент выбытия и переоценки активной части основных производственных фондов, а $\mu_1$ - коэффициент выбытия и переоценки пассивной части основных производственных фондов,

С учётом этого и (10.9) общая динамика капитала будет описана так:

$$K_{0t+1} + iK_{1t+1} = (\nu + i(1-\nu))\Delta K_{t+1} + (\mu_0 K_{0t} + i\mu_1 K_{1t}) \tag{10.12}$$

Трудовые ресурсы $L_{t+1}$ могут быть определены через их размер в текущем году $L_t$ с учётом годового темпа прироста и влияния инвестиций в человеческий капитал. Для стабильно растущих производств рост трудовых ресурсов осуществляется «от достигнутого», поэтому величина основного производственного персонала $L_0$ и величина непроизводственного персонала $L_1$ на следующий год несколько увеличиваются по сравнению с их размером в данном году. В то же время в этой динамике в современном мире наблюдается тенденция – рост производственного персонала несколько меньше роста непроизводственного персонала.

Это влияние как нельзя лучше может быть описано в комплекснозначной форме:

$$\Delta L_{0t+1} + i\Delta L_{1t+1} = (\varphi_0 + i\varphi_1)(L_{0t} + iL_{1t}), \tag{10.13}$$

ведь оно равносильно такой системе:

$$\begin{cases} \Delta L_{0t+1} = \varphi_0 L_{0t} - \varphi_1 L_{1t}, \\ \Delta L_{1t+1} = \varphi_1 L_{0t} + \varphi_0 L_{1t}, \end{cases} \tag{10.14}$$

из которой видно, что рост основного производственного персонала будет меньше роста непроизводственного персонала.



Прирост трудовых ресурсов за счёт инвестиций в человеческий капитал ведёт к росту как основного производственного персонала, так и неосновного персонала:

$$(\rho + i(1-\rho))\Delta L_{t+1} \tag{10.15}$$

Теперь, с учётом (10.13) и (10.15), получим для трудовых ресурсов:

$$L_{0t+1} + iL_{1t+1} = (\rho + i(1-\rho))\Delta L_{t+1} + (\varphi_0 + i\varphi_1)(L_{0t} + iL_{1t}) \tag{10.16}$$

С учётом всех приведённых выше равенств и неравенств получена замкнутая модель, в которой параметры в период $t$ определяются коэффициентами и параметрами в предыдущий момент времени $t$-$1$. Это и есть искомая линейная комплекснозначная модель экономической динамики.

Для того, чтобы представить её в целом, приведём ниже все уравнения и неравенства этой модели без указания на их нумерацию:

$$Y_{0t} + iY_{1t} = a_0 + ia_1 + (\alpha_0 + i\alpha_1)(K_{0t} + iK_{1t}) + (\beta_0 + i\beta_1)(L_{0t} + iL_{1t}),$$

$$I_t = \eta Y_{0t}, C_t = (1-\eta)Y_{0t}, \quad 0 \le \eta \le 1,$$

$$\Delta K_{t+1} + i\Delta L_{t+1} = (\gamma + i(1-\gamma))I_t, \ 0 \le \gamma \le 1,$$

$$K_{0t+1} + iK_{1t+1} = (\nu + i(1-\nu))\Delta K_{t+1} + (\mu_0 K_{0t} + i\mu_1 K_{1t}),$$

$$L_{0t+1} + iL_{1t+1} = (\rho + i(1-\rho))\Delta L_{t+1} + (\varphi_0 + i\varphi_1)(L_{0t} + iL_{1t}).$$

Эта простая линейная комплекснозначная модель экономической динамики будет, тем не менее, моделировать нелинейную динамику потому, что в её структуре есть модели авторегрессии, а в предыдущем параграфе было показано – как ведёт себя комплекснозначная авторегрессионная модель. Поэтому данная линейная комплекснозначная модель экономической динамики может описывать различные нелинейные траектории экономического развития, характер которых, конечно же определяется величинами коэффициентов и начальными параметрами модели.

Проверим возможность использования данной модели для моделирования экономики на нескольких условных примерах.

Зададимся начальными условиями для исходных переменных задачи. Такими исходными данными являются величины активной $K_0$ и пассивной $K_1$ частей основных фондов, а также величины затрат труда основных $L_0$ и не основных $L_1$ работников. Пусть эти значения будут максимально приближены к реалиям – активная часть больше пассивной:

$K_0=5,\ K_1=1,\ L_0=5,\ L_1=1.$

Теперь зададим значения коэффициентов модели:

$a_0=2{,}2;\ a_1=2{,}2;\ \alpha_0=1{,}5;\ \alpha_1=0{,}5;\ \beta_0=1{,}5;\ \beta_1=0{,}5;\ \eta=0{,}14;\ \gamma=0{,}8;\ \nu=0{,}7;\ \mu_0=0{,}9;\ \mu_1=0{,}9;\ \varphi_0=0{,}8;\ \varphi_1=0{,}2;\ \rho=0{,}8.$ (10.17)

При таких начальных условиях и значениях коэффициентов моделируется поступательное развитие условной экономической системы (табл. 10.1).

Табл. 10.1.
Результаты условного примера при коэффициентах (10.17)

| $t$ | $K_0$ | $K_1$ | $L_0$ | $L_1$ | $Y_0$ | $Y_1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 5,77 | 1,44 | 4,26 | 1,39 | 16,20 | 10,20 |
| **2** | 6,43 | 1,83 | 3,63 | 1,63 | 15,83 | 11,47 |
| **3** | 7,01 | 2,17 | 3,09 | 1,75 | 15,56 | 12,42 |
| **4** | 7,52 | 2,47 | 2,64 | 1,80 | 15,38 | 13,13 |
| **5** | 7,96 | 2,74 | 2,27 | 1,79 | 15,30 | 13,68 |
| **6** | 8,37 | 2,98 | 1,98 | 1,74 | 15,29 | 14,11 |
| **7** | 8,73 | 3,20 | 1,76 | 1,68 | 15,36 | 14,46 |
| **8** | 9,08 | 3,40 | 1,58 | 1,60 | 15,50 | 14,76 |
| **9** | 9,40 | 3,59 | 1,46 | 1,53 | 15,69 | 15,03 |
| **10** | 9,71 | 3,76 | 1,37 | 1,46 | 15,93 | 15,30 |
| **11** | 10,01 | 3,93 | 1,31 | 1,40 | 16,21 | 15,57 |
| **12** | 10,30 | 4,09 | 1,28 | 1,34 | 16,52 | 15,85 |
| **13** | 10,59 | 4,25 | 1,27 | 1,29 | 16,86 | 16,14 |
| **14** | 10,88 | 4,40 | 1,27 | 1,26 | 17,22 | 16,45 |
| **15** | 11,18 | 4,55 | 1,29 | 1,23 | 17,60 | 16,77 |
| **16** | 11,47 | 4,70 | 1,31 | 1,22 | 18,00 | 17,11 |
| **17** | 11,76 | 4,85 | 1,34 | 1,21 | 18,41 | 17,47 |
| **18** | 12,06 | 5,00 | 1,37 | 1,20 | 18,82 | 17,84 |
| **19** | 12,37 | 5,15 | 1,41 | 1,21 | 19,25 | 18,22 |
| **20** | 12,67 | 5,29 | 1,45 | 1,22 | 19,68 | 18,62 |

Из этих данных следует, что и конечный, и промежуточный продукты симуляционной системы в целом имеют тенденцию к росту, хотя конечный продукт вначале снижался, а затем увеличивался, в то время, как промежуточный продукт непрерывно возрастал.

Изменение коэффициентов модели ведёт к очевидному изменению и траектории развития моделируемого объекта. Поскольку интерес представляет влияние на результаты динамики управляемых коэффициентов модели, то рассмотрим только один из них.



Принципиально важным является коэффициент $\eta$, названный склонностью к накоплению. По экономическому смыслу этого коэффициента его рост ведёт к увеличению инвестиций в капитал и труд и это должно вести к росту производства, а его уменьшение – ведёт к снижению всех показателей. Проверим, выполняется ли это свойство в модели.

В первом случае было принято, что отраслевая склонность к накоплению равна $\eta=0{,}14$. Оставим все коэффициенты модели и начальные условия без изменений, а увеличим коэффициент отраслевой склонности к накоплению до $\eta=0{,}20$. В этом случае также моделируется нелинейный рост всех показателей (табл. 10.2).

Табл. 10.2.
Результаты моделирования при увеличенной склонности к накоплению $\eta=0{,}20$

| $t$ | $K_0$ | $K_1$ | $L_0$ | $L_1$ | $Y_0$ | $Y_1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 6,31 | 1,68 | 4,42 | 1,43 | 16,20 | 10,20 |
| **2** | 7,56 | 2,31 | 3,93 | 1,72 | 16,75 | 12,23 |
| **3** | 8,75 | 2,92 | 3,53 | 1,91 | 17,41 | 13,99 |
| **4** | 9,92 | 3,50 | 3,21 | 2,02 | 18,21 | 15,58 |
| **5** | 11,07 | 4,07 | 2,98 | 2,09 | 19,13 | 17,05 |
| **6** | 12,22 | 4,63 | 2,82 | 2,13 | 20,19 | 18,47 |
| **7** | 13,40 | 5,19 | 2,73 | 2,16 | 21,38 | 19,87 |
| **8** | 14,60 | 5,76 | 2,69 | 2,18 | 22,71 | 21,29 |
| **9** | 15,85 | 6,35 | 2,71 | 2,21 | 24,16 | 22,77 |
| **10** | 17,15 | 6,95 | 2,77 | 2,24 | 25,75 | 24,31 |
| **11** | 18,51 | 7,57 | 2,87 | 2,29 | 27,48 | 25,95 |
| **12** | 19,94 | 8,22 | 3,01 | 2,36 | 29,34 | 27,69 |
| **13** | 21,46 | 8,91 | 3,17 | 2,44 | 31,33 | 29,54 |
| **14** | 23,06 | 9,62 | 3,37 | 2,53 | 33,47 | 31,53 |
| **15** | 24,76 | 10,38 | 3,58 | 2,65 | 35,76 | 33,65 |
| **16** | 26,56 | 11,17 | 3,82 | 2,78 | 38,20 | 35,91 |
| **17** | 28,48 | 12,01 | 4,09 | 2,94 | 40,80 | 38,33 |
| **18** | 30,51 | 12,90 | 4,37 | 3,11 | 43,57 | 40,91 |
| **19** | 32,67 | 13,85 | 4,67 | 3,29 | 46,51 | 43,65 |
| **20** | 34,96 | 14,84 | 5,00 | 3,50 | 49,64 | 46,58 |

Но, как видно, рост оказывается более сильным, чем при меньшей склонности к накоплению. Сравнение с результатами табл. 10.1 показывает, что уже к концу моделируемого периода показатели конечного и промежуточного продуктов выросли при увеличенной норме к накоплению более чем в два раза.

Уменьшим теперь коэффициент отраслевой склонности к накоплению на такую же величину *0,06* до $\eta=0,08$. В этом случае моделируется нелинейное уменьшение показателей (табл. 10.3).

Табл. 10.3.
Результаты моделирования при уменьшенной склонности к накоплению $\eta=0,08$

| t | $K_0$ | $K_1$ | $L_0$ | $L_1$ | $Y_0$ | $Y_1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 5,32 | 1,25 | 4,00 | 1,33 | 16,20 | 10,20 |
| **2** | 5,54 | 1,45 | 3,17 | 1,48 | 14,89 | 10,72 |
| **3** | 5,68 | 1,60 | 2,47 | 1,53 | 13,79 | 10,95 |
| **4** | 5,76 | 1,72 | 1,91 | 1,49 | 12,86 | 10,96 |
| **5** | 5,79 | 1,81 | 1,45 | 1,40 | 12,09 | 10,84 |
| **6** | 5,79 | 1,87 | 1,10 | 1,28 | 11,46 | 10,64 |
| **7** | 5,76 | 1,92 | 0,82 | 1,16 | 10,95 | 10,38 |
| **8** | 5,72 | 1,96 | 0,61 | 1,02 | 10,53 | 10,11 |
| **9** | 5,66 | 1,98 | 0,45 | 0,90 | 10,20 | 9,83 |
| **10** | 5,59 | 2,00 | 0,33 | 0,78 | 9,92 | 9,57 |
| **11** | 5,52 | 2,01 | 0,25 | 0,67 | 9,70 | 9,33 |
| **12** | 5,45 | 2,01 | 0,19 | 0,58 | 9,52 | 9,11 |
| **13** | 5,38 | 2,01 | 0,16 | 0,50 | 9,37 | 8,91 |
| **14** | 5,31 | 2,01 | 0,14 | 0,43 | 9,25 | 8,73 |
| **15** | 5,24 | 2,01 | 0,12 | 0,37 | 9,14 | 8,58 |
| **16** | 5,17 | 2,00 | 0,12 | 0,32 | 9,05 | 8,45 |
| **17** | 5,10 | 2,00 | 0,12 | 0,28 | 8,97 | 8,33 |
| **18** | 5,04 | 1,99 | 0,13 | 0,25 | 8,90 | 8,24 |
| **19** | 4,98 | 1,98 | 0,13 | 0,23 | 8,83 | 8,15 |
| **20** | 4,93 | 1,97 | 0,14 | 0,21 | 8,77 | 8,07 |

При этом наблюдается первоначальный рост активной части основных фондов с последующим уверенным снижением этой составляющей. Пассивная часть основных фондов в целом возрастает, но в последний период также демонстрирует тенденцию к некоторому снижению. Трудовые же ресурсы демонстрируют уверенную тенденцию к снижению. В целом и результирующие показатели уменьшают свои величины – конечный продукт почти в два раза, а промежуточный – в 1,2 раза.



Таким образом, линейная комплекснозначная модель экономической динамики в целом правильно описывает экономическую суть производственных процессов и может быть использована на практике. Для этого необходимо с помощью методов комплекснозначной эконометрики оценить коэффициенты модели, после чего осуществлять многовариантные расчёты.

## 11. Анализ модельных экспериментов[4]

Для выявления свойств предлагаемой комплекснозначной модели экономической динамики были выполнили многочисленные расчёты по линейной комплекснозначной модели экономической динамики, представленной в предыдущем параграфе. При этом целью проведённых расчётов было исследование влияние различных введённых коэффициентов на результаты симуляции экономической динамики условного объекта, прежде всего, влияние коэффициента, характеризующего склонность к накоплению на результаты производственной деятельности системы. В предельном случае, когда склонность к накоплению равна нулю, наблюдалось вполне ожидаемое снижение всех показателей экономического развития.

В том случае, когда склонность к накоплению была принята равной $\eta=0.1$, наблюдалась нелинейная динамика показателя конечного $Y_0$ и промежуточного $Y_1$ продуктов (рис.9).

Когда склонность к накоплению была увеличена в два раза до размера в $\eta=0.2$, модель симулировала резкий нелинейный рост всех показателей, в том числе конечного $Y_0$ и промежуточного $Y_1$ продуктов (рис.10).

Влияние коэффициента, характеризующего склонность к накоплению, на модель понятна – чем большая часть конечного продукта пускается на развитие производства, тем более ощутимым является экономический рост.

[4] Данный параграф подготовлен совместно А.И.Филипповым.

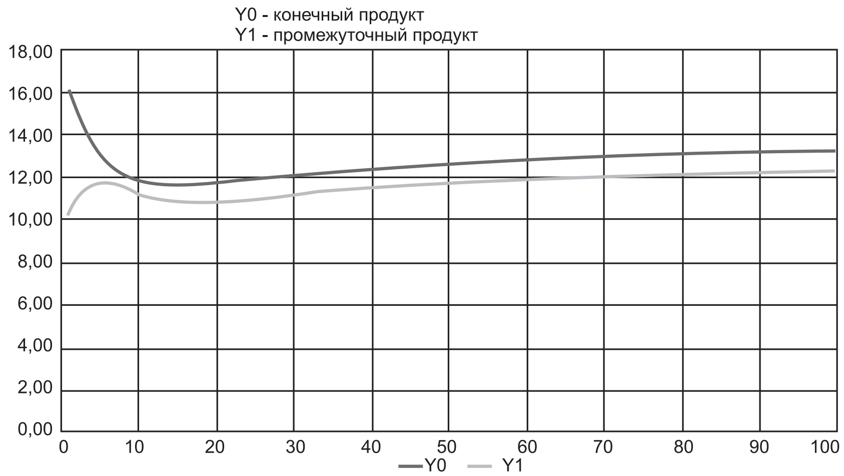


Рис. 9. Изменение во времени конечного и промежуточного продуктов линейной комплекснозначной модели экономической динамики, *η=0.1*

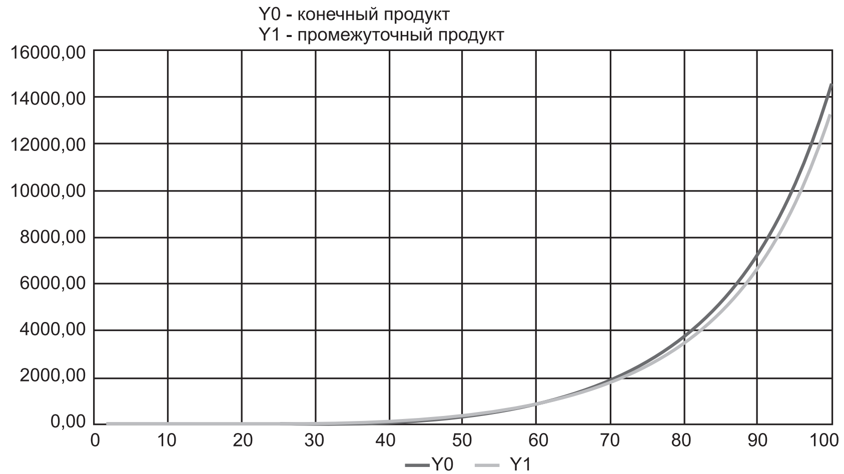


Рис. 10. Изменение во времени конечного и промежуточного продуктов линейной комплекснозначной модели экономической динамики, *η=0.2*

Рассмотрим теперь при тех же первоначальных условиях, как влияет другая склонность, а именно – склонность к инвестициям в основной капитал, – на симуляцию экономического роста. Из (10.8), где этот коэффициент был приведён, следует, что если он



равен нулю, то все инвестиции идут в прирост человеческого капитала, а если он равен единице, то все инвестиции направляются в основные производственные фонды.

Если взять предельный случай, когда все инвестиции направлены в человеческий капитал, то есть $\gamma=0$, то модель симулирует нелинейную динамику такого рода:

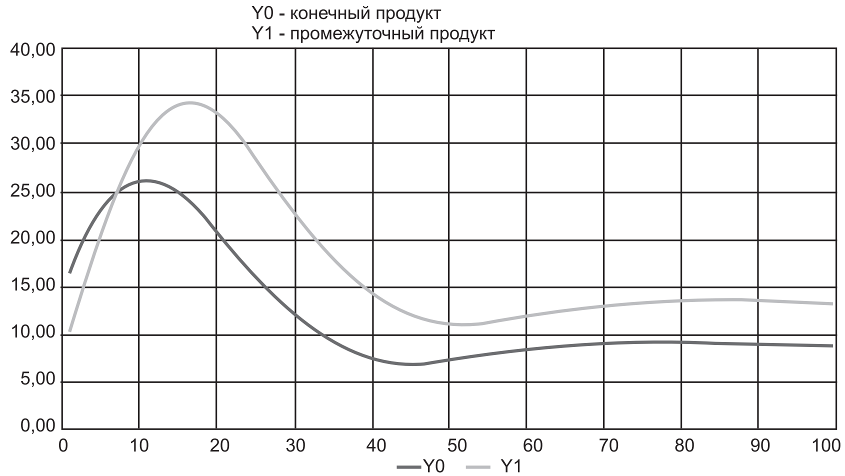


Рис. 11. Изменение во времени конечного и промежуточного продуктов линейной комплекснозначной модели экономической динамики при инвестициях исключительно в человеческий капитал, *γ=0*

Можно заметить, что первоначальный бурный рост всех производственных результатов сменяется не менее динамичным характером снижения этих же результатов с дальнейшей стабилизацией производства на уровне, когда конечный продукт существенно ниже своего исходного значения, а промежуточный продукт стабилизируется на уровне, несколько превышающем исходные значения. Очевидно, что этот характер динамики обусловлен тем, что выбытию основных фондов не соответствует их прирост за счёт инвестиций в основной капитал.

Более реальным является следующий результат, когда склонность к инвестициям в основной капитал перестаёт быть нулевой и инвестиции вкладываются не только в человеческий капитал, но и в основной производственный капитал. В том случае, когда эта склонность равна $\gamma=0.1$, модель симулирует существенный рост в первые моменты наблюдения с последующим незначительным снижением и переходом к состоянию почти равновесному с некоторым снижением показателей (рис. 12).

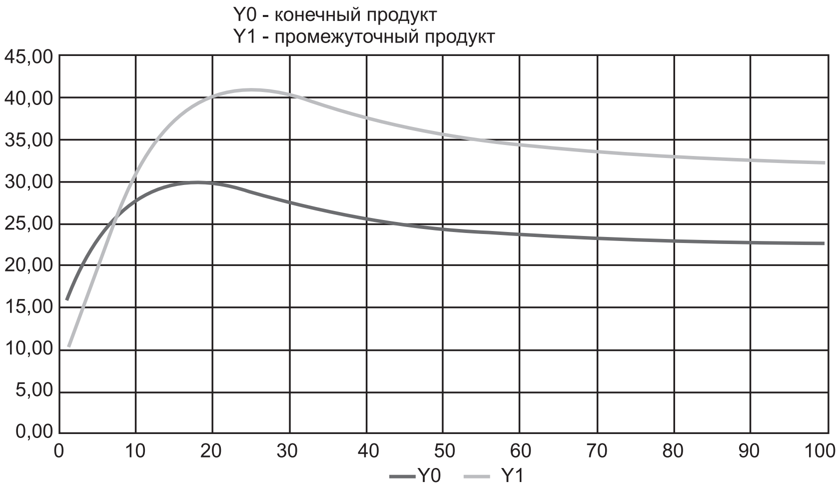


Рис. 12. Изменение во времени конечного и промежуточного продуктов линейной комплекснозначной модели экономической динамики при инвестициях большей частью в человеческий капитал, $\gamma=0.1$

Дальнейшее увеличение величины коэффициента склонности к инвестициям в основной капитал, как и ожидалось, приводит к увеличению характера и темпов роста симулируемых показателей производства. Если, к примеру, этот коэффициент становится равным $\gamma=0.2$, то модель демонстрирует уверенный, почти линейный рост конечного и промежуточного продукта (рис. 13).

Дальнейшее увеличение этого показателя приводит к появлению существенного нелинейного роста результатов производства.

Далее было исследовано влияние другого аспекта поведения модели условного экономического объекта, а именно – влияние на экономическую динамику доли инвестирования средств в активную часть основного капитала $v$. Если эта доля равна нулю, то это означает, что все инвестиции в основной капитал направлены исключительно на рост пассивной части основных производственных фондов (здания, сооружения, подъездные пути и т.п.). Если же эта доля равна единице, то это означает, что вся величина инвестиций в основные фонды направлена на развитие технологий производства.



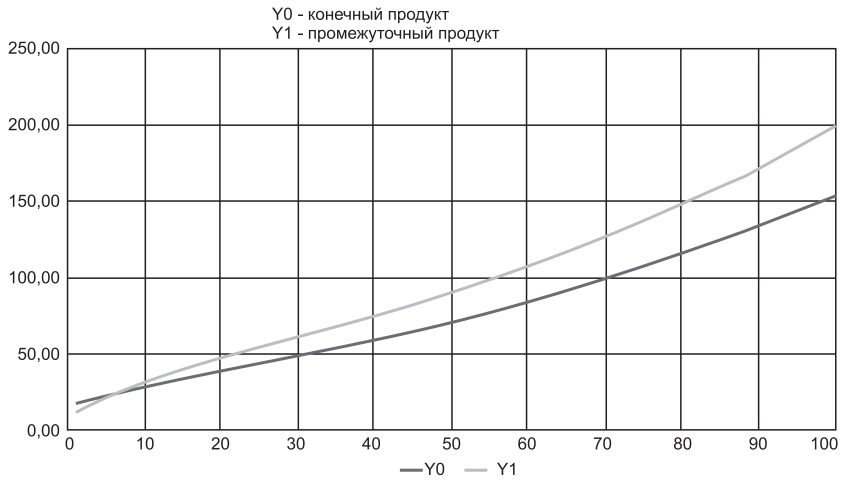


Рис. 13. Изменение во времени конечного и промежуточного продуктов линейной комплекснозначной модели экономической динамики при 20%-х инвестициях в основной капитал, $\gamma=0.2$

В первом случае, когда все инвестиции осуществляются только на увеличение пассивной части основных производственных фондов, то наблюдается такое симулирование экономической динамики – конечный продукт непрерывно снижается до некоторого минимального уровня и стабилизируется на нём, а промежуточный продукт (затраты на производство) вначале бурно растёт, затем также бурно падает, после чего стабилизируется на низком уровне (рис. 14).

Этот предельный случай был заменён на более реальные случаи, когда часть инвестиций направлялась в активную часть производственных фондов, а другая часть направлялась в пассивную часть производственных фондов. Однако тенденция рисунка 14 повторялась вплоть до случая, когда этот коэффициент не достиг величины $v=0.4$ (рис. 15).

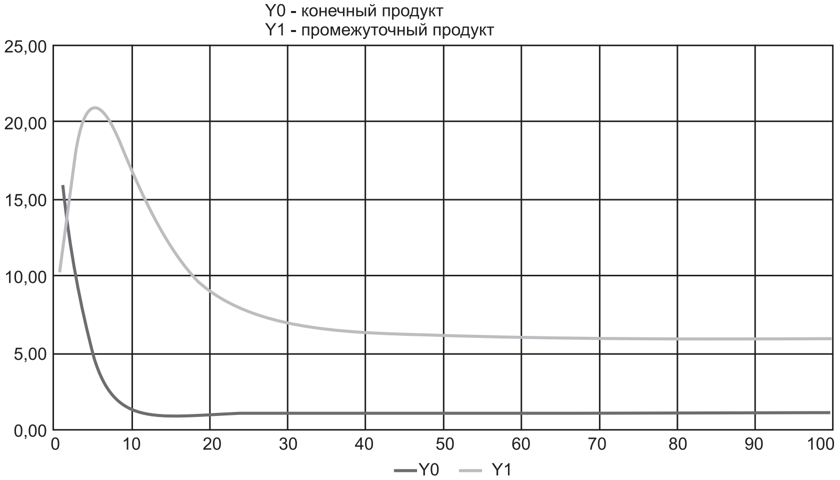


Рис. 14. Изменение во времени конечного и промежуточного продуктов линейной комплекснозначной модели экономической динамики при инвестициях только в пассивную часть основного производственного капитала, *v=0*

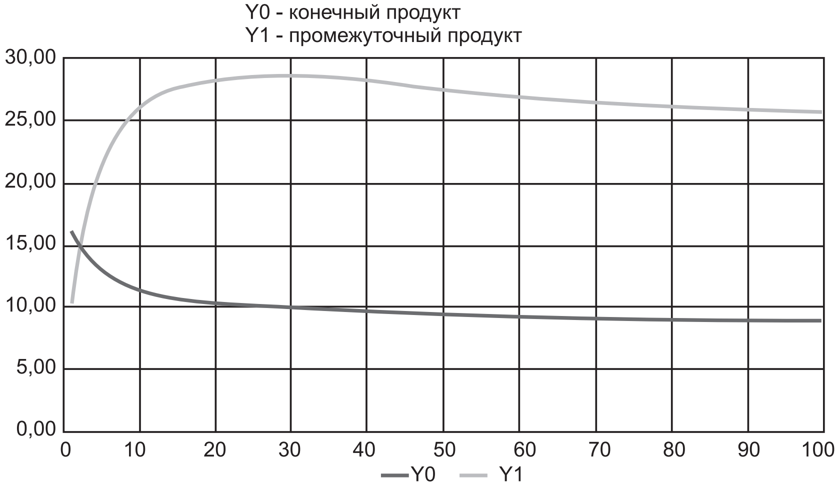


Рис. 15. Изменение во времени конечного и промежуточного продуктов линейной комплекснозначной модели экономической динамики при инвестициях в активную часть основных производственных фондов в размере 40%, *v=0.4*

В этом случае наблюдается рост промежуточного продукта более чем в два с половиной раза с некоторой стабилизацией в дальнейшем; а конечный продукт уменьшается почти в полтора раза, также стабилизируясь на этом уровне.

От увеличения инвестиций в активную часть основных производственных фондов следует ожидать в реальной экономике активного роста конечного продукта при росте промежуточного продукта. Как раз такая ситуация и симулируется моделью. Так, уже при $v_0=0.5$, моделируется почти линейный рост обоих показателей, а при $v_0=0.6$ – такой нелинейный рост, графическое изображение которого показано на рис. 16.

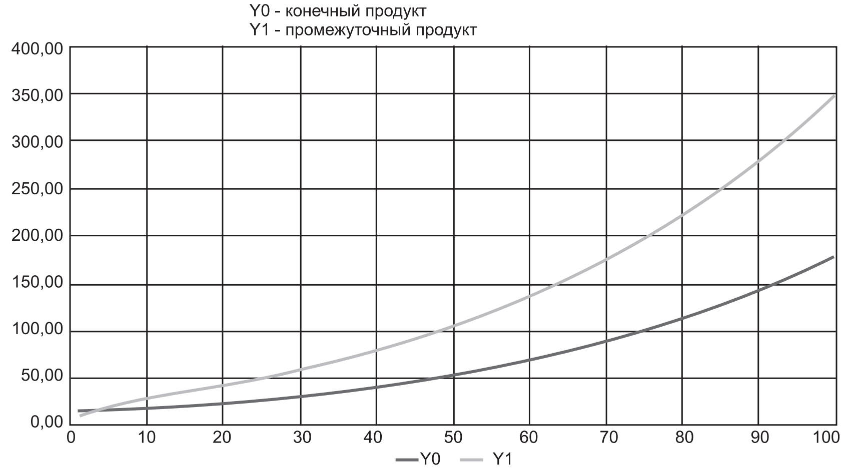


Рис. 16. Изменение во времени конечного и промежуточного продуктов линейной комплекснозначной модели экономической динамики при инвестициях в активную часть основных производственных фондов в размере 60%, *v=0.6*

Как видно из приведённых результатов модельных экспериментов, линейная комплекснозначная модель экономической динамики при различных условиях симулирует различные нелинейные траектории экономического роста. Поэтому можно ожидать, что статистическое наполнение этой модели реальными данными может позволить построить модель, с помощью которой можно провести более детальное исследование особенностей вариантов экономического развития и тех факторов, которые оказывают на него решающее воздействие.

Включение в эту модель различных нелинейных составляющих позволяет с её помощью моделировать нелинейные траектории самой различной формы. Если, не меняя исходных коэффициентов и параметров линейной комплекснозначной модели экономической динамики, вместо аддитивной формы производственной функции использовать её мультипликативную форму:

$$Y_{ot} + iY_{1t} = (\alpha_0 + i\alpha_1)(K_{0t} + iK_{1t})(L_{0t} + iL_{1t}), \tag{11.1}$$

то модель симулирует существенную нелинейность динамики.

## 12. Влияние изменений в структурах труда и капитала на динамику результатов производственной системы[5]

Рассмотрим теперь, как будут влиять на траекторию экономической динамики условной экономической системы изменения в трудовой политике и в инвестиционной политике. О влиянии этих факторов на результаты симуляции свидетельствует то, что производственная функция комплексных переменных включает в себя различную структуру как трудовых, так и капитальных ресурсов:

$$Y_{0t} + iY_{1t} = a_0 + ia_1 + (\alpha_0 + i\alpha_1)(K_{0t} + iK_{1t}) + (\beta_0 + i\beta_1)(L_{0t} + iL_{1t}). \tag{12.1}$$

Это влияние может проявляться различными способами, и в первую очередь, через изменение коэффициентов пропорциональности, стоящих перед каждой комплексной переменной в уравнении производственной функции (12.1). Изучим поведение функции (12.1) при различных изменениях коэффициентов $(a_0, a_1)$, соответственно характеризующих пропорцию между активной и пассивной частями капитала, а также коэффициентов $(\beta_0, \beta_1)$, соответственно характеризующих пропорцию между основной производственной частью персонала и величиной непроизводственной части труда.

[5] Данный параграф подготовлен совместно с Е.А.Прытковой



Рассмотрим возможные варианты изменения пары коэффициентов $(a_0, a_1)$ и их отношения. Будем считать, что коэффициенты $(a_0, a_1)$ связаны между собой неявным образом:

$$(1-\alpha_0)^2 + (1-\alpha_1)^2 < 1. \tag{12.2}$$

Тогда совместная область допустимых значений этих коэффициентов на комплексной плоскости коэффициентов представляет собой круг с радиусом, равным единице. Следовательно:

$$0 \le \alpha_0 \le 2, \tag{12.3}$$

$$0 \le \alpha_1 \le 2\,. \tag{12.4}$$

Каждый из коэффициентов в отдельности может расти, убывать или оставаться неизменным, при этом их отношение может также следовать одной из этих динамик. Возможные комбинации вариантов совместных изменений $a_0$ и $a_1$ и вариантов их отношения представлены ниже в табл. 12.1.

Табл. 12.1.

Варианты изменения коэффициентов $(a_0, a_1)$ и их отношения

| | | $\frac{\alpha_0}{\alpha_1}$ | | |
|---|---|---|---|---|
| | | ↓ | ↑ | – |
| $a_0, a_1$ | ↑↑ | **1** $a_1$=3 $a_0$-1 | **2** $a_1$=($a_0$+1)/3 | **3** $a_1$ = $a_0$ |
| | ↓↓ | $a_1$=($a_0$+1)/3 | $a_1$=3 $a_0$-1 | $a_1$ = $a_0$ |
| | ↑↓ | - | **4** $a_1$=-3 $a_0$+3 | - |
| | ↓↑ | $a_1$=-3 $a_0$+3 | - | - |
| | ↑– | - | **5** $a_1$=1 | - |
| | –↑ | **6** $a_0$=1 | - | - |
| | ↓– | $a_1$=1 | - | - |
| | –↓ | - | $a_0$=1 | - |

В табл. 12.1 в каждой ячейке представлено уравнение, одновременно удовлетворяющее условию (12.2) и представляющее определённый вариант динамики коэффициентов ($\alpha_0$, $\alpha_1$) и их отношения. Так, например, верхняя левая ячейка с уравнением $\alpha_1 = 3\alpha_0$-1 отражает случай, когда отношение $\alpha_0$ к $\alpha_1$ убывает, при том, что каждый из коэффициентов $\alpha_0, \alpha_1$ увеличивается. Иными словами, вклад обеих частей капитала в производственный результат растут, однако пассивная часть растёт быстрее. Некоторые уравнения повторяются, так как являются взаимно обратными случаями. Символ «-» в ячейке означает невозможность данного варианта динамики. В результате существует 6 возможных неповторяющихся комбинаций изменения коэффициентов ($\alpha_0$, $\alpha_1$) и их отношения. Они также отмечены в табл. 12.1.

Рассмотрим наиболее интересные случаи динамики конечного $Y_0$ и промежуточного $Y_1$ продукта при изменении коэффициентов $\alpha_0$, $\alpha_1$.

Вариант 1: отношение $\alpha_0$ к $\alpha_1$ убывает, каждый из коэффициентов $\alpha_0$, $\alpha_1$ увеличивается. Пассивная часть капитала используется интенсивнее активной части. Уравнение соответствует следующему виду: $\alpha_1 = 3\alpha_0$ -1.

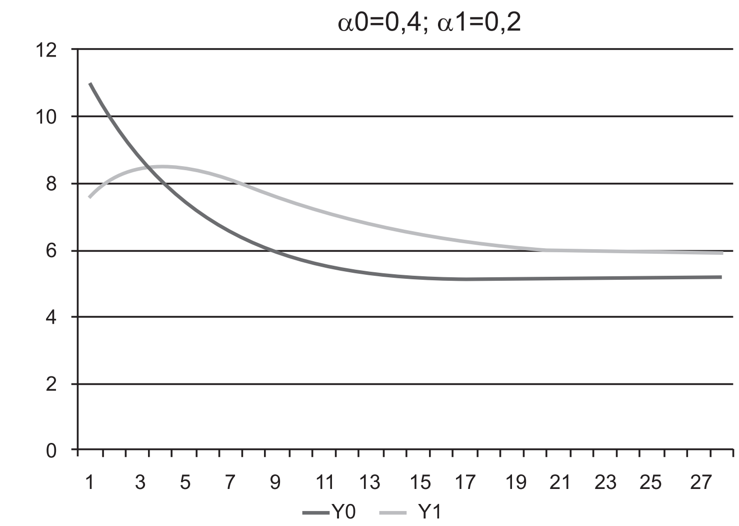


Рис 17. Изменение во времени конечного и промежуточного продуктов линейной комплекснозначной модели экономической динамики: $\alpha_0$=0,4; $\alpha_1$=0,2



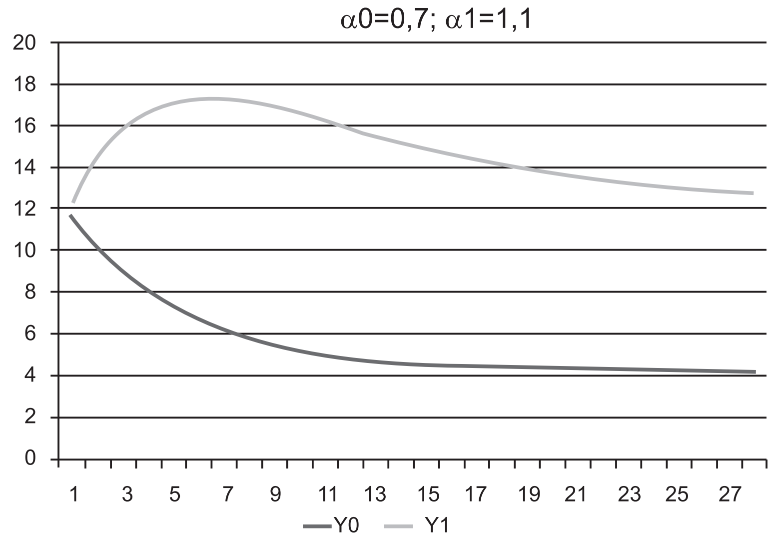


Рис. 18. Изменение во времени конечного и промежуточного продуктов линейной комплекснозначной модели экономической динамики: $\alpha_0$=0,7; $\alpha_1$=1,1

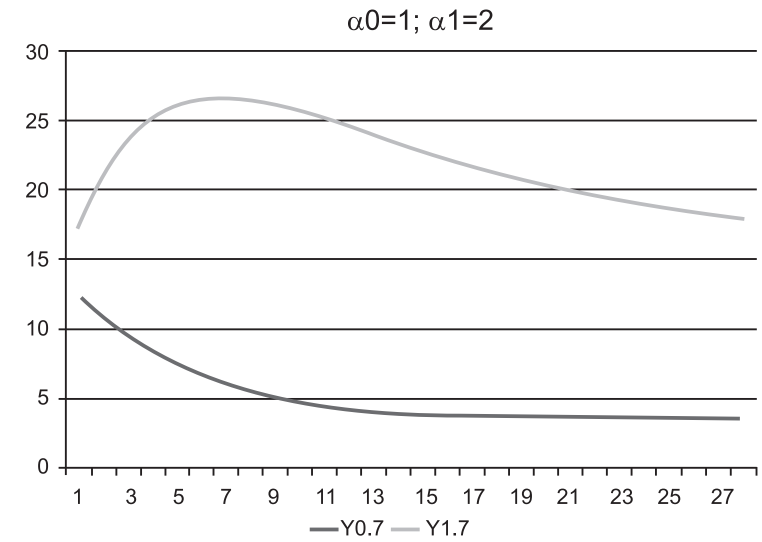


Рис.19. Изменение во времени конечного и промежуточного продуктов линейной комплекснозначной модели экономической динамики: $\alpha_0$=1; $\alpha_1$=2

Наращивание вклада пассивного капитала более быстрыми темпами, чем активного ведёт к увеличению разрыва между конечным $Y_0$ и промежуточным $Y_1$ продуктом в пользу последнего. В то время как конечный продукт $Y_0$ изменяется мало, промежуточный продукт $Y_1$ демонстрирует быстрый рост. Это говорит о том, что быстрый рост $\alpha_1$ в большей степени оказывает влияние на промежуточный продукт. При увеличении интенсивности использования пассивного капитала модель симулирует рост уровня промежуточного производства, то есть – моделируется увеличение затрат на производство в большей степени. Как раз именно такими свойствами и обладают реальные экономические производственные системы. Следовательно, в этом случае модель правильно отражает реальные экономические процессы и взаимосвязи. То же самое характерно и для других рассматриваемых ниже случаев.

Вариант 2: отношение $\alpha_0$ к $\alpha_1$ растёт, каждый из коэффициентов $\alpha_0$, $\alpha_1$ увеличивается. Активная часть капитала используется интенсивнее пассивной. Это соответствует уравнению вида: $\alpha_1=(\alpha_0+1)/3$.

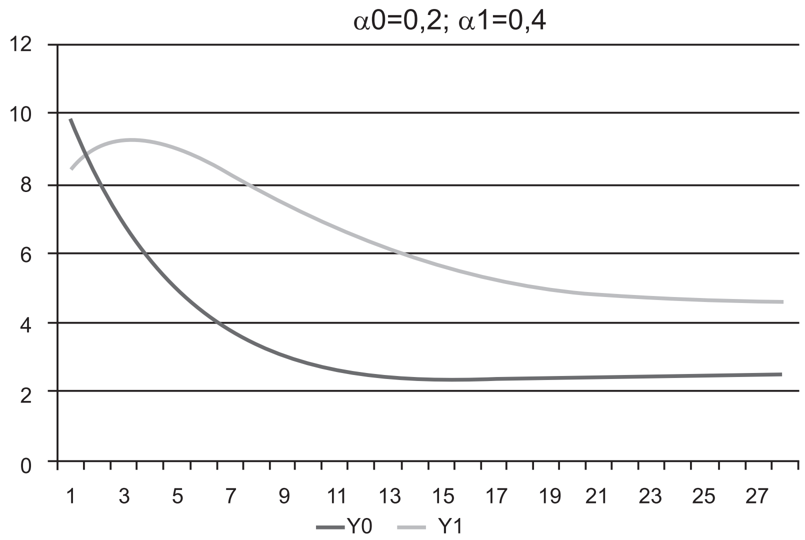


Рис. 20. Изменение во времени конечного и промежуточного продуктов линейной комплекснозначной модели экономической динамики: $\alpha_0$=0,2; $\alpha_1$=0,4



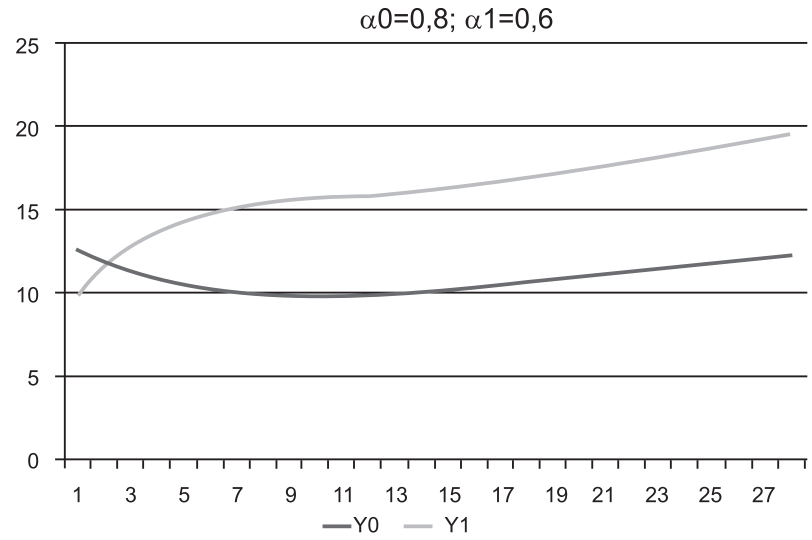


Рис. 21. Изменение во времени конечного и промежуточного продуктов линейной комплекснозначной модели экономической динамики: $\alpha_0$=0,8; $\alpha_1$=0,6

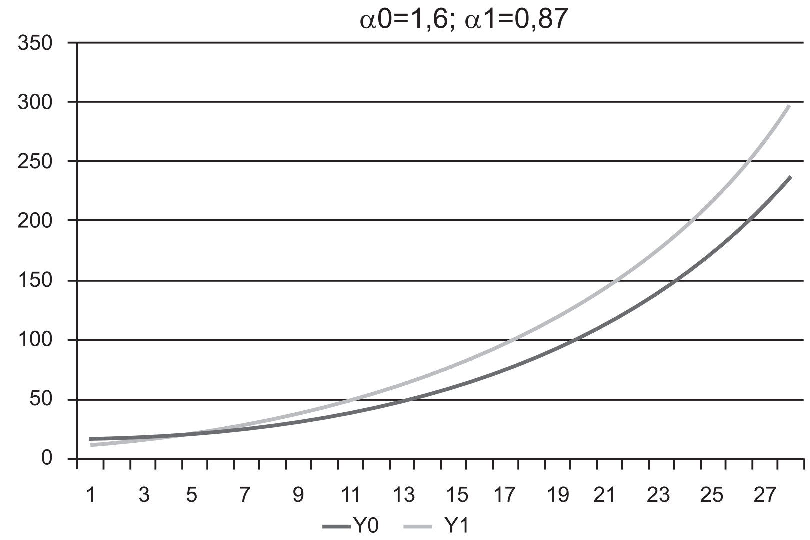


Рис. 22. Изменение во времени конечного и промежуточного продуктов линейной комплекснозначной модели экономической динамики: $\alpha_0$=1,6; $\alpha_1$=0,87

Из рисунков видно, что при росте вклада в результаты производства активной части капитала более быстрыми темпами, чем пассивной, можно наблюдать растущую динамику как конечного $Y_0$, так и промежуточного $Y_1$ продуктов. Однако даже при более быстрых темпах роста влияния активной части капитала, конечный продукт $Y_0$ не достигает того же уровня, что и промежуточный $Y_1$. Но при этом небольшое увеличение влияния пассивного капитала ведёт к росту промежуточного продукта, в то время как увеличение влияния активной части капитала (даже ускоряющееся) не обеспечивает такого же роста для конечного продукта.

<u>Вариант 3:</u> отношение $\alpha_0$ к $\alpha_1$ растет, $\alpha_0$ увеличивается, $\alpha_1$ уменьшается. Интенсивность использования активной части капитала растёт, пассивной части – уменьшается. Это соответствует уравнению $\alpha_1$=-3$\alpha_0$+3.

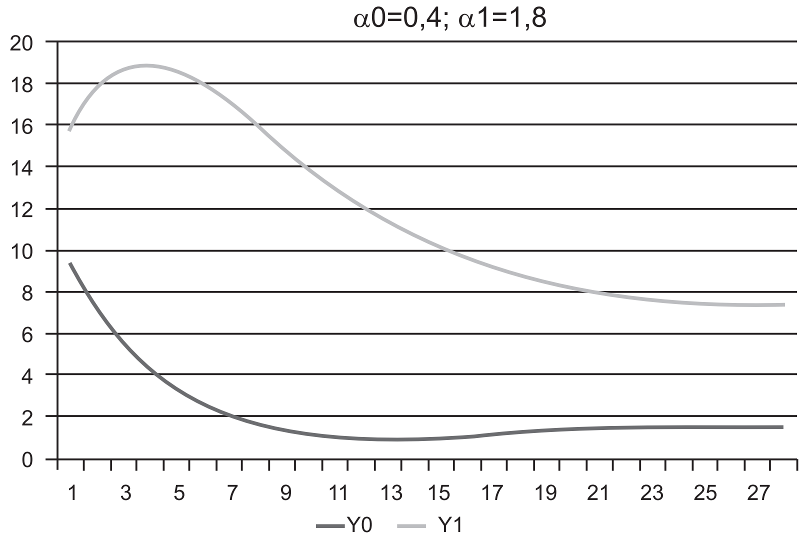


Рис. 23. Изменение во времени конечного и промежуточного продуктов линейной комплекснозначной модели экономической динамики: $\alpha_0$=0,4; $\alpha_1$=1,8



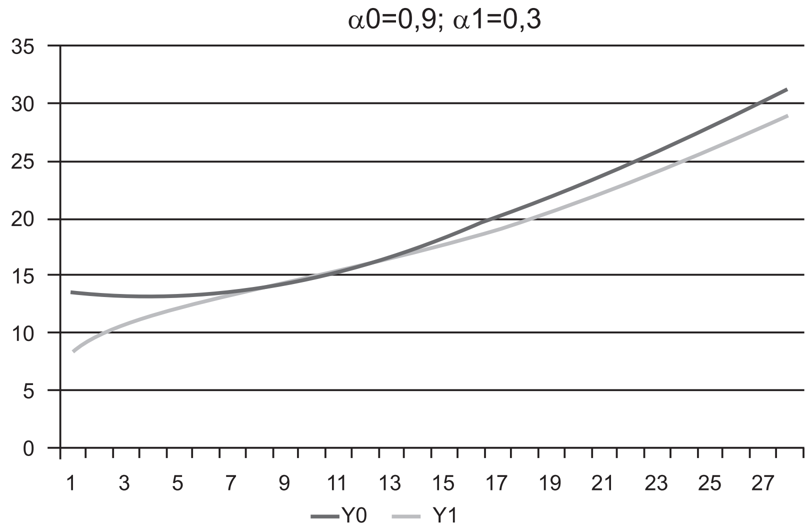


Рис. 24. Изменение во времени конечного и промежуточного продуктов линейной комплекснозначной модели экономической динамики: $\alpha_0$=0,9; $\alpha_1$=0,3

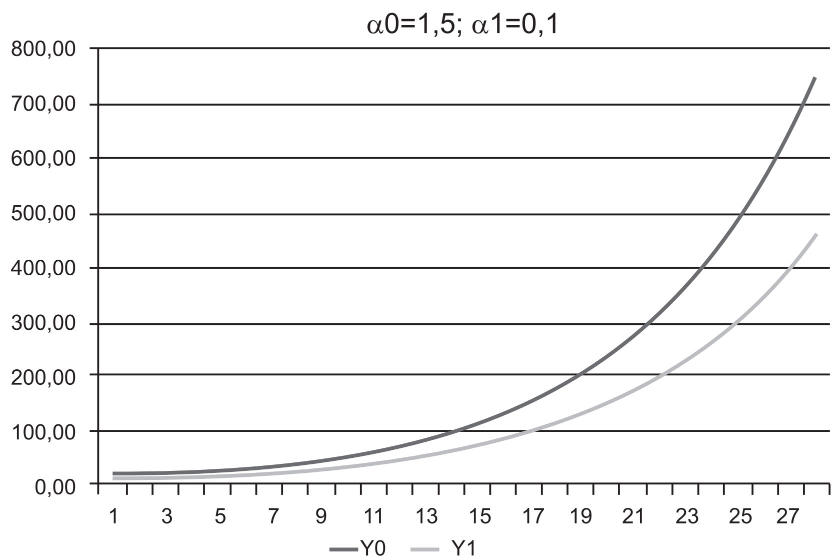


Рис. 25. Изменение во времени конечного и промежуточного продуктов линейной комплекснозначной модели экономической динамики: α0=1,5; α1=0,1

При таком варианте изменения коэффициентов можем сделать вывод о том, что постепенное сокращение интенсивности использования пассивной части капитала при наращивании интенсивности использовании его активной части ведёт к сначала выравниванию конечного $Y_0$ и промежуточного $Y_1$ продуктов, а затем превышению уровня конечного производства над промежуточным. Стоит отметить, что, даже несмотря на снижающуюся долю вклада пассивного капитала, промежуточный продукт $Y_1$ все же растёт при переходе от *t=1* к *t=n*, чего нельзя сказать о конечном продукте $Y_0$ (см. вариант 1). Это говорит о высокой чувствительности промежуточного продукта $Y_1$ к значениям влияния пассивного капитала $\alpha_1$. Для того, чтобы увеличить конечный продукт $Y_0$ достаточно начать увеличивать интенсивность использования активной части капитала $\alpha_0$ более быстрыми темпами. Однако для того, чтобы конечный продукт $Y_0$ превысил промежуточный $Y_{01}$ необходимо значительное увеличение активной части капитала $\alpha_0$ при снижении его пассивной части $\alpha_1$.

Точно таким же образом будем исследовать свойства модели при изменении комплексного коэффициента пропорциональности, находящегося в модели производственной функции (12.1) перед трудовым ресурсами, то есть – рассуждения применяются к паре коэффициентов ($\beta_0$, $\beta_1$) (табл. 12.2).

Табл. 12. 2.

Варианты изменения коэффициентов ($\beta_0$, $\beta_1$) и их отношения

| | | $\frac{\beta_0}{\beta_1}$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | ↓ | | ↑ | | – | |
| $\beta_0, \beta_1$ | ↑↑ | **1** | $\beta_1=3\beta_0$-1 | **2** | $\beta_1=(\beta_0+1)/3$ | **3** | $\beta_1=\beta_0$ |
| | ↓↓ | | $\beta_1=(\beta_0+1)/3$ | | $\alpha_1=3\beta_0$-1 | | $\beta_1=\beta_0$ |
| | ↑↓ | | - | **4** | $\beta_1$=-3 $\beta_0$+3 | | - |
| | ↓↑ | | $\beta_1$=-3 $\beta_0$+3 | | - | | - |
| | ↑– | | - | **5** | $\beta_1$=1 | | - |
| | –↑ | **6** | $\beta_0$=1 | | - | | - |
| | ↓– | | $\beta_1$=1 | | - | | - |
| | –↓ | | - | | $\beta_0$=1 | | - |



Рассмотрим результаты модельных экспериментов для этого случая.

<u>Вариант 1</u>: отношение $\beta_0$ к $\beta_1$ убывает, каждый из коэффициентов $\beta_0$, $\beta_1$ увеличивается. Количественный вклад работников непроизводственного сектора растёт быстрее вклада производственного персонала. Соответствующее этой закономерности уравнение имеет вид: $\beta_1$=3 $\beta_0$-1.

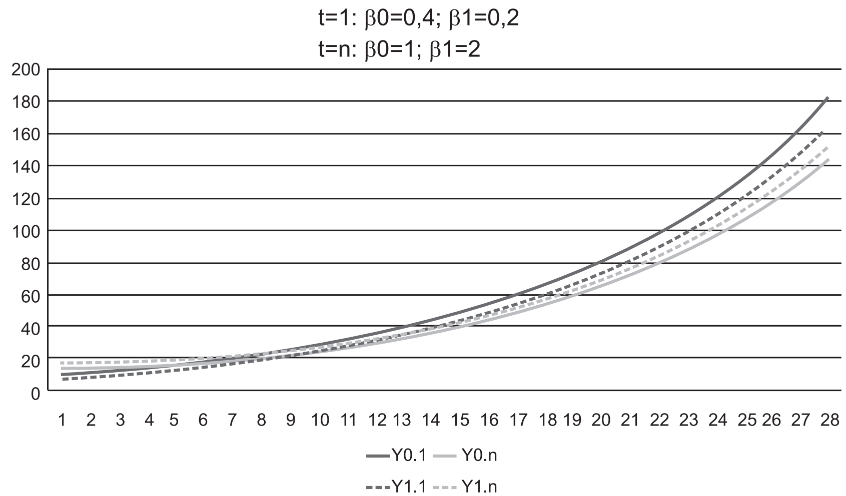


Рис. 26. Увеличение вклада непроизводственного персонала при одновременном увеличении вклада производственного персонала.

Как видно из рис. 26, если вклад непроизводственного персонала растёт более быстрыми темпами, чем производственного персонала, это приводит к снижению уровня производства в целом: смещение графиков $Y_0$ и $Y_1$ вниз при переходе от *t=1* к *t=n*. Более того, при переходе от *t=1* к *t=n* промежуточный продукт $Y_1$ начинает превышать конечный $Y_0$. Все это говорит о снижающейся производительности и эффективности. Наращивание вклада непроизводственного персонала при медленно растущем вкладе производственного персонала ведёт к негативным последствиям для производства.

Вариант 2: отношение $\beta_0$ к $\beta_1$ растёт, каждый из коэффициентов $\beta_0$, $\beta_1$ увеличивается. Вклад производственного персонала растёт быстрее вклада непроизводственных рабочих. Уравнение $\beta_1=(\beta_0+1)/3$.

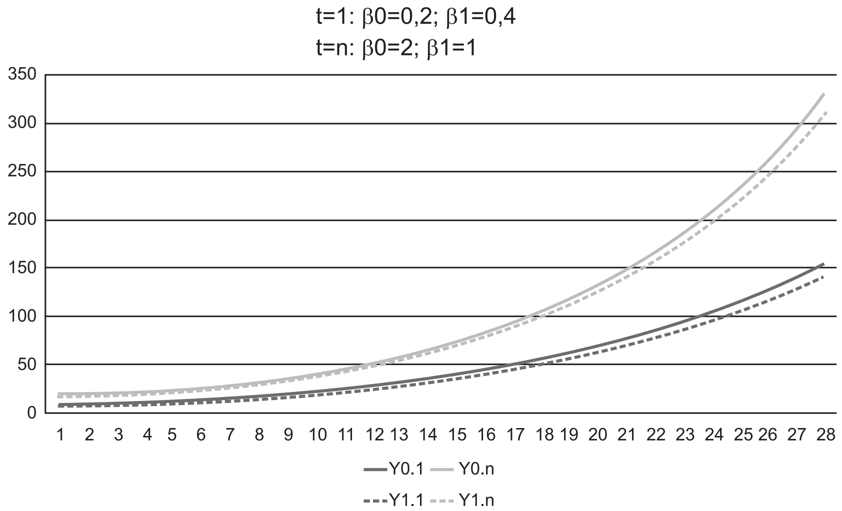


Рис. 27. Увеличение вклада производственного персонала в результат при увеличении вклада непроизводственного персонала

Наращивание обеих частей вклада трудовых ресурсов положительно отражается на производстве: при переходе от *t=1* к *t=n* конечный $Y_0$ и промежуточный $Y_1$ продукты растут. Также сохраняется неравенство $Y_0 > Y_1$. Увеличение интенсивности использования производственного персонала более быстрыми темпами, чем непроизводственного, ведёт к значительному повышению общего уровня производства (смещение графиков $Y_0$ и $Y_1$ вверх до значений 300-325 в периоде *t=n*).

Выявив такую динамику, логично рассмотреть случай, когда интенсивность использования производственного персонала растёт, а непроизводственного – снижается, в предположении, что это может привести к ещё более значительному увеличению конечного $Y_0$ и промежуточного $Y_1$ продуктов.



Вариант 3: отношение $\beta_0$ к $\beta_1$ растёт, $\beta_0$ увеличивается, $\beta_1$ уменьшается. Вклад производственного персонала в производственный результат возрастает, а непроизводственного – уменьшается. Соответствующее уравнение имеет вид: $\beta_1=-3\beta_0+3$.

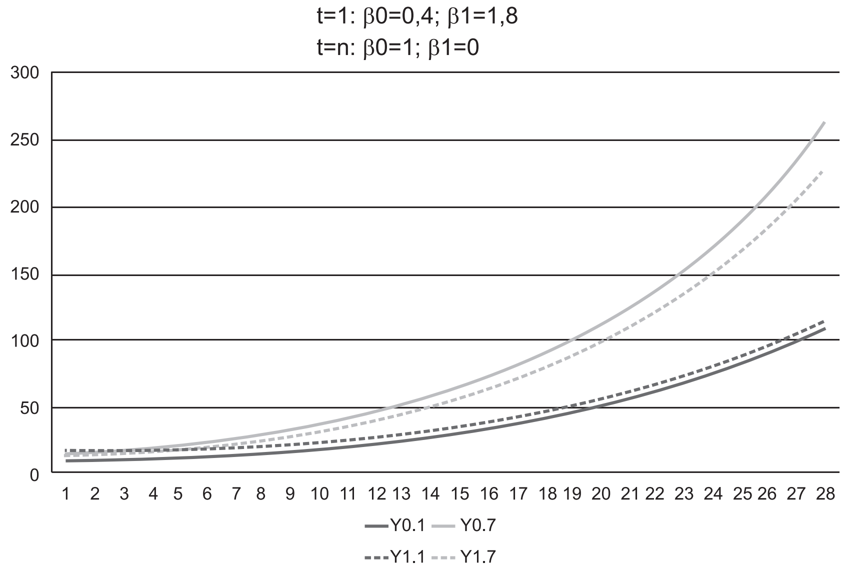


Рис. 28. Увеличение интенсивности использования производственного персонала при уменьшении вклада непроизводственного персонала.

В случае, когда разрыв между влиянием непроизводственных и производственных рабочих увеличивается в пользу последних, можно также наблюдать растущую динамику конечного $Y_0$ и промежуточного $Y_1$ продуктов. Однако, уровень, которого достигают $Y_0$ и $Y_1$ в периоде *t=n*, ниже, чем в случае увеличения обеих частей трудовых ресурсов (см. вариант 2). Он равен 200-250 единицам при *t=n*.

Рассмотрим последний случай, когда вклад производственного персонала растёт при неизменном вкладе в результат непроизводственного персонала.

Вариант 4. Отношение $\beta_0$ к $\beta_1$ растет, $\beta_0$ увеличивается, $\beta_1$ не меняется. Интенсивность использования производственного персонала растёт, непроизводственного – не меняется. Уравнение $\beta_1=1$.

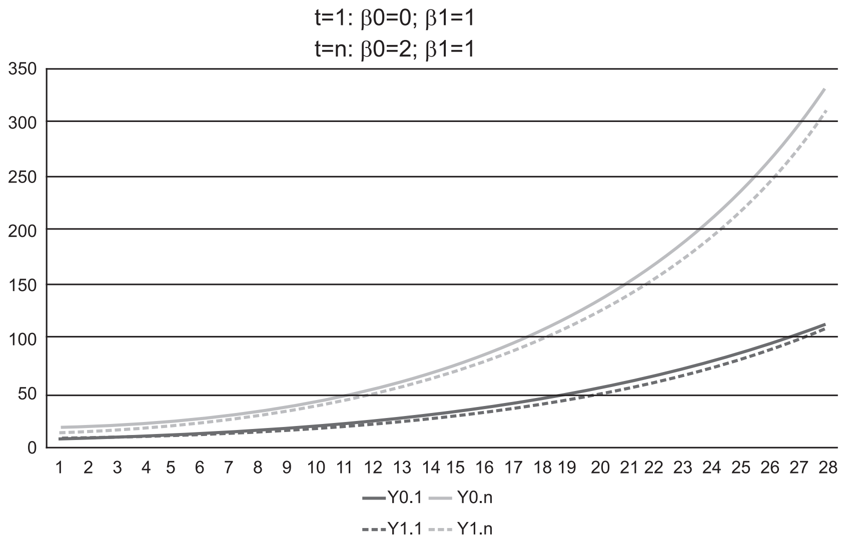


Рис. 29. Увеличение вклада производственного персонала при неизменном вкладе непроизводственного

Из рис. 29 видно, что в данном случае достигается наибольшее возрастание конечного $Y_0$ и промежуточного $Y_1$ продуктов при переходе от *t=1* к *t=n*: от уровня в 100 единиц до уровня в 300 единиц. Иными словами, увеличение вклада производственного персонала при неизменном вкладе непроизводственного персонала ведёт к наибольшей производительности.



# Заключение

Изложенные в монографии материалы представляют собой только часть проведённого в рамках гранта РФФИ исследования. Начиналась работа в Национальном минерально-сырьевом университете «Горный» в 2013 году, что и предопределило название гранта – «Комплекснозначный анализ эффективности развития минерально-сырьевого комплекса России». В первые годы исследование, проведённое под руководством автора монографии, отличалось своеобразной направленностью – изучались свойства минерально-сырьевого комплекса с использованием моделей комплекснозначной экономики. Здесь, в частности, выяснилось, что основные экономико-математические модели комплекснозначной экономики оказываются очень чувствительными к колебаниям мировых цен на минерально-сырьевые ресурсы.

В дальнейшем исследование было переведено в Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», где акцент делался уже не столько на исследование свойств минерально-сырьевого комплекса с использованием моделей комплекснозначной экономики, а на исследование особенностей самого аппарата моделирования – новые разновидности моделей комплекснозначной экономики, пригодность которых для решения прикладных экономических задач проверялась на данных о предприятиях и отраслях минерально-сырьевого комплекса. России и Монголии.

Одним из таких новых результатов, который представляет интерес для научной общественности, является возможность построения и использования комплекснозначных моделей экономической динамики. В монографии как раз и излагаются эти материалы.

Как это следует из текста монографии, комплекснозначные модели более громоздки, чем модели вещественных переменных, но не значительно сложнее их. Но эта видимая громоздкость является вполне оправданной, поскольку комплекснозначными моделями удаётся описать такие взаимосвязи и зависимости, которые в области действительных переменных или вовсе невозможно описать, либо это описание становится таким сложным, что теряется всякий смысл в использовании таких моделей.

Понятно, что модели комплекснозначной экономики, в том числе и комплекснозначные модели экономической динамики ни в коем случае нельзя рассматривать как некоторую альтернативу существующим методам и подходам моделей действительных переменных. В монографии показано, что комплекснозначные модели иначе симулируют процессы, чем это делают модели действительных переменных. А это означает, что они не замещают существующие модели экономической динамики, а существенно расширяют их. С использованием нового комплекснозначного аппарата появляется возможность моделирование таких типов экономической динамики, какие ранее экономистам были недоступными. Из свойств приведённых комплекснозначных моделей экономической динамики следует возможность исследования более многообразных инструментов регулирования экономики, чем это возможно с использованием моделей действительных переменных.

В монографии были показаны свойства самой простой линейной комплекснозначной модели экономической динамики, с помощью которой моделируются сложные нелинейные траектории. И только лишь частично была затронута тема нелинейных моделей, когда в производственной функции вместо аддитивной формы трансформации производственных ресурсов в производственный результат использовалась простая мультипликативная форма. Исследование нелинейных комплекснозначных моделей экономической динамики – это отдельная и очень кропотливая работа, которая в рамках научного гранта оказалась нам не под силу.

Тем не менее, изложенные выше результаты показывают, что комплекснозначные модели экономической динамики не только могут быть включены в научный оборот, но должны стать дополнительным инструментом исследования реальных экономических процессов.



# Литература


1. Колемаев В.А. Экономико-математическое моделирование. Моделирование макроэкономических процессов и систем. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. – 295 с.
2. Краснов М.Л., Киселёв А.И., Макаренко Г.И. Функция комплексного переменного: Задачи и примеры с подробными решениями. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 256 с.
3. Мустаев И.З., Гизатуллин Х.Н. Экономико-математические основы управления конкурентоспособностью регионов. – М.: ЗАО «Издательство «Экономика», 2007. – 312 с.
4. Светуньков С.Г., Светуньков И.С. Исследование свойств производственной функции комплексного аргумента (препринт). – СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2005. – 24 с.
5. Светуньков С.Г., Светуньков И.С. Производственные функции комплексных переменных. – М.: ЛКИ, 2008. – 136 с.
6. Семёнычев В.К., Семёнычев Е.В. Информационные системы в экономике. Эконометрическое моделирование инноваций. Часть 1. – Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2006. – С. 101.
7. Solow R. M. Contribution to the theory of economic growth // Quarterly Journal of Economics. 1956. Vol. 70. – P. 65-94.
8. Svetunkov Sergey. Complex-Valued Modeling in Economics and Finance – Springer Science+Business Media, New York, 2012. – 318 p.

С.Г. СВЕТУНЬКОВ

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ: КОМПЛЕКСНОЗНАЧНЫЙ ПОДХОД

Редактор
Корректор
Оригинал-макет

Подписано в печать 28.12.2015 г. Формат 60 х 90 1/16.
Гарнитура Times. Усл. печ. л. .
Тираж экз.

Оригинал-макет и печать – «Издательство «Левша. Санкт-Петербург»
197376, Санкт-Петербург, Аптекарский пр., д. 6,
тел. (812) 234-54-36, тел./факс (812) 234-13-00
e-mail: levsha@levshaprint.ru
www.levshaprint.ru